دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و هشتم، بهمن و اسفند ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X–۵۸۸
پژوهش‌های نوین در ریاضی
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

حل معادلات عملگری و اثبات قضایای کانان و کاترجا در فضای S_b–متریک C^*–جبر مقدار

سیده سمیرا رضوی[۱]، سید هاشم پروانه مسیحا[۲*]

[۱] دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران
[۲] دانشیار، گروه ریاضی محض (آنالیزریاضی)، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۴/۱۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۶/۱

چکیده

در این مقاله، سعی داریم بر اساس نتایج و قضایای بیان شده در فضای S_b–متریک C^*–جبر مقدار، به حل نوعی از معادله عملگری ماتریسی در $\mathrm{L(H)}$ بپردازیم که در آن H یک فضای هیلبرت و $\mathrm{L(H)}$ مجموعه عملگرهای خطی و کراندار روی H هستند. هم‌چنین، ثابت می‌کنیم نگاشت انقباضی کانان دارای نقطه ثابت منحصربه‌فردی در فضای S_b–متریک C^*–جبر مقدار است. به علاوه، نشان می‌دهیم نگاشت انقباضی از نوع کاترجا نیز دارای نقطه ثابت منحصربه‌فردی در فضای S_b–متریک C^*–جبر مقدار می‌باشد. و در نهایت، با استفاده از اصل انقباض باناخ در فضای S_b–متریک C^*–جبر مقدار که قبلا توسط نویسندگان این مقاله بررسی شده و هم‌چنین نتایج به دست آمده از قضایای فوق به حل معادله عملگری ماتریسی فوق در فضای S_b–متریک C^*–جبر مقدار پرداخته و نشان می‌دهیم که این معادله عملگری ماتریسی دارای جواب منحصربه‌فردی در $\mathrm{L(H)}$ است و جواب به‌دست آمده نیز یک عملگر هرمیتی می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: معادلات عملگری، نگاشت نوع کانان، نگاشت نوع کاترجا، نقطه ثابت، فضای S_b–متریک C^*–جبر مقدار.

* عهده‌دار مکاتبات: Email:Masiha@kntu.ac.ir

۱- مقدمه

اصل انقباض باناخ یکی از مهم‌ترین و کاربردی‌ترین مسائل آنالیز ریاضی است که توسط استفان باناخ در سال ۱۹۲۲ معرفی شد. این اصل، روشی را برای حل مسائل کاربردی در شاخه‌های مختلف ریاضیات، فیزیک و مهندسی ارایه می‌کند. (به عنوان کاربردی از معادلات تابعی به [۱] مراجعه شود.) در سال ۱۹۹۳، کزرویک اصل دیگری را برای فضاهای نیمه-متریک معرفی کرد [۲]. پس از آن خیا، از این اصل استفاده و نام b-متریک را برای آن برگزید[۳]. در سال ۲۰۱۴، ما و همکارانش بر روی مفاهیم فضای متریک C^*-جبر مقدار مطالعه و برخی قضایای نقطه ثابت را در این فضا اثبات کردند[۴]. سپس ما و جیانگ، به‌عنوان تعمیمی از فضای b-متریک و فضای متریک عملگر-مقدار، مفهوم فضای b-متریک C^*-جبر مقدار را معرفی نمودند [۵]. چندی قبل، صدقی و همکارانش فضای S-متریک را معرفی و برخی قضایای نقطه ثابت را در این فضا بررسی کردند [۶]. پس از آن سویا و همکارش، فضای S_b-متریک را به‌عنوان تعمیمی از فضای b-متریک معرفی نمودند [۷]. در [۹-۸] عسگری و همکارانش به اثبات برخی قضایای نقطه ثابت زوجی پرداختند و از این قضایا برای حل برخی از معادلات ماتریس غیر خطی استفاده کردند. اخیرا، نویسندگان این مقاله فضای S_b-متریک C^*-جبر مقدار را معرفی و قضیه نقطه ثابت را در این فضا بررسی کردند[۱۰]. در این مقاله نیز به معرفی دو نگاشت انقباضی مهم با نام‌های کانان و کاترجا می‌پردازیم و این نگاشت‌ها را در فضای جدید بررسی و اثبات می‌نماییم. هم‌چنین، از این نتایج استفاده کرده و به حل نوعی از معادلات عملگری می‌پردازیم.

۲- مفاهیم مقدماتی

در این بخش، نخست برخی تعاریف و مفاهیمی که در ادامه لازم است را یادآوری می‌نماییم.
فرض کنید $\mathcal{A}$ بیان‌گر C^*-جبر یکدار با عنصر همانی I باشد. قرار دهید $\mathcal{A}_h=\{x\in A|x=x^*\}$. عنصر $x\in\mathcal{A}$ را مثبت می‌نامیم و با $x\geq 0$ نشان می‌دهیم، اگر $x\in\mathcal{A}_h$ و $\sigma(x)\subset[0,\infty)$ که $\sigma(x)$ بیان‌گر طیف x می‌باشد. با استفاده از عناصر مثبت، رابطه ترتیب جزئی $\preccurlyeq$ روی $\mathcal{A}_h$ را به‌صورت $x\preccurlyeq y$ تعریف می‌کنیم اگر و تنها اگر $y-x\geq 0$ باشد. نماد $\mathcal{A}_+$ بیان‌گر مجموعه $\{x\in A|x\geq 0\}$ و $|x|=(x^*x)^{\frac{1}{2}}$ است. و نماد $\mathcal{A}'$ بیان‌گر مجموعه $\{a\in\mathcal{A}|ab=ba,\forall b\in\mathcal{A}\}$ می‌باشد.

تعریف۱[۱۱]: فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد. تابع $S:X\times X\times X\to\mathcal{A}$ را یک S-متریک C^*-جبر مقدار گوییم، اگر به‌ازای‌هر x,y,z,a در X داشته باشیم:

(۱) $\mathrm{S}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})\geq 0$

(۲) $S(x,y,z)=0$ اگر و تنها اگر $x=y=z$

(۳) $S(x,y,z)\leq S(x,x,a)+S(y,y,a)+S(z,z,a)$

به‌علاوه، (X,A,S) را یک فضای S-متریک C^*-جبر مقدار گوییم.

تعریف۲[۷]: فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و $s\geq ۱$ عددی دلخواه باشد. تابع $S_b:X^۳\to[0,\infty)$ را یک S_b-متریک گوییم اگر و تنها اگر به‌ازای‌هر x,y,z,t در X شرایط زیر برقرار باشند:

(۱) $\mathrm{S}_b(x,y,z)=0$ اگر و تنها اگر $x=y=z$

(۲) $\mathrm{S}_b(x,y,z)\leq s[\mathrm{S}_b(x,x,a)+\mathrm{S}_b(y,y,a)+\mathrm{S}_b(z,z,a)]$

در این‌حالت، زوج (X,S_b) را یک فضای S_b-متریک گوییم.

تعریف۳[۷]: یک تابع S_b-متریک را متقارن گوییم

$$S_b(x,x,y)=S_b(y,y,x),\ \ \forall x,y\in X.$$

حال به تعریف فضای S_b-متریک C^*-جبر مقدار می‌پردازیم:

تعریف۴[۱۰]: فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و $A\in\mathcal{A}'$ با $\mathrm{A}\succcurlyeq\mathrm{I}$ باشد. فرض کنید تابع

$S_b: X \times X \times X \to \mathcal{A}$ به‌ازای‌هر x, y, z, a در X در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $S(x,y,z) \geq 0$

(۲) $S(x,y,z) = 0$ اگر و تنها اگر $x = y = z$

(۳) $S_b(x,y,z) \leq A[S_b(x,x,a) + S_b(y,y,a) + S_b(z,z,a)]$

در این‌صورت، S_b را یک S_b-متریک C^*-جبر مقدار روی X گوییم و $(X, \mathcal{A}, S_b)$ را یک فضای S_b-متریک C^*-جبر مقدار نامیم.

حال ویژگی مهمی را بیان می‌کنیم که نقشی اساسی در اثبات قضایای فضای جدید دارد:

تعریف۵[۱۰]: یک تابع S_b-متریک C^*-جبر مقدار رامتقارن‌گوییم‌اگر

$$S_b(x,x,y) = S_b(y,y,x), \ \ \forall x, y \in X$$

۳- نتایج اصلی

در این بخش ابتدا مروری به قضیه نگاشت انقباضی در فضای S_b-متریک C^*-جبر مقدار می‌نماییم [۱۰]. سپس دو قضیه انقباضی مهم با نام‌های کانان و کاترجا را در این فضا ارایه می‌دهیم.

قضیه۱[۱۰]: فرض کنید $(X, \mathcal{A}, S_b)$ یک فضای S_b-متریک C^*-جبر مقدار متقارن باشد. فرض کنید نگاشت $f: X \to X$ در شرط زیر صدق کند

$$S_b(fx,fx,fy) \leq a^* S_b(x,x,y) a, \ \ \forall x, y \in X$$

که در آن $a \in \mathcal{A}$ با $\|a\| < ۱$ می‌باشد. در این صورت f دارای نقطه ثابت منحصربه‌فردی در X است.

قضیه ۲ (نگاشت نوع کانان): فرض کنید $(X, \mathcal{A}, S_b)$ یک فضای S_b-متریک C^*-جبر مقدار کامل باشد. فرض کنید نگاشت $f: X \to X$ در شرط زیر صدق کند

$$S_b(fx,fx,fy) \leq a\big(S_b(fx,fx,x) + S_b(fy,fy,y)\big), \quad (۱)$$

که در آن $a \in \mathcal{A}'_+$ و $\|a\| < \frac{۱}{۲}$ به‌ازای‌هر $x, y \in X$ باشد. در این‌صورت، نقطه ثابت منحصربه‌فردی در X وجود خواهد داشت.

<u>برهان:</u> بدون کم شدن از کلیت مسئله، فرض کنید $a \neq 0$ باشد. توجه کنید که $a \in \mathcal{A}'_+$ و $a\big(S_b(fx,fx,x) + S_b(fy,fy,y)\big)$ نیز یک عنصر مثبت است. $x_۰ \in X$ انتخاب کنید و قرار دهید $x_{n+۱} = fx_n = f^{n+۱}x_۰$ به ازای $n = ۱,۲, \ldots$. دنباله $\{x_n\} \subseteq X$ را در نظر بگیرید. به‌ازای‌هر $n \in \mathbb{N}$ و با استفاده از رابطه (۱) داریم

$$\begin{aligned} S_b(x_{n+۱}, x_{n+۱}, x_n) &= S_b(fx_n, fx_n, fx_{n-۱}) \leq a[S_b(fx_n, fx_n, x_n) + S_b(fx_{n-۱}, fx_{n-۱}, x_{n-۱})] \\ &= a[S_b(x_{n+۱}, x_{n+۱}, x_n) + S_b(x_n, x_n, x_{n-۱})] \end{aligned}$$

بنابراین،

$$(۱_{\mathcal{A}} - a) S_b(x_{n+۱}, x_{n+۱}, x_n) \leq a S_b(x_n, x_n, x_{n-۱})$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned} S_b(x_{n+۱}, x_{n+۱}, x_n) &= t S_b(x_n, x_n, x_{n-۱}) \leq (۱_{\mathcal{A}} - a)^{-۱} a S_b(x_n, x_n, x_{n-۱}) \leq t^۲ S_b(x_{n-۱}, x_{n-۱}, x_{n-۲}) \\ &\ \vdots \\ &\leq t^n S_b(x_۱, x_۱, x_۰) \end{aligned}$$

که در آن $t = (۱_{\mathcal{A}} - a)^{-۱} a$ می‌باشد. بنابر لم ۱.۲ مقاله [۱۱]، داریم $a \in \mathcal{A}'_+$ و با $\|a\| < \frac{۱}{۲}$، می‌توان نتیجه گرفت که $(۱_{\mathcal{A}} - a)^{-۱} \in \mathcal{A}'_+$ و $(۱_{\mathcal{A}} - a)^{-۱} a \in \mathcal{A}'_+$ با $\|(۱_{\mathcal{A}} - a)^{-۱} a\| < ۱$ است. فرض کنید

$S_b(x_1,x_1,x_0) = c$ و $c \in \mathcal{A}'_+$ باشد. به‌ازای هر $n+1>m$ داریم:

$$\begin{aligned}
S_b(x_{n+1},x_{n+1},x_m) &\le b[S_b(x_{n+1},x_{n+1},x_n) + S_b(x_{n+1},x_{n+1},x_n) + S_b(x_m,x_m,x_n)] \\
&= 2bS_b(x_{n+1},x_{n+1},x_n) + bS_b(x_n,x_n,x_m) \le 2bS_b(x_{n+1},x_{n+1},x_n) + 2b^2S_b(x_n,x_n,x_{n-1}) \le \\
&2bS_b(x_{n+1},x_{n+1},x_n) + 2b^2S_b(x_n,x_n,x_{n-1}) + \cdots + 2b^{n-m+1}S_b(x_{m+1},x_{m+1},x_m) \le \\
&2[bt^n + b^2t^{n-1} + \cdots + b^{n-m+1}t^m]S_b(x_1,x_1,x_0) \\
&\le 2\sum_{k=m}^{n} b^{n-k+1}t^k c = 2\sum_{k=m}^{n} b^{\frac{n-k+1}{2}}b^{\frac{n-k+1}{2}}t^{\frac{k}{2}}t^{\frac{k}{2}}c^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}} + \\
&2\sum_{k=m}^{n}\left|c^{\frac{1}{2}}b^{\frac{n-k+1}{2}}t^{\frac{k}{2}}\right|^2 + b^2S_b(x_{n-1},x_{n-1},x_m) \le 2\|c\|\sum_{k=m}^{n}\|t\|^k\|b\|^{n-k+1}I \le \\
&\frac{2\|c\|\|t\|^{n+1}\|b\|}{\|t\|-\|b\|}I \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0
\end{aligned}$$

بنابراین $\{x_n\}$ دنباله‌ای کوشی نسبت به $\mathcal{A}$ است. کامل بودن X نتیجه می‌دهد عنصر $x \in X$ وجود دارد به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} fx_{n+1} = x$. بنابر قسمت (۳)تعریف ۴ و لم ۳.۲ مقاله [۱۱] داریم

$$\begin{aligned}
S_b(fx,fx,x) &\le b[S_b(fx,fx,fx_n) + S_b(fx,fx,fx_n) + S_b(x,x,fx_n)] = \\
&2bS_b(fx,fx,fx_n) + bS_b(x,x,fx_n) \le 2b[aS_b(fx,fx,x) + S_b(fx_n,fx_n,x_n)] + bS_b(fx_n,fx_n,x) = \\
&2abS_b(fx,fx,x) + 2abS_b(fx_n,fx_n,x_n) + bS_b(fx_n,fx_n,x)
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$(1_{\mathcal{A}} - 2ab)S_b(fx,fx,x) \le 2abS_b(fx_n,fx_n,x_n) + bS_b(fx_n,fx_n,x),$$

بنابراین،

$$\|S_b(fx,fx,x)\| \le \|2ab(1_{\mathcal{A}} - 2ab)^{-1}\|\|S_b(fx_n,fx_n,x_n)\| + \|b(1_{\mathcal{A}} - 2ab)^{-1}\|\|S_b(fx_n,fx_n,x)\| \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$$

در نتیجه، $fx = x$ می‌باشد. یعنی x نقطه ثابت f است. حال فرض کنید $y \neq x$ نقطه ثابت دیگر f باشد. در این‌صورت،

$$0_{\mathcal{A}} \le S_b(x,x,y) = S_b(fx,fx,fy) \le a[S_b(fx,fx,x) + S_b(fy,fy,y)] = 0_{\mathcal{A}}$$

در نتیجه، $S_b(x,x,y) = 0_{\mathcal{A}}$ اگر و تنها اگر $x = y$ باشد. بنابراین، نقطه ثابت منحصربه‌فرد است.

مثال ۱: فرض کنید $X = \mathbb{R}$ و $\mathcal{A} = M_2(\mathbb{R})$ باشد. تعریف کنید

$$S_b(x,y,z) = diag(|x-z| + |y-z|, |x-z| + |y-z|)$$

که در آن $x, y \in \mathbb{R}$ هستند. به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که S_b یک S_b-متریک C^*-جبر مقدار است. و $(X, M_2(\mathbb{R}), S_b)$ یک فضای S_b-متریک C^*-جبر مقدار کامل خواهد بود. حال فرض کنید $f(x) = \frac{x}{8}$ و $f(y) = \frac{y}{8}$ باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}
S_b(fx,fx,fy) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}|x-y| & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}|x-y| \end{bmatrix} \le \frac{1}{4}\begin{bmatrix} |x|+|y| & 0 \\ 0 & |x|+|y| \end{bmatrix} \le \\
&\frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} 2\left|\frac{x}{8}-x\right| & 0 \\ 0 & 2\left|\frac{x}{8}-x\right| \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\left|\frac{y}{8}-y\right| & 0 \\ 0 & 2\left|\frac{y}{8}-y\right| \end{bmatrix}\right) = \\
&\frac{1}{4}(S_b(fx,fx,x) + S_b(fy,fy,y))
\end{aligned}$$

لذا بنابر قضیه ۲، نگاشت f دارای نقطه ثابت منحصربه‌فردی است.

قضیه۳ (نگاشت نوع کاترجا): فرض کنید $(X,\mathcal{A},S_b)$ یک فضای S_b-متریک C^*-جبر مقدار کامل باشد. فرض کنید نگاشت $f:X\to X$ در شرط زیر صدق کند

$$S_b(fx,fx,fy) \le a(S_b(fx,fx,y) + S_b(fy,fy,x)), \qquad (۲)$$

که در آن $a\in\mathcal{A}'_+$ و $\|ab\|<\frac{۱}{۲}$ به‌ازای‌هر $x,y\in X$ باشد. در این‌صورت، نقطه ثابت منحصر به فردی در X وجود خواهد داشت.

برهان: بدون کم شدن از کلیت مسئله، فرض کنید $a\neq ۰$ باشد. توجه کنید که $a\in\mathcal{A}'_+$ و نیز $a\big(S_b(fx,fx,y)+S_b(fy,fy,x)\big)$ یک عنصر مثبت است. $x_۰\in X$ انتخاب کنید و قرار دهید $x_{n+۱}=fx_n=f^{n+۱}x_۰$ به‌ازای $n=۰,۱,۲,\ldots$ دنباله $\{x_n\}\subseteq X$ را در نظر بگیرید. به‌ازای‌هر $n\in\mathbb{N}$ و با استفاده از رابطه (۲) داریم

$$\begin{aligned}
S_b(x_{n+۱},x_{n+۱},x_n) &= S_b(fx_n,fx_n,fx_{n-۱})\\
&\le a[S_b(fx_n,fx_n,x_{n-۱}) + S_b(fx_{n-۱},fx_{n-۱},x_n)]\\
&= a[S_b(fx_n,fx_n,fx_{n-۲}) + S_b(fx_{n-۱},fx_{n-۱},fx_{n-۱})]\\
&\le ab[S_b(fx_n,fx_n,fx_{n-۱}) + S_b(fx_n,fx_n,fx_{n-۱}) + S_b(fx_{n-۲},fx_{n-۲},fx_{n-۱})]\\
&= ۲abS_b(fx_n,fx_n,fx_{n-۱}) + abS_b(fx_{n-۲},fx_{n-۲},fx_{n-۱})\\
&= ۲abS_b(x_{n+۱},x_{n+۱},x_n) + abS_b(x_{n-۱},x_{n-۱},x_n)\\
&= ۲abS_b(x_{n+۱},x_{n+۱},x_n) + abS_b(x_n,x_n,x_{n-۱})
\end{aligned}$$

در نتیجه،

$$(۱_{\mathcal{A}}-۲ab)S_b(x_{n+۱},x_{n+۱},x_n) \le abS_b(x_n,x_n,x_{n-۱})$$

چون $a,b\in\mathcal{A}'_+$ با $\|ab\|<\frac{۱}{۲}$ و $b\ge ۱_{\mathcal{A}}$ است، بنابراین داریم $۱_{\mathcal{A}}-ab\le ۱_{\mathcal{A}}-a$ و $۱_{\mathcal{A}}-۲ab\le ۱_{\mathcal{A}}-a$ و همچنین $(۱_{\mathcal{A}}-۲ab)^{-۱}\in\mathcal{A}'_+$ با $\|(۱_{\mathcal{A}}-۲ab)^{-۱}ab\|<۱$ همراه با لم ۱.۲ مقاله [۱۱] نتیجه می‌دهد.

$$\begin{aligned}
S_b(x_{n+۱},x_{n+۱},x_n) &\le (۱_{\mathcal{A}}-۲ab)^{-۱}abS_b(x_n,x_n,x_{n-۱})\\
&= tS_b(x_n,x_n,x_{n-۱})
\end{aligned}$$

که در آن $t=(۱_{\mathcal{A}}-۲ab)^{-۱}ab$ است. به ازای $n+۱>m$ داریم

$$\begin{aligned}
&S_b(x_{n+۱},x_{n+۱},x_n) \le b[S_b(x_{n+۱},x_{n+۱},x_n) + S_b(x_{n+۱},x_{n+۱},x_n) + S_b(x_m,x_m,x_n)] =\\
&۲bS_b(x_{n+۱},x_{n+۱},x_n) + bS_b(x_n,x_n,x_m) \le\\
&۲bS_b(x_{n+۱},x_{n+۱},x_n) + b[۲S_b(x_n,x_n,x_{n-۱}) + S_b(x_m,x_m,x_{n-۱})] \le\\
&۲bS_b(x_{n+۱},x_{n+۱},x_n) + ۲bS_b(x_n,x_n,x_{n-۱}) + \cdots + ۲bS_b(x_{m+۱},x_{m+۱},x_m) \le\\
&۲b[t^n + t^{n-۱} + \cdots + t^m]S_b(x_۱,x_۱,x_۰) \le ۲\sum_{k=m}^{n} bt^kc =\\
&۲\sum_{k=m}^{n} b^{\frac{۱}{۲}}b^{\frac{۱}{۲}}t^{\frac{k}{۲}}t^{\frac{k}{۲}}c^{\frac{۱}{۲}}c^{\frac{۱}{۲}} =\\
&۲\sum_{k=m}^{n} \left|b^{\frac{۱}{۲}}t^{\frac{k}{۲}}c^{\frac{۱}{۲}}\right|^۲ \le\\
&۲\|c\|\sum_{k=m}^{n}\|b\|\|t\|^k\, ۱_{\mathcal{A}} \le\\
&\frac{۲\|c\|\|b\|\|t\|^{n+۱}}{\|t\|-۱}۱_{\mathcal{A}} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} ۰
\end{aligned}$$

بنابراین $\{x_n\}$ دنباله‌ای کوشی نسبت به $\mathcal{A}$ است. کامل بودن X نتیجه می‌دهد عنصر $x\in X$ وجود دارد به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} fx_{n-۱} = x$. بنابر قسمت (۳) تعریف ۴ و لم ۳.۲ مقاله [۱۱] داریم:

$$\begin{aligned}
&S_b(fx,fx,x) \le b[S_b(fx,fx,fx_n) + S_b(fx,fx,fx_n) + S_b(x,x,fx_n)] =\\
&۲bS_b(fx,fx,fx_n) + bS_b(fx_n,fx_n,x) \le
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&۲b\big[a\big(S_b(fx,fx,x_n)+S_b(fx_n,fx_n,x)\big)\big]+bS_b(x_{n+۱},x_{n+۱},x)=\\
&۲abS_b(fx,fx,x_n)+۲abS_b(fx_n,fx_n,x)+bS_b(x_{n+۱},x_{n+۱},x)\le\\
&۲ab[b(S_b(fx,fx,x)+S_b(fx,fx,x)+S_b(x_n,x_n,x))]+۲abS_b(fx_n,fx_n,x)+bS_b(x_{n+۱},x_{n+۱},x)=\\
&۴ab^۲S_b(fx,fx,x)+۲ab^۲S_b(x_n,x_n,x)+۲abS_b(fx_n,fx_n,x)+bS_b(x_{n+۱},x_{n+۱},x)
\end{aligned}
$$

بنابراین،

$$
(۱_{\mathcal{A}}-۴ab^۲)S_b(fx,fx,x)\le +۲ab^۲S_b(x_n,x_n,x)+۲abS_b(fx_n,fx_n,x)+bS_b(x_{n+۱},x_{n+۱},x)
$$

در نتیجه،

$$
\begin{aligned}
&\|S_b(fx,fx,x)\|\\
&\le \|۲ab^۲(۱_{\mathcal{A}}-۴ab^۲)^{-۱}\|\|S_b(x_n,x_n,x)\|\\
&+\|۲ab(۱_{\mathcal{A}}-۴ab^۲)^{-۱}\|\|S_b(fx_n,fx_n,x)\|\\
&+\|b(۱_{\mathcal{A}}-۴ab^۲)^{-۱}\|\|S_b(x_{n+۱},x_{n+۱},x)\| \xrightarrow[(n\to\infty)]{} ۰
\end{aligned}
$$

در نتیجه، $fx=x$ می‌باشد. یعنی x نقطه ثابت f است. حال فرض کنید $y\neq x$ نقطه ثابت دیگر f باشد. در این‌صورت،

$$
\begin{aligned}
&۰_{\mathcal{A}}\le S_b(x,x,y)=S_b(fx,fx,fy)\le\\
&a[S_b(fx,fx,y)+S_b(fy,fy,x)]\le\\
&a[S_b(x,x,y)+S_b(y,y,x)]
\end{aligned}
$$

در نتیجه،

$$
(۱_{\mathcal{A}}-a)S_b(x,x,y)\le aS_b(y,y,x)
$$

بنابراین،

$$
\begin{aligned}
&S_b(x,x,y)\le a(۱_{\mathcal{A}}-a)^{-۱}S_b(y,y,x)\\
&\le a(۱_{\mathcal{A}}-a)^{-۱}S_b(x,x,y)
\end{aligned}
$$

چون $\|a(۱_{\mathcal{A}}-a)^{-۱}\|<۱$ است.

$$
\begin{aligned}
&۰_{\mathcal{A}}\le\|S_b(x,x,y)\|=\\
&\|S_b(fx,fx,fy)\|\\
&\le\|a(۱_{\mathcal{A}}-a)^{-۱}S_b(x,x,y)\|\\
&\le\|a(۱_{\mathcal{A}}-a)^{-۱}\|\|S_b(x,x,y)\|\\
&<\|S_b(x,x,y)\|
\end{aligned}
$$

در نتیجه $S_b(x,x,y)=۰_{\mathcal{A}}$ است اگر و تنها اگر $x=y$ باشد. بنابراین نقطه ثابت منحصربه‌فرد است.

۴- کاربرد در معادلات عملگری

به‌عنوان کاربردی از قضیه نگاشت انقباضی در فضای S_b-متریک C^*-جبر مقدار، وجود و یکتایی جواب برای یک نوع از معادله عملگری را ارائه می‌دهیم:

مثال۲: فرض کنید H یک فضای هیلبرت و L(H) مجموعه عملگرهای خطی و کراندار روی H باشد. فرض کنید $A_۱,A_۲,\cdots,A_n,\cdots\in L(H)$ باشند که در $\sum_{n=۱}^{\infty}\|A_n\|<۱$ و $Q\in L(H)_+$ صدق کنند. در این‌صورت معادله عملگری $X-\sum_{n=۱}^{\infty}A_n^*XA_n=Q$ دارای جواب منحصربه‌فردی در L(H) خواهد بود.

برهان: قرار دهید $\alpha=(\sum_{n=۱}^{\infty}\|A_n\|)^p$ که در آن $p\ge ۱$ است. در این‌صورت $\|\alpha\|<۱$ است. بدون کم شدن ازکلیت مسئله فرض کنید $\alpha>۰$ باشد. عملگری مثبت مانند $T\in L(H)$ انتخاب کنید. به‌ازای $X,Y\in L(H)$ و $p\ge ۱$ قرار دهید:

$$
S_b(X,Y,Z)=(\|X-Z\|+\|Y-Z\|)^pT
$$

در این‌صورت $S_b(X,Y,Z)$ یک S_b-متریک C^*-جبر مقدار متقارن است و $(L(H),S_b)$ کامل است، چون L(H) یک فضای باناخ است. نگاشت $F:L(H)\to L(H)$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$
F(X)=\sum_{n=۱}^{\infty}A_n^*XA_n+Q
$$

در این‌صورت،

$$S_b\big(F(X),F(X),F(Y)\big)= \\ \big\|۲\big(F(X)-F(Y)\big)\big\|^pT= \\ \|۲\textstyle\sum_{n=۱}^{\infty}A_n^*(X-Y)A_n\|^pT\le \\ \textstyle\sum_{n=۱}^{\infty}\|A_n\|^{۲p}\|۲(X-Y)\|^pT\le \\ \alpha^۲S_b(X,X,Y)= \\ (\alpha I)^*S_b(X,X,Y)(\alpha I)$$

با استفاده از قضیه ۱، نقطه ثابت منحصربه‌فردی در L(H) وجود خواهد داشت. به‌علاوه، چون $\sum_{n=۱}^{\infty}A_n^*XA_n+Q$ یک عملگر مثبت است، لذا جواب یک عملگر هرمیتی خواهد بود.

فهرست منابع

[۱] ناصر غفوری عدل، داود ابراهیمی بقا، محمدصادق عسگری، مهدی آژینی، پایداری معادلات تابعی مرتبه هفتمین در فضای β-گاوسی. مجله پژوهش‌های نوین در ریاضی، سال چهارم، شماره پانزدهم، پاییز ۱۳۹۷.

[2] S. Czerwik. Contraction mappings in b-metric spaces. Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis, 1, 5-11. (1993).

[3] Q. Xia. The geodesic problem in quasimetric spaces. Journal of Geometric Analysis, 19(2), 452-479. (2009).

[4] Z.H. Ma, L.N. Jiang, H.K. Sun. C*-algebra-valued metric spaces and related fixed point theorems. Fixed Point Theory and Applications, 206(2014).

[5] Z. Ma, L. Jiang. C*-Algebra-valued b-metric spaces and related fixed point theorems. Fixed Point Theory and Applications, 222(2015).

[6] S. Sedghi, N. Shobe, A. Aliouche. A generalization of fixed point theorem in S-metric spaces. Matematicki Vesnik, 64, 258-266(2012).

[7] N. Souayah, N. Mlaiki. A fixed point theorem in $\mathbf{S_b}$-metric space. Journal of Mathematics and Computer Science, 16, 131–139(2016).

[8] M.S. Asgari, B. Mousavi, B. Solving class of nonlinear matrix equations via the coupled fixed point theorem. Appl. Math. Comput, 259, 364-373(2015).

[9] N. Ghafoori, D. Ebrahimi Bagha, M.S. Asgari. Coupled fixed points of generalized Kannan contraction and its applications. Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 9(2), 169-178(2018).

[10] S.S. Razavi, H.P. Masiha. C*-algebra-valued S_b-metric spaces and applications to Integral equations, under review

[11] C. Kalaivani, G. Kalpana. Fixed point theorems in C^*-algebra-valued S-metric spaces with some applications. U.P.B. Scientific Bulletin Series A, Vol. 80, Iss. 3 (2018).