Archive of SID

دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و هشتم، بهمن و اسفند ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

تخصیص منابع محدود متمرکز در تحلیل پوششی داده‌ها با داده‌های تصادفی

نجمه ملک محمد *

استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب، تهران، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۳/۱۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۶/۲۶

چکیده

بررسی عملکرد و تخصیص منابع در سازمان‌های بزرگ مانند: بانک‌ها، دانشگاه‌ها و فرودگاه‌ها، یکی از شاخص‌های مهم در علم مدیریت سازمانی می‌باشد. در این مقاله، با کمک تحلیل پوششی داده‌ها که روشی بسیار قوی در ارزیابی کارایی سازمان‌ها است، به تحلیل و بررسی عملکرد و تخصیص منابع می‌پردازیم. تخصیص بهینه‌ی منابع در سازمان‌ها، مهمترین ابزار اجرای استراتژی و برنامه‌ای بلند مدت برای آن‌ها محسوب می‌شود و سیاست‌ها و اهداف برنامه‌ی سازمان‌ها، در تخصیص بهینه‌ی منابع به فعالیت‌ها انعکاس می‌یابد. در واقع، با توجه به اهمیت عملکرد آتی سازمان‌ها، مدیران با در نظر گرفتن کارایی هر واحد، راهبردهایی برای هدف‌گذاری و چگونگی تخصیص منابعی شامل نیروی انسانی، هزینه‌های مالی، امکانات تکنولوژیکی و غیره را ارایه می‌دهند. از طرفی، با توجه به اینکه داده‌های واقعی در سازمان‌ها معمولاً به صورت تصادفی و نامعین می‌باشند، در این مقاله به ارایه روش‌هایی برای تخصیص منابع با داده‌های تصادفی پرداخته می شود. همچنین در راستای این تحقیق به راهبردهایی برای تخصیص منابع و همچنین مواجه شدن با منابع محدود در داده‌های تصادفی خواهیم پرداخت که منجر به ارایه مدلی جدید درتحلیل پوششی داده‌ها خواهد گردید. در این مدل، داده‌های تصادفی به علت احتمالی بودن، با یک توزیع احتمال مناسب عنوان می‌شوند. یکی از دستاوردهای ارزنده در این مقاله، برطرف‌سازی مشکل تخصیص مناسب و بهینه منابع محدود با داده‌های تصادفی می‌باشد. در آخر، با نتایج عددی، مزایای مدل جدید نسبت به مدل‌های پیشین با داده‌های تصادفی نشان داده شده است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، تخصیص منابع، داده‌های تصادفی.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: n_malekmohammadi@azad.ac.ir

www.SID.ir

Archive of SID

۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، روشی ناپارامتری است و با بهره‌گیری از مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی، به سنجش کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده با ورودی‌ها و خروجی‌های مختلف و با مقیاس‌های اندازه‌گیری متفاوت می‌پردازد. برای رفع مشکلات ناشی از استفاده از روش‌های پارامتری، فارل در سال ۱۹۵۷ برای نخستین بار، روش‌های غیر پارامتری را مطرح کرد. او با استفاده از خروجی ورودی‌های واحدهای تصمیم‌گیرنده تابع مرزی را چنان بر مجموعه‌ای از خروجی و ورودی‌ها برازش داد که حاصل آن یک تابع قطعه‌ای خطی شد. فارل با استفاده از مشاهدات و اصول انکار ناپذیر حاکم بر علم مورد نظر، مجموعه‌ای به نام مجموعه امکان تولید ساخت و مرز آن را تابع تولید نامید. هر واحد تصمیم‌گیرنده که روی مرز این مجموعه قرار گیرد کارا است و در غیر این صورت ناکارا تلقی می‌گردد. مقاله فارل مورد توجه کوپر و همکاران [۱] قرار گرفت و آنها در سال ۱۹۷۸، تحلیل اولیه فارل را که در حالت تک خروجی به چند ورودی بوده به حالت چند ورودی به چند خروجی تعمیم دادند. بنابراین، کاربرد تعمیم کار فارل با عنوان تحلیل پوششی داده‌ها و تحت عنوان مقاله CCR در ارزیابی یک مؤسسه آموزشی به چاپ رسید. این مقاله پایه تمام مطالعات بعدی در تحلیل پوششی داده‌ها گردید.

از طرفی، در تمام مراحل زندگی ضرورت هدف گذاری در آینده با توجه به امکانات محیطی و فردی حایز اهمیت می‌باشد، جایی که افراد با توجه به توانایی‌های فردی و اجتماعی خویش در نهایت برای آینده شخصی و سازمانی خود برنامه‌ریزی خواهند کرد. حال اگر با افقی بسیار گسترده تربه موضوع بنگریم ضرورت بررسی عملکرد، هدف گذاری وتخصیص منابع سازمان‌های جامع و بزرگی مانند بانک‌ها، دانشگاه‌ها، مراکز در مانی، بیمه ها و ... حایز اهمیت می‌باشد. جایی که مدیر با در نظر گرفتن کارایی هر واحد تصمیم‌گیرنده برای هدف گذاری و تخصیص منابع در کل سازمان راهبردهایی ارایه می‌دهد. با توجه به اینکه بررسی کارایی و عملکرد کلیه سازمان‌ها نظیر دانشگاه‌ها، بانک‌ها، کلیه شرکت‌های خصوصی و دولتی و غیره دارای اهمیت بسزایی می‌باشد، نتیجه عملکرد آتی سازمان‌ها با توجه به کارایی آنها نیز نظر مدیران را به خود جلب کرده است. جایی که در آن مدیران تصمیم خواهند گرفت که با توجه به کارایی واحدهای سازمان تحت ارزیابی چگونه منابعی شامل نیروی انسانی، هزینه های مالی، امکانات تکنولوژیکی و ... را تخصیص دهند. مسأله‌ی تخصیص منابع، ارزش کاربردی- عملی فراوانی دارد و به چگونگی ارزیابی واحدهای درگیر در تخصیص و تعیین وزن‌های تخصیص می‌پردازد. محدودیت عمده‌ی یک مدل تحلیل پوششی داده‌های مرسوم، در تخصیص منابع این است که هر بار یک واحد را به طور مستقل تحلیل می‌کند. با این وصف، شرایطی وجود دارد که همه‌ی واحدهای تصمیم‌گیرنده زیر چتر یک مدیر مرکزی هستند که به همه‌ی آن‌ها نظارت می‌کند. این نوع وضعیت وقتی حادث می‌شود که تمام واحدها به یک سازمان یکسان تعلق دارند که منابع لازم برای به دست آوردن ورودی‌های واحدهای تصمیم‌گیرنده را برای آن‌ها فراهم می‌کند. مدیر مرکزی در حالی که روی کارایی واحدها متمرکز است، مصرف کلی ورودی‌های مختلف آن‌ها و تولید کلی خروجی‌های آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهد. در نتیجه، هنگام اجرای تحلیل تخصیص منابع، واحدها را با هم روی مرز کارا تصویر می‌کند برخلاف تحلیل پوششی داده‌های مرسوم که هر واحد را به طور جداگانه روی مرز کارا تصویر می‌نماید. این روش، تخصیص منابع متمرکز نامیده می‌شود. در شرایط فقدان آزادی واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ی موجود، تصویر جداگانه روی مرز کارا با مدل‌های متداول تحلیل پوششی داده‌ها، حداقل‌سازی کلی مصرف ورودی، که می‌تواند یکی از اهداف مدیر باشد را تضمین نمی‌کند. تحقیقات فراوانی به منظور هدف‌گذاری و تخصیص منابع انجام شده است که ارجحیت مدیر را در فرآیندهای تعیین هدف، در بر می‌گیرند. برای مثال، تاناسولیس و دایسون [۲]، لوزانو و ویلا [۳]، ملک محمدی و همکاران [۴] و [۵]، گلانی [۶] و کرهنن و سیرجن [۷] نمونه هایی از چنین تحقیقاتی هستند. در مدل‌های مرسوم تحلیل پوششی داده‌ها، داده‌ها به صورت دقیق فرض شده است، با توجه به اهمیت و ضرورت داده‌های تصادفی، حال اگر این داده‌ها

www.SID.ir

Archive of SID

در نظر گرفته شود، نمره کارایی مناسب و دقیقی به دست نخواهد آمد. بنابراین، مدل‌هایی ارایه شده است که در آن‌ها ورودی‌ها و خروجی‌ها به صورت تصادفی فرض شده‌اند که با توجه به روش‌هایی که برای بررسی داده‌های تصادفی و در نهایت تبدیل مدل غیرخطی به یک مدل خطی ارایه گردیده، نمره کارایی دقیق‌تری به دست می‌آید. می‌توان به مقاله‌های کوپر و همکاران [۸] و [۹] و خدابخشی و همکاران [۱۰-۱۴] و [۷] اشاره نمود.

حسین زاده و همکاران [۱۵] مدلی برای تخصیص منابع متمرکز تصادفی، به منظور اختصاص منابع متمرکز که در آن، ورودی‌ها و خروجی‌ها تصادفی هستند، معرفی کردند. مدل آنها به بررسی زمانی نپرداخته که مدیر با منابع محدود در کل ورودی یا خروجی مواجه می‌شود، به این معنی که اهداف از مدل‌های آنها می‌توانند بیشتر یا کمتر از منابع موجود در سازمان باشد. در این مقاله، مدل آنها با مدل جدید متمرکز با داده‌های تصادفی بهبود می‌یابد که به ویژه برای منابع محدود در ورودی‌ها / خروجی‌ها پیشنهاد می شود که این مدل منجر به توسعه مدل ملک محمدی و همکاران [۴] با داده های تصادفی می‌شود.

در بخش دوم این مقاله، به بیان مفاهیم و مدل پایه‌ای تحلیل پوششی داده‌های متمرکز پرداخته می شود. در بخش سوم، تخصیص منابع متمرکز با داده‌های تصادفی مورد مطالعه قرار گرفته و به منظور مواجه با منابع محدود در ورودی‌ها و خروجی‌های کل در حالت تصادفی و همچنین دستیابی به اهداف واقعی و مدنظر مدیر، مدل جدیدی مطرح شده است. در آخر، نتایج حاصل از به کارگیری داده‌های تصادفی در مدل پیشنهادی و مدل پیشین ارایه گردیده است.

۲- تحلیل پوششی داده‌های متمرکز

مسأله‌ی تخصیص منابع، ارزش کاربردی عملی فراوانی دارد و به چگونگی ارزیابی واحدهای درگیر در تخصیص و تعیین وزن‌های تخصیص می‌پردازد. محدودیت عمده‌ی یک مدل تحلیل پوششی داده‌های مرسوم، در تخصیص منابع این است که هر بار یک واحد را به طور مستقل تحلیل می‌کند. با این وصف، شرایطی وجود دارد که همه‌ی واحدهای تصمیم‌گیرنده زیر چتر یک مدیر مرکزی[1] هستند که به همه‌ی آن‌ها نظارت می‌کند. این نوع وضعیت، وقتی حادث می‌شود که تمام واحدها به یک سازمان یکسان تعلق دارند که منابع لازم برای به دست آوردن ورودی‌های واحدهای تصمیم‌گیرنده را برای آن‌ها فراهم می‌کند. مدیر مرکزی در حالی که روی کارایی واحدها متمرکز است، مصرف کلی ورودی‌های مختلف آن‌ها و تولید کلی خروجی‌های آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهد. در نتیجه، هنگام اجرای تحلیل تخصیص منابع، واحدها را با هم روی مرز کارا تصویر کند. برخلاف تحلیل پوششی داده‌های مرسوم که هر واحد را به طور جداگانه روی مرز کارا تصویر می‌نماید. این روش، تخصیص منابع متمرکز نامیده می‌شود. در شرایط فقدان آزادی واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ی موجود، تصویر جداگانه روی مرز کارا با مدل‌های متداول تحلیل پوششی داده‌ها، حداقل‌سازی کلی مصرف ورودی، که می‌تواند یکی از اهداف مدیر باشد را تضمین نمی‌کند.

در این بخش به مدل مرسوم تخصیص منابع متمرکز که توسط لوزانو و ویلا [۳] معرفی شده از دیدگاه ورودی‌محور و با فرض بازده به مقیاس متغیر ارایه شده است که عدم کاهش تولید خروجی کل، تضمین می‌شود. این مدل در دو فاز ارایه گردیده، فاز I، به دنبال کاهش متناسب در امتداد تمام ابعاد ورودی است در حالی که در فاز II، کاهش بیشتر هر ورودی و یا انبساط بیشتر هر خروجی دنبال می‌شود. فرض کنید $j,r = 1,\dots,n$ اندیس‌های واحدهای تصمیم‌گیرنده، $i = 1,\dots,m$ اندیس ورودی‌ها و $k = 1,\dots,p$ اندیس خروجی‌ها باشند؛ θ انقباض شعاعی بردار ورودی کل، s_i متغیر کمکی در امتداد بعد ورودی i و s_k افزایش بیشتر در امتداد بعد خروجی k را نشان دهند و $(\lambda_{1r},\dots,\lambda_{nr})$ بردار متعلق به تصویر واحد تصمیم‌گیرنده‌ی r باشد. مدل فاز I به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&Min\ \theta \\
&s.t. \quad \sum_{r=1}^{n} \quad \sum_{j=1}^{n} \quad \lambda_{jr} x_{ij} \leq \\
&\theta \sum_{j=1}^{n} \quad x_{ij}, \qquad i \in I,
\end{aligned}
$$

1. Centralized DM

www.SID.ir

Archive of SID

$$\begin{aligned} &\sum_{r=1}^{n} \quad \sum_{j=1}^{n} \quad \lambda_{jr} y_{kj} \geq \\ &\sum_{r=1}^{n} \quad y_{kr}, \qquad k \in O, \\ &\sum_{j=1}^{n} \quad \lambda_{jr} = 1, \quad \forall r \\ &\lambda_{jr} \geq 0, \quad \forall j, r, \quad \theta \quad free \end{aligned} \qquad (۱)$$

مدل (۱) یک مدل برنامه‌ریزی خطی با n^2+1 متغیر و $m+p+n$ محدودیت است. فرض کنید θ^*، مقدار بهین این مدل باشد، آنگاه مدل فاز II، بردار متناظر $\left(\lambda^*_{1r},...,\lambda^*_{nr}\right)$، برای هر واحد تصمیم‌گیرنده‌ی r، نقطه‌ی عملیاتی که باید مورد هدف قرار دهد را تعریف می‌کند. ورودی‌ها و خروجی‌های هر یک از چنین نقاطی، می‌توانند به صورت زیر محاسبه شوند:

$$\hat{x}_{ir} = \sum_{j=1}^{n} \lambda^*_{jr} x_{ij}, \quad \forall i,$$

$$\hat{y}_{kr} = \sum_{j=1}^{n} \lambda^*_{jr} y_{kj}, \quad \forall k,$$

مدل فاز II به صورت زیر ارایه می شود:

$$\begin{aligned} &Max \ \sum_{k\in 0} \quad t_k + \sum_{i\in I} \quad s_i \\ &s.t. \sum_{r=1}^{n} \quad \sum_{j=1}^{n} \quad \lambda_{jr} x_{ij} = \\ &\theta^* \sum_{j=1}^{n} \quad x_{ij} - s_i, \qquad i \in I, \\ &\sum_{r=1}^{n} \quad \sum_{j=1}^{n} \quad \lambda_{jr} y_{kj} = \\ &\sum_{r=1}^{n} \quad y_{kr} + t_k, \qquad k \in O, \\ &\sum_{j=1}^{n} \quad \lambda_{jr} = 1, \quad \forall r \end{aligned} \qquad (۲)$$

قضیه۱. برای هر واحد تصمیم‌گیرنده‌ی r، نقطه‌ی عملیاتی که توسط مدل شعاعی ورودی‌محور فاز II، تصویرمی‌شود

$\left(\hat{x}_{1r},\hat{x}_{2r},...,\hat{x}_{mr},\hat{y}_{1r},\hat{y}_{2r},...,\hat{y}_{pr}\right)$، کارای پاراتو است.

برهان. رجوع شود به [۳] .

بنابراین مدل شعاعی مذکور، به طور مشترک هریک از واحدهای تصمیم‌گیرنده را روی مرز کارایی پاراتو، تصویر می‌کند. این حقیقت، در مقایسه با تصویر جداگانه‌ی مرسوم هر واحد روی مرز کارا مطرح می‌شود. اگر چه این رخداد کاملاً محتمل است، نمی‌توان اثبات کرد که به ازای هر ورودی، مصرف کل حاصل از جواب مدل فاز II لزوماً کمتر از مجموع سطوح ورودی واحدهای تصویر شده‌ای است که به صورت مستقل ورودی‌محور هستند. از آنجا که هر واحد تصمیم‌گیرنده روی یک نقطه‌ی کارای پاراتو تصویر می‌شود، ممکن است تصویر شدن یک واحد تصمیم‌گیرنده‌ی موجود که به طور تکنیکی کاراست، روی خودش منطقی به نظر برسد این اتفاق زمانی که هر واحد به طور جداگانه تصویر می‌شود موجه است ولی هنگامی که از یک روش متمرکز استفاده می‌شود، خیر. زیرا ممکن است برای مدیر مرکزی مناسب باشد که یک واحد تصمیم‌گیرنده‌ی کارای تکنیکی روی نقطه‌ی دیگری روی مرز کارا تصویر شود. البته هزینه‌های ممکن چنین تغییری در نظر گرفته نشده است. بنابراین، واضح است که یک روش تخصیص منابع متمرکز، به معنی پیروی رفتار انفرادی واحدها از اهداف سیستم به صورت کامل است. به همین دلیل، ارائه واحدهای عملیاتی به عنوان واحدهای تصمیم‌گیرنده، کار مناسبی نیست زیرا آن‌ها در واقع آزادی خود در انتخاب ورودی‌ها و خروجی‌های خودشان را از دست داده‌اند. تنها مدیر واقعی، برنامه‌ریز مرکزی است.

۳- تخصیص منابع متمرکز با داده‌های تصادفی

در مدل تخصیص منابع متمرکز با داده‌های تصادفی که توسط حسین زاده و همکاران [۱۵] ارایه شد، ورودی تصادفی کل، کاهش می‌یابد. این مدل برای شرایطی که مدیر با منابع محدود در ورودی‌های کل یا خروجی‌های کل مواجه است طرح‌ریزی نشده است زیرا در چنین موقعیتی ممکن است اهداف مدل‌ها به ترتیب بیشتر یا کمتر از مقادیر واقعی و قابل دسترس داده‌ها در سازمان باشند. به طور مثال، فرض کنید هدف مدنظر مدیر در یک سازمان استفاده از حدود ۱۶۳۴ نفر پرسنل باشد، اما محاسبات و بررسی‌های انجام گرفته نشان دهد برای راه‌اندازی سازمان به حداقل ۱۷۰۰ نفر نیاز است. به عبارتی، علی‌رغم مطلوب بودن کاهش کل ورودی‌ها، این کاهش باید به‌گونه‌ای صورت پذیرد که امکان راه‌اندازی سازمان وجود داشته باشد. همچنین در خروجی‌ها، هدف مدنظر مدیر می‌تواند افزایش سود باشد، اما طبق بررسی‌ها و محاسبات انجام شده مقدار سود نباید به

www.SID.ir

Archive of SID

قدری زیاد باشد که دسترسی به آن تقریباً غیرممکن گردد. با توجه به این موضوع، در این بخش مدل جدیدی را معرفی می‌کنیم که کاهش کل ورودی‌ها و همچنین افزایش کل خروجی‌های آن در راستای مطلوبیت سازمان و مدیر می‌باشد.

فرض کنید مجموعه اندیس ورودی‌ها $I=\{1,...,m\}$، و مجموعه اندیس خروجی‌ها $O=\{1,...,s\}$، زیرمجموعه‌هایی از آن‌ها به صورت $I \equiv I_f \cup \bar{I}_f$ و $O \equiv O_f \cup \bar{O}_f$ مشخص می‌گردند که در آن‌ها I_f و O_f برای ورودی‌ها و خروجی‌هایی که منابع محدود دارند، به کار برده می‌شوند. بردار $(\lambda_{1r}, \lambda_{2r}, ..., \lambda_{nr})$، به طوری‌که $\sum \lambda_{jr}=1$، برای ترکیب محدب میان ورودی‌ها یا خروجی‌های n واحد تصمیم‌گیرنده وضع می‌گردد. برای تعریف مدل جدید با داده‌های تصادفی، قیود احتمالی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \textstyle\sum_{k\epsilon O} w_k^{+} Z_k - \sum_{k\epsilon O} w_i^{-} \theta_i \\
&s.t. \quad P\{\textstyle\sum_{r=1}^{n} \quad \sum_{j=1}^{n} \quad \lambda_{jr}\, \widehat{x}_{ij} \leq \\
&\theta_i \textstyle\sum_{j=1}^{n} \quad \widehat{x}_{ij}\} \geq 1-\alpha, \quad i \in I, \\
&\quad P\{\textstyle\sum_{r=1}^{n} \quad \sum_{j=1}^{n} \quad \lambda_{jr}\, \widehat{y}_{kj} \geq \\
&Z_k \textstyle\sum_{r=1}^{n} \quad \widehat{y}_{kr}\} \geq 1-\alpha, \quad k \in O, \qquad (۳) \\
&P\{\textstyle\sum_{j=1}^{n} \quad \theta_i\, \widehat{x}_{ij} \geq G_i\} \geq 1-\alpha, \quad i \in I_f, \\
&P\{\textstyle\sum_{r=1}^{n} \quad Z_k\, \widehat{y}_{kr} \leq G_k\} \geq 1- \\
&\alpha, \qquad k \in O_f, \\
&\textstyle\sum_{j=1}^{n} \quad \lambda_{jr}=1, \quad \forall r \\
&\lambda_{jr} \geq 0, \quad \forall j,r, \quad \theta_i \\
&free, \ \forall i, \ Z_k \quad free, \ \forall k
\end{aligned}
$$

که ورودی‌ها و خروجی‌های تصادفی به صورت زیر است

$$\widehat{y}_j = (\widehat{y}_{1j}, \dots, \widehat{y}_{sj})^T$$
$$\widehat{x}_j = (\widehat{x}_{1j}, \dots, \widehat{x}_{mj})^T$$

در مدل فوق منظور از P، همان احتمال است و α، همان سطح خطا می‌باشد. G_i و G_k' به ترتیب کران‌های مربوط به مصرف کل ورودی‌ها و تولید کل خروجی‌ها را نشان می‌دهند. θ_i، بهترین نرخ انقباض ورودی i و Z_k، بهترین میزان انبساط خروجی k هستند. w_i^{-} و w_k^{+} مقادیر ثابت تعیین شده توسط کاربر هستند که ارجحیت مدیر در بهبود مؤلفه‌های ورودی / خروجی را منعکس می‌کنند. قیود ورودی در مدل (۳)، با اضافه کردن $\varepsilon_i \geq 0$، به شکل تساوی تبدیل می‌شوند:

$$P\left\{\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}\widehat{x}_{ij} \leq \theta_i \sum_{j=1}^{n}\widehat{x}_{ij}\right\} = 1-\alpha+\varepsilon_i, \quad i \in I$$

کاملاً واضح است که $s_i^{-} \geq 0$ وجود دارد به طوری که:

$$P\left\{\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}\widehat{x}_{ij} \leq \theta_i \sum_{j=1}^{n}\widehat{x}_{ij} - s_i^{-}\right\} = 1-\alpha, \quad i \in I$$

از آنجایی که متغیر تصادفی

$$\textstyle\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}\widehat{x}_{ij} - \theta_i \sum_{j=1}^{n}\widehat{x}_{ij}$$

دارای توزیع نرمال است، عبارت بالا با بکارگیری توزیع نرمال استاندارد، به عبارت قطعی زیر تبدیل می‌شود:

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}x_{ij} + s_i^{-} - \varphi^{-1}(\alpha)\sigma_i^{1}(\lambda,\theta_i) = \theta_i \sum_{j=1}^{n}x_{ij}, \quad i \in I$$

که در آن

$$\sigma_i^{1}(\lambda,\theta_i)^2 = \sum_{r=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left(\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{lr}\right]\operatorname{cov}(\tilde{x}_{ij},\tilde{x}_{il})\right) +$$
$$\theta_i^2 \sum_{r=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\operatorname{cov}(\tilde{x}_{ij},\tilde{x}_{il}) - 2\theta_i \sum_{r=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}\operatorname{cov}(\tilde{x}_{ij},\tilde{x}_{il})$$

ϕ، همان تابع توزیع نرمال تجمعی می‌باشد. دیگر قیود احتمالی از مدل (۳) را می‌توان مشابه قیود ورودی، به یک فرم قطعی تبدیل نمود. بنابراین داریم:

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}y_{kj} - s_k^{+} + \varphi^{-1}(\alpha)\sigma_k^{0}(\lambda,Z_k) = Z_k \sum_{r=1}^{n}y_{kr}, \quad k \in O$$

$$\sum_{r=1}^{n}Z_k y_{kr} + f_k^{+} - \varphi^{-1}(\alpha)\sigma_i^{0*}(Z_k) = G_k^{'}, \quad k \in O$$

به طوری که:

www.SID.ir

Archive of SID

$$\sigma_k^0(\lambda,Z_k)^2=\sum_{r=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left(\left[\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{lr}\right]\operatorname{cov}(\tilde{y}_{kj},\tilde{y}_{kl})\right)+$$

$$Z_k^2\sum_{r=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\operatorname{cov}(\tilde{y}_{kj},\tilde{y}_{kl})-2Z_k\sum_{r=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}\operatorname{cov}(\tilde{y}_{kj},\tilde{y}_{kl})$$

$$(\sigma_i^{1*})^2=\operatorname{var}\left\{\sum_{j=1}^{n}\theta_i\tilde{x}_{ij}-G_i\right\}\ ,i\in I$$

$$(\sigma_k^{0*})^2=\operatorname{var}\left\{\sum_{r=1}^{n}Z_k\tilde{y}_{kr}-G_k^{'}\right\}\ ,k\in O$$

فرم قطعی مدل (۳)، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
&Max\ \ \textstyle\sum_{k\epsilon O}w_k^+Z_k-\sum_{k\epsilon O}w_i^-\theta_i\\
&s.t.\ \ \textstyle\sum_{r=1}^{n}\ \ \sum_{j=1}^{n}\ \ \lambda_{jr}x_{ij}+s_i^-=\\
&\varphi^{-1}(\alpha)\sigma_i^1(\lambda,\theta_i)=\\
&\theta_i\textstyle\sum_{j=1}^{n}\ \ x_{ij},\ \ i\in I\\
&\textstyle\sum_{r=1}^{n}\ \ \sum_{j=1}^{n}\ \ \lambda_{jr}y_{kj}-s_k^+=\\
&\varphi^{-1}(\alpha)\sigma_k^0(\lambda,Z_k)=\\
&Z_k\textstyle\sum_{r=1}^{n}\ \ y_{kr},\ \ k\in O\\
&\textstyle\sum_{j=1}^{n}\ \ \theta_i x_{ij}-f_i^-+\\
&\varphi^{-1}(\alpha)\sigma_i^{1*}(\theta_i)=G_i,\ \ i\in I\\
&\textstyle\sum_{r=1}^{n}\ \ Z_k y_{kr}+f_k^+-\\
&\varphi^{-1}(\alpha)\sigma_i^{0*}(Z_k)=G_k^{'},\ \ k\in O\\
&\textstyle\sum_{j=1}^{n}\ \ \lambda_{jr}=1,\ \ \forall r\\
&\lambda_{jr}\geq 0,\ \ \forall j,r,\ \ \theta_i\ \ free,\ \forall i,\ Z_k\\
&free,\ \forall k
\end{aligned}\qquad (۴)$$

قضیه ۲. به ازای هر DMU_j و DMU_r، تحت $-\alpha$ سطح مفروض، نقاط $\forall i=1,\ldots,m,\ x_{ij}^*(\alpha)=\sum_{j=1}^{n}\theta_i^*x_{ij}$

و $\forall k=1,\ldots,s,\ y_{kr}^*(\alpha)=\sum_{k=1}^{n}Z_k^*y_{kr}$

حاصل از مدل (۳)، به ترتیب بیشترین مقدار کاهش مصرف ورودی کل به‌ازای ورودی i و بیشترین مقدار افزایش در تولید خروجی کل برای خروجی k را نشان می‌دهند.

برهان. فرض کنید این قضیه برقرار نبوده و غلط باشد. اگر $\left(x_{11}^*(\alpha),x_{12}^*(\alpha),\ldots,x_{mn}^*(\alpha)\right)$ کمترین میزان مصرف ورودی کل نباشد، آنگاه $\hat{x}_{ij}$ به‌ازای $(i=1,\ldots m)$ و $(j=1,\ldots,n)$ و θ_i، به‌ازای $(i=1,\ldots m)$ وجود دارند به طوری که $\hat{x}_{ij}(\alpha)=\sum_{j=1}^{n}\left(\hat{\theta}_i\right)\hat{x}_{ij}\leq\sum_{j=1}^{n}\theta_i^*\,\mathrm{x}_{ij}=\mathrm{x}_{ij}^*(\alpha)$ و حداقل به ازای یک ورودی i' این نامساوی، به صورت اکید برقرار است. فرض کنید برای ورودی i' داریم:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\hat{\theta}_{i'}\right)\hat{x}_{i'j}<\sum_{j=1}^{n}\left(\theta_{i'}^*\right)x_{i'j}\Rightarrow\left(\hat{\theta}_{i'}\right)<\left(\theta_{i'}^*\right)$$

که یک تناقض است زیرا با حل مدل (۳) به جواب شدنی دیگری با مقداری کمتر برای θ_i، $i=1,\ldots,m$ می‌رسیم. مشابه همین روند اثبات را می‌توان برای خروجی $\left(y_{kr}^*\right)$ نیز به کار برد.

۴- نتایج عددی

در این بخش کاربرد مدل (۳) با مثال توضیح داده خواهد شد. جدول (۱)، مجموعه داده‌هایی را نشان می‌دهد که در مقاله‌ی حسین زاده و همکاران [۱۵] مورد استفاده قرار گرفته است. ۵ کارخانه‌ی تولید اتومبیل (واحدهای تصمیم‌گیرنده) با دو ورودی و دو خروجی را در نظر بگیرید. و فرض کنید تمام واحدهای تصمیم‌گیرنده، تحت کنترل یک مدیر مرکزی (CDM) هستند که ناظر بر همه‌ی آن‌هاست. ارجحیت مدیر مرکزی، کاهش مصرف ورودی کل و افزایش تولید خروجی کل است.

خروجی‌ها، قیمت قطعات و میزان قطعات تولید شده هستند و ورودی‌ها شامل قیمت‌های حاشیه‌ای[1] و مخارج نگهداری از ماشین‌آلات می‌باشند.

لازم به ذکر است که داده‌های ورودی و خروجی به صورت تصادفی هستند و واحد قیمت به دلار محاسبه گردیده است.

1. Marginal Prices

www.SID.ir

Archive of SID

جدول۱. داده‌های ورودی و خروجی برای ۵ واحد تصمیم گیرنده

DMU	خروجی دوم	خروجی اول	ورودی دوم	ورودی اول
۱	$N(۱۸۷۸۹, ۹۴۱)$	$N(۱۴۹ / ۸۵, ۲۲ / ۰۳)$	$N(۹ / ۱۱, ۰ / ۰۲)$	$N(۱۸۷۸۹, ۹۴۱)$
۲	$N(۴۴۳۰۴, ۲۵۳۰)$	$N(۵۰ / ۷۷, ۸ / ۹۵)$	$N(۱۰ / ۵۹, ۰ / ۷۳)$	$N(۴۴۳۰۴, ۲۵۳۰)$
۳	$N(۱۹۷۲۹, ۱۶۶۳)$	$N(۲۵۹ / ۹۱, ۵۴ / ۴)$	$N(۶ / ۷۱, ۰ / ۹۳)$	$N(۱۹۷۲۹, ۱۶۶۳)$
۴	$N(۱۷۴۳۵, ۱۱۰۶)$	$N(۱۳۷ / ۵۱, ۱۴ / ۷۲)$	$N(۱۱ / ۹۱, ۰ / ۵۵)$	$N(۱۷۴۳۵, ۱۱۰۶)$
۵	$N(۱۰۳۷۹, ۴۵۹)$	$N(۹۵ / ۹, ۵ / ۰۲)$	$N(۷ / ۰۲, ۰ / ۱۵)$	$N(۱۰۳۷۹, ۴۵۹)$

جدول ۲. داده‌های ورودیی وخروجی کل برای ۵ واحد تصمیم گیرنده با $\alpha = ۰/۱$

DMU	هدف	هدف	هدف	هدف
	خروجی دوم	ورودی اول	ورودی دوم	خروجی اول
۱	۷۴/۹۳۵۲۷	۱۷۸۲۱/۱۰	۷/۳۴۱۱۲۵	۲۴۷/۸۳۹۵
۲	۱۱۰/۴۸۴۲	۴۲۰۲۱/۷۱	۸/۵۳۳۷۵۶	۸۳/۹۶۹۳۹
۳	۱۶۳/۲۲۵۹	۱۸۷۱۲/۶۷	۵/۴۰۷۱۳۰	۴۲۹/۸۶۹۷
۴	۶۷/۹۴۰۳۱	۱۶۵۳۶/۸۵	۹/۵۹۷۴۵۴	۲۲۷/۴۳۰۲
۵	۴۷/۷۸۶۳۴	۹۸۴۴/۳۳۳	۵/۶۵۶۹۳۸	۱۵۸/۶۱۰۷
مجموع فعلی	۳۰۷/۳۷۰۰	۱۱۰۶۳۶/۰	۴۵/۳۴۰۰۰	۶۹۳/۹۴۰۰
مجموع روش قبلی	۴۵۵/۶۳۱۶	۱۵۸۱۷۷/۲	۴۲/۹۴۹۱۸	۷۹۲/۹۱۵۰
مجموع روش جدید	۴۶۴/۳۷۲۱	۱۱۴۷/۷۱۹	۳۶/۵۳۶۴۰	۱۰۴۹۳۶/۷

فرض کنید مدیر مرکزی قصد کاهش قیمت‌های حاشیه‌ای کل تا ۵۰۰ هزار دلار و کاهش کل مخارج نگهداری از ماشین‌آلات تا ۲۰ هزار دلار را داشته باشد و همچنین بخواهد کل قیمت قطعات را تا ۱۵۰۰ هزار دلار و میزان کل قطعات تولید شده را تا ۵۰۰ هزار دلار افزایش دهد، در غیر این صورت مدیر قادر به راه‌اندازی کارخانه‌ی تولید اتومبیل (واحدهای تصمیم‌گیرنده) نخواهد بود.

جدول‌های (۲) و (۳) نتایج حاصل از مدل (۴) را نشان می‌دهد که به ترتیب به ازای $\alpha = ۰/۱$ و $\alpha = ۰/۵$ با کمک نرم‌افزار لینگو[1] محاسبه گردیده است. به‌علاوه سطرهای انتهایی این دو جدول، مقایسه‌ی نتایج به دست آمده از مدل (۴) (روش جدید)، با مدل حسین زاده و همکاران [۱۵] (روش قبلی) را نمایش می‌دهند. مدل (۴)، برای دستیابی به اهداف انتخاب شده است، زیرا با آن می‌توان هدف بهینه را تعریف کرد (قضیه۲).

جدول ۳. داده‌های ورودیی وخروجی کل برای ۵ واحد تصمیم گیرنده با $\alpha = ۰/۵$

DMU	هدف	هدف	هدف	هدف
	خروجی دوم	خروجی اول	ورودی دوم	ورودی اول
۱	۸۰/۶۸۴۵۲	۲۴۷/۸۳۹۵	۶/۷۴۱۰۷۹	۱۶۷۵۲/۶۰
۲	۱۱۸/۹۶۰۹	۹۵/۰۷۷۶۱	۷/۸۳۶۲۲۶	۳۹۵۰۲/۲۲
۳	۱۷۵/۷۴۹۱	۴۸۶/۷۳۶۷	۴/۹۶۵۱۶۳	۱۷۵۹۰/۷۲
۴	۷۳/۱۵۲۸۸	۲۵۷/۵۱۶۷	۸/۸۱۲۹۸۰	۱۵۵۴۵/۳۵
۵	۵۱/۴۵۲۶۵	۱۷۹/۵۹۳۱	۵/۱۹۴۵۵۲	۹۲۵۴/۰۹۹
مجموع فعلی	۳۰۷/۳۷۰۰	۶۹۳/۹۴۰۰	۴۵/۳۴۰۰۰	۱۱۰۶۳۶/۰
مجموع روش قبلی	۴۳۹/۱۱۰۶	۶۹۳/۹۴۰۰	۴۴/۷۸۵۳۸	۱۶۹۸۰۷/۲
مجموع روش جدید	۵۰۰/۰۰۰۰	۱۲۹۹/۵۵۰	۳۳/۵۵۰۰۰	۹۸۶۴۵/۰۰

www.SID.ir

Archive of SID

لازم به ذکر است که اهداف مدنظر مدیر در مدل مدل حسین‌زاده و همکاران [۵]، به صورت $\forall i=1,...,m,\ x_{ir}^{*}(\alpha)=\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{jr}^{*})x_{ij}$ و $\forall k=1,...,s,\ y_{kr}^{*}(\alpha)=\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{jr}^{*})y_{kj}$ در نظر گرفته شده است. در مدل(۴)، مقادیر ثابت w_k^+ و w_i^- به‌ازای تمام ورودی‌ها و خروجی‌ها، برابر با ۱ انتخاب شده‌اند.

براساس نتایج مدل (۴)، رویکرد جدید در تولید کل نسبت به روش قبلی بیشتر است. این نتیجه می‌تواند مزایای بیشتر مدل (۴) را نسبت به مدل‌های قبلی با داده‌های تصادفی مورد توجه قرار دهد، از آنجایی که مدل جدید غیر شعاعی است و با استفاده از آن ارجحیت مدیر در فرایند هدف گذاری قرار می‌گیرد. با توجه به مدل لوزانو و ویلا [۳] اگر CDM بخواهد افزایش بیشتری در مجموع خروجی داشته باشد، مدل پیشنهادی در [۱۵] باید در دو مرحله حل شود، در صورتی که مدل (۴) تنها در یک مرحله انجام می‌شود.

۵- نتیجه‌گیری

این مقاله یک مدل متمرکز جدید ارایه می دهد که برای بررسی داده‌های تصادفی مناسب‌تر است. تفاوت اصلی بین رویکرد جدید و مدل های قبلی معرفی شده تحلیل پوششی داده ها با داده‌های تصادفی این است که ارجحیت مدیر مرکزی در روند تنظیم هدف گذاری دخیل بوده که منجر به اهداف معقول می شود. با نتایج عددی، مدل پیشنهادی در بررسی تخصیص منابع در کارخانه خودرو اعمال می شود و هدف گذاری در میان مقادیر مختلف آلفا مورد توجه قرار گرفته‌اند. شایان ذکر است که نتایج مدل جدید منجر به هدف مطلوب بیش از رویکرد قبلی شده و همچنین افزایش تولید کل را شامل می شود. به عنوان تحقیق آینده، می توان مدل های متمرکز تحلیل پوششی داده‌ها با داده‌های تصادفی با برنامه ریزی خطی چند هدفه و روش‌های گرادیانی در بهینه‌سازی بهبود و گسترش داد.

تشکر و قدردانی

نویسنده (نجم ملک محمدی) از دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب برای حمایت مالی در پروژه تحقیقاتی به نام، ارزیابی عملکرد و تخصیص منابع در تحلیل پوششی داده‌ها با داده‌های تصادفی، کمال تشکر و قدردانی را دارد.

www.SID.ir

Archive of SID

فهرست منابع

[1] Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E.L., "Measuring the efficiency of decision making units", Eur. J. Oper. Res. 2(1978) 429-444.

[2] Thanassoulis, E., Dyson, R.G., "Estimating preferred target input-output levels using data envelopment analysis", Eur. J. Oper. Res. 56(1992)80-97.

[3] Lozano, S., Villa, G., Centralized resource allocation using data envelopment analysis, J. Prod. Anal. 22(2004)143-161.

[4] Malekmohammadi, N., Hosseinzadeh Lotfi, F., Jaafar, A.B, Data envelopment scenario analysis with imprecise data, Central Eur. J. Oper. Res. 19(2011) 65-79.

[5] Malekmohammadi, N., Hosseinzadeh Lotfi, F., Jaafar, A.B, "Target setting in data envelopment analysis using MOLP", Appl. Math. Modeling, 35(2011)328-338.

[6] Golany, B., An interactive MOLP procedure for the extension of DEA to effectiveness analysis, J. Oper. Res. Soci. 39(1988)725-734.

[7] Korhonen, P., Syrjnen, M, Resource allocation based on efficiency analysis, Manage. Sci. 50(2004)1134-1144.

[8] Cooper, W.W., Huang, Z., Li S., Satisfying DEA models under chance constraints, Ann. Oper. Res. 66 (1996) 279-295.

[9] Cooper, W.W., Deng H., Huang, Zhimin., Li, Sus X., Chance constrained programming approaches to congestion in stochastic data envelopment analysis, Eur. J. Oper. Res. 155 (2004) 487-501.

[10] Khodabakhshi, M. Chance constrained additive input relaxation model in stochastic data envelopment analysis, Int. J. Inf. Syst. Sci. 6 (2010) 99-112.

[11] Khodabakhshi, M. Asgharian, M. Gregoriou Greg N., An input-oriented super-efficiency measure in stochastic data envelopment analysis: evaluating chief executive officers of US public banks and thrifts, Expert Syst. Appl. 37 (2010) 2092-2097.

[12] Khodabakhshi, M. Super-efficiency in stochastic data envelopment analysis: an input relaxation approach, J. Comput. Appl. Math. 235 (2011) 4576-4588.

[13] Khodabakhshi, M. Gholami, Y. Kheirollahi, H. An additive model approach for estimating returns to scale in imprecise data envelopment analysis, Appl. Math. Modeling. 34 (2010) 1247-1257.

[14] Khodabakhshi, M. Asgharian, M. An input relaxation measure of efficiency in stochastic data envelopment analysis, Appl. Math. Modelling 33 (2009) 2010-2023.

[15] Hosseinzadeh Lotfi, F, Nematollahi, N., Behzadi, M.H., Mirbolouki, M., Moghaddas, Z. Centralized resource allocation with stochastic data, J. Comput. Appl. Math. 236 (2012) 1783-1788.

www.SID.ir

Archive of SID

www.SID.ir