

درجه جابجایی نیم گروه از مرتبه $p^\alpha q^\beta - 1$

ماندانا قانعی^۱، مهرداد آزادی^{۲*}

^(۱) گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکز، جمهوری اسلامی ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۶/۱۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۱۰/۱۹

چکیده

درجه جابجایی یک نیم گروه ناجابجایی متناهی S احتمال انتخاب زوج مرتب (x, y) از اعضای S است که در آن x با y جابجا می‌شود. بنابه تعریف درجه جابجایی واضح است که اگر S یک نیم گروه جابجایی باشد درجه جابجایی آن یک است. قاعدتاً آن دسته از نیم گروه‌هایی مورد بحث هستند که ناجابجایی و متناهی باشند، لذا به ازای هر عدد صحیح مثبت و دلخواه $n = p^\alpha q^\beta$ ، $S = \langle a, b \mid a^{p^\alpha} = a, b^{q^\beta} = b, ab = a \rangle$ که در آن p و q اعداد اول $(2 \leq p < q)$ ، α و β اعداد صحیح مثبت هستند، نمایش متناهی نیم گروه S از مرتبه $p^\alpha q^\beta - 1$ است. در این مقاله، ثابت می‌کنیم که درجه جابجایی این دسته از نیم گروه‌ها از مرتبه $p^\alpha q^\beta - 1$ کمتر از $\frac{1}{2}$ است. برای مثال، در پایان این مقاله درجه جابجایی دسته خاصی از نیم گروه‌های ناجابجایی متناهی بررسی شده که کمتر از $\frac{1}{2}$ است. این مطلب به ما کمک می‌کند که بطور دقیق ارزیابی کنیم کران بالای درجه جابجایی چه دسته‌ای از نیم گروه‌ها کمتر از $\frac{1}{2}$ است و همینطور برعکس کران پایین بیشتر از $\frac{1}{2}$ دارند.

واژه‌های کلیدی: درجه جابجایی، رده هم ارزی، مرکز ساز، نمایش متناهی نیم گروه‌ها.

قضیه اصلی این مقاله به صورت زیر است:

قضیه ۱.۱: به ازای عدد صحیح مثبت و دلخواه $n = p^\alpha q^\beta$ ، که در آن p و q اعداد اول بوده $(2 \leq p < q)$ ، و α و β $(1 \leq \alpha < \beta)$ ، اعداد صحیح هستند، اگر

$$S = \langle a, b \mid a^{p^\alpha} = a, b^{q^\beta} = b, ab = a \rangle$$

نمایش نیم گروه متناهی S از مرتبه $p^\alpha q^\beta - 1$ باشد، داریم:

$$\begin{aligned} P(S) &= \frac{\sum_{x \in S} |C(x)|}{|S|^2} \\ &= \frac{3n + p^{2\alpha} + q^{2\beta} + 5(p^\alpha + q^\beta - 1)}{(n-1)^2} \\ &< \frac{1}{2} \end{aligned}$$

۲- اثبات قضیه اصلی

در این بخش قضیه اصلی را اثبات می‌کنیم

اثبات: نیم گروه S را می‌توان به صورت زیر بیان نمود

$$S = \{b^j a^i : 0 \leq i \leq p^\alpha - 1, 0 \leq j \leq q^\beta - 1\}$$

سازها و تعداد اعضای آنها را به صورت زیر هستند

$$C(a) = C(a^2) = \dots = C(a^{p^\alpha - 1})$$

$$= \{a, a^2, \dots, a^{p^\alpha - 1}\}$$

$$C(b) = C(b^2) = \dots = C(b^{q^\beta - 2})$$

$$= \{b, b^2, \dots, b^{q^\beta - 1}\}$$

$$C(b^{q^\beta - 1}) = \left\{ b^{q^\beta - 1}, b^j a^i : \begin{array}{l} 1 \leq i \leq p^\alpha - 1, \\ 1 \leq j \leq q^\beta - 1 \end{array} \right\}$$

$$C(b^j a^i) = \{b^j a^i, b^{q^\beta - 1}\}$$

که در آن

$$1 \leq i \leq p^\alpha - 1, 1 \leq j \leq q^\beta - 1$$

۱- مقدمه

برای یک ساختار جبری متناهی دلخواه A ، احتمال انتخاب زوج مرتب (x, y) از اعضای A که در آن x با y جابجا می‌شود را درجه جابجایی نامیده و با $P(A)$ نمایش می‌دهیم. همچنین داریم:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{|\{(x, y) \in A \times A : xy = yx\}|}{|A|^2} \\ &= \frac{\sum_{x \in A} |C_A(x)|}{|A|^2} \end{aligned}$$

که در آن $C_A(x)$ مرکز ساز x در A است. در مرجع [۵] ثابت شده که برای گروه متناهی A ،

$$P(A) = \frac{\kappa(A)}{|A|}$$

که در آن $\kappa(A)$ تعداد رده‌های هم ارزی A است.

برای یک الفبا A ، A^+ را نیم‌گروه آزاد روی A در نظر می‌گیریم. فرض کنید R زیرمجموعه‌ای از $A^+ \times A^+$ بوده و ρ رابطه هم ارزی تولید شده توسط R باشد، در این صورت نیم‌گروه $S = \frac{A^+}{\rho}$ را به $\langle A | R \rangle$ نمایش

می‌دهیم. بدون کاستن از کلیت، برای $w_1, w_2 \in A^+$ ، اگر w_1 و w_2 با هم یکسان باشند می‌نویسیم $w_1 \equiv w_2$ و اگر هر عضو از S نمایش مشابه داشته باشند (به این معنی که اگر $(w_1, w_2) \in \rho$ آنگاه می‌نویسیم $w_1 = w_2$).

برای مثال، اگر $A = \{a, b\}$ و $R = \{ab = ba\}$ آنگاه $aba = a^2b$ اما $aba \neq a^2b$.

به ازای عدد صحیح $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \geq 4$ ، $k \geq 2$ ، نمایش متناظر نیم گروه S از مرتبه $n - 1$ که در مرجع [1] بیان شده است، به صورت زیر است

$$S = \left\langle a_1, a_2, \dots, a_k \mid \begin{array}{l} a_i^{p_i^{\alpha_i}} = a_i \quad (i=1, 2, \dots, k), \\ a_i a_{i+1} = a_i \quad (i=1, 2, \dots, k-1) \end{array} \right\rangle$$

$$(p^\alpha q^\beta - 1)^2 - 2(p^\alpha + q^\beta - 2)^2 > 2(p^\alpha - 1)(q^\beta - 1)$$

یا

$$(p^\alpha q^\beta - 1 - \sqrt{2}p^\alpha - \sqrt{2}q^\beta + 2\sqrt{2}) \times (p^\alpha q^\beta - 1 + \sqrt{2}p^\alpha + \sqrt{2}q^\beta - 2\sqrt{2}) > 2(p^\alpha - 1)(q^\beta - 1)$$

یا به طور معادل

$$\begin{aligned} & (p^\alpha q^\beta + \sqrt{2}p^\alpha + \sqrt{2}q^\beta - 2\sqrt{2} - 1) - (p^\alpha - 1)(q^\beta - 1) \\ &= (p^\alpha q^\beta + \sqrt{2}(p^\alpha + q^\beta) - 2\sqrt{2} - 1) - (p^\alpha q^\beta - (p^\alpha + q^\beta) + 1) \\ &= (\sqrt{2} + 1)(p^\alpha + q^\beta) - 2\sqrt{2} - 2 \\ &= (\sqrt{2} + 1)(p^\alpha + q^\beta) - 2(\sqrt{2} + 1) \\ &= (\sqrt{2} + 1)(p^\alpha + q^\beta - 2) > 0 \end{aligned}$$

پس

$$(p^\alpha q^\beta + \sqrt{2}p^\alpha + \sqrt{2}q^\beta - 2\sqrt{2} - 1) > (p^\alpha - 1)(q^\beta - 1) \quad (1)$$

همچنین داریم

$$\begin{aligned} & p^\alpha q^\beta - \sqrt{2}p^\alpha - \sqrt{2}q^\beta + 2\sqrt{2} - 1 \\ & > p^\alpha q^\beta - 2p^\alpha - \sqrt{2}q^\beta + 2\sqrt{2} - 1 \\ &= q^\beta(p^\alpha - \sqrt{2}) - 2(p^\alpha - \sqrt{2}) - 1 \\ &= (p^\alpha - \sqrt{2})(q^\beta - 2) - 1 \end{aligned}$$

چون $1 \leq \alpha < \beta$ و $2 \leq p < q$ داریم

$$(p^\alpha - \sqrt{2})(q^\beta - 2) - 1 > 2$$

لذا

$$(p^\alpha q^\beta - \sqrt{2}p^\alpha - \sqrt{2}q^\beta + 2\sqrt{2} - 1) > (p^\alpha - \sqrt{2})(q^\beta - 2) - 1 > 2 \quad (2)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم

تعداد اعضای مرکزساز هر عضو به صورت زیر است

$$\begin{aligned} |C(a)| &= |C(a^2)| = \dots = |C(a^{p^\alpha - 1})| \\ &= p^\alpha - 1 \\ |C(b)| &= |C(b^2)| = \dots = |C(b^{q^\beta - 2})| \\ &= q^\beta - 1 \\ |C(b^{q^\beta - 1})| &= p^\alpha (q^\beta - 1) \\ |C(b^j a^i)| &= 2(p^\alpha - 1)(q^\beta - 1) \end{aligned}$$

که در آن

$$1 \leq i \leq p^\alpha - 1, 1 \leq j \leq q^\beta - 1$$

بنابراین

$$\begin{aligned} P(S) &= \frac{(p^\alpha - 1)(p^\alpha - 1) + (q^\beta - 2)(q^\beta - 1)}{(p^\alpha q^\beta - 1)^2} \\ &+ \frac{1 \times p^\alpha (q^\beta - 1) + (p^\alpha - 1)(q^\beta - 1) \times 2}{(p^\alpha q^\beta - 1)^2} \\ &= \frac{3n + p^{2\alpha} + q^{2\beta} - 5(p^\alpha + q^\beta - 1)}{(n - 1)^2} \end{aligned}$$

می‌خواهیم نشان دهیم: $P(S) < \frac{1}{2}$ ، یعنی:

$$P(S) = \frac{3p^\alpha q^\beta + p^{2\alpha} + q^{2\beta} - 5p^\alpha - 5q^\beta + 5}{(p^\alpha q^\beta - 1)^2} < \frac{1}{2}$$

با توجه به اینکه نامساوی فوق معادل نامساوی

$$2(3p^\alpha q^\beta + p^{2\alpha} + q^{2\beta} - 5p^\alpha - 5q^\beta + 5) < (p^\alpha q^\beta - 1)^2$$

است، نشان می‌دهیم:

$$2\left((p^\alpha + q^\beta - 2)^2 + (p^\alpha - 1)(q^\beta - 1)\right) < (p^\alpha q^\beta - 1)^2$$

لذا کفایت نشان دهیم

$$P(S) = \frac{\sum_{x \in S} |C(x)|}{|S|^2} = \frac{4 \times 4 + 2 \times 9 + 2 \times 5}{9 \times 9} = \frac{48}{81} > \frac{1}{2}$$

حال، وقتی n زوج و بیشتر از ۲ باشد داریم:

$$S = \left\{ a^i, b^j, ab^j, b^j a, a^2 b^j, a^4 b^j; \begin{matrix} 1 \leq i \leq 4, \\ 1 \leq j \leq n-1 \end{matrix} \right\}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} |C(a)| &= |C(a^3)| = 4 \\ |C(a^2)| &= |C(a^4)| = 5n-1 \\ |C(ab^i)| &= |C(b^i a)| = 4, \quad (1 \leq i \leq n-1) \\ |C(b^i)| &= |C(a^2 b^i)| = |C(a^4 b^i)| \\ &= 3n-1 \quad (1 \leq i \leq n-1) \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} P(S) &= \frac{\sum_{x \in S} |C(x)|}{|S|^2} \\ &= \frac{2 \times 4 + 2 \times (5n-1) + 4(n-1)}{(5n-1)(5n-1)} \\ &\quad + \frac{(n-1)(3n-1) + (n-1)(3n-1)}{(5n-1)(5n-1)} \\ &= \frac{9n^2 + 6n + 1}{25n^2 - 10n + 1} \end{aligned}$$

در حالت اخیر داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S) = \frac{9}{25}$$

بنابراین به ازای هر عدد زوج بزرگتر از ۲ مانند n داریم

$$\blacksquare \cdot P(S) < \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} &(p^\alpha q^\beta - \sqrt{2} p^\alpha - \sqrt{2} q^\beta + 2\sqrt{2} - 1) \times \\ &(p^\alpha q^\beta + \sqrt{2} p^\alpha + \sqrt{2} q^\beta - 2\sqrt{2} - 1) \\ &> 2(p^\alpha - 1)(q^\beta - 1) \end{aligned}$$

و این اثبات را کامل می‌کند. ■

۳- مثال

بنا به مرجع [۷]، نیم گروه

$$S = \langle a, b \mid a^2 = b^n, bab = a \rangle$$

از مرتبه $|S| = 5n - 1$ است. اگر $n \geq 2$ و زوج باشد، آنگاه $|S|$ فرد بوده و S نیم‌گروهی شبه-ناجایبایی است، بطوریکه به ازای $n = 2$ درجه جایبایی این نیم گروه بیشتر از $\frac{1}{2}$ بوده و به ازای $n > 2$ از $\frac{1}{2}$ کمتر است.

اثبات: بنا به مرجع [۷]، برای $n = 2$ مرتبه S برابر ۹ است و داریم:

$$S = \{a, a^2, a^3, a^4, b, ab, ba, a^2 b, aba\}$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned} |C(a)| &= |C(a^3)| = |\{a, a^2, a^3, a^4\}| = 4 \\ |C(b)| &= |\{a^2, a^4, b, a^2 b, aba\}| = 5 \\ |C(a^2)| &= |C(a^4)| \\ &= |\{a, a^2, a^3, a^4, b, ab, ba, a^2 b, aba\}| \\ &= 9 \\ |C(ab)| &= |C(ba)| \\ &= |\{a^2, a^4, b, ab, ba\}| = 4 \\ |C(a^2 b)| &= |C(aba)| \\ &= |\{a^2, a^4, a^2 b, aba\}| = 5 \end{aligned}$$

و در نتیجه داریم

فهرست منابع

- [1] B. Ahmadi, C.M. Campbell, H. Doostie, Non-Commutative finite monoids of a given order $n \geq 4$, An. şt. Univ. Ovidius Constanța. 22 (2014) 29-35.
- [2] K. Ahmadidelir, C.M. Campbell, H. Doostie, Almost commutativesemigroups, Algebra Colloquium. 18 (2011) 881-888.
- [3] C.M. Campbell, J.D. Mitchell, N. Ruskuc, Comparing semigroup and monoid presentations for finite monoids, Monatsh. Math. 134 (2002) 287-293.
- [4] C.M. Campbell, E.F. Robertson, N. Ruskuc, R.M. Thomas, Semigroup and group presentations, Bull. London Math. Soc. 27 (1995) 46--50.
- [5] H. Doostie, M. Maghasedi, Certain classes of groups with commutativity degree $d(G) < 0.5$, Ars Combinatoria. 89 (2008) 263-270.
- [6] E.F. Robertson, Y. Ünlü, On semigroup presentations, Proc. Edinburgh Math. Soc. 36 (1993) 55-68.
- [7] M.R. Sorouhesh, H. Doostie, Quasi-commutative semigroups of finite order related to hamiltonian groups, Bull. Korean Math. Soc. 52 (2015) 239-246.

