

توابع خوشریخت محدب از مرتبه معکوس α و خواص آنها

سیروس مرادی^{۱*}، محمد طاعتی^۲

(^۱) دانشیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه لرستان، ۶۸۱۵۱-۴-۴۳۱۶، خرم آباد، ایران.

(^۲) گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ص. پ. ۳۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۰۸/۰۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۹/۲۵

چکیده

می‌دانیم که تابع خوشریخت، یک تابع تحلیلی روی دامنه D است که نقاط تکین منفرد آن روی دامنه D ، از نوع قطب می‌باشد. این دسته از توابع، توابع منظم نیز نامیده می‌شوند. اخیراً توابع خوشریخت محدب از مرتبه α تعریف شده و خواص آن مورد بحث بررسی قرار گرفته است. در این مقاله ابتدا به معرفی توابع خوشریخت محدب از مرتبه معکوس α می‌پردازیم. در واقع توابع خوشریخت محدب از مرتبه معکوس α رده خاصی از توابع تحلیلی روی قرص باز واحد \mathbb{U} می‌باشند که در شرط زیر صدق می‌کنند:

$$\Re \left(1 + \frac{f'(z)}{zf''(z)} \right) < -\alpha,$$

که در آن $0 \leq \alpha < 1$ یک مقدار ثابت و z یک مقدار دلخواه در \mathbb{U} می‌باشد. در ادامه با در نظر گرفتن خواص توابع تحلیلی و ستاره‌گون و با استفاده از لم‌هایی از قبیل لم جک، شرایط کافی برای اینکه یک تابع در رده مذکور باشد را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم. در ادامه مثال‌هایی را از رده ذکر شده را بیان می‌کنیم. نتایج به دست آمده در این مقاله، شکل متفاوتی از توابع ستاره‌گون را معرفی و مورد بررسی قرار داده است. در واقع نتایج به دست آمده، نتایج مربوط به سان و کونگ را به شکل دیگری برای رده جدید از توابع تحلیلی ستاره‌گون مورد مطالعه قرار داده است.

واژه‌های کلیدی: تحلیلی، خوشریخت، محدب، ستاره‌گون.

۱- مقدمه

نظریه آنالیز مختلط یکی از شاخه‌های مهم ریاضی است که در بسیاری از علوم نظری و کاربردی مورد استفاده قرار می‌گیرد و به طور ویژه در فیزیک (نظریه پتانسیل) و علوم مهندسی (برق، مکانیک و...) کاربرد فراوان دارد. قرن نوزدهم میلادی برخورد دقیق با اعداد مختلط آغاز گردید و نظریه توابع با متغیرهای مختلط توسط کوشی، واپرشتراس و ریمان پایه‌گذاری شد. در این راستا یکی از مباحث جالب و کاربردی در آنالیز مختلط رده توابع تک ارز و ستاره‌گون و زیر رده‌ها و خواص آنها و همچنین ارتباط بین آنها می‌باشد. مطالعه توابع تک‌ارز، امروزه شامل بررسی خانواده‌های خاصی از توابع تحلیلی و تک‌ارز در دامنه‌های از پیش تعریف شده می‌باشد. کوبه در سال ۱۹۰۷ توانست پیش از سایر ریاضی‌دانان قرن بیستم برآوردهای بسیار شناخته شده‌ای را در این نظریه ارائه دهد. اولین زیر رده اختصاصی خانواده تک‌ارز، توابع محدب می‌باشند که قرص باز واحد را به دامنه‌های محدب می‌نگارند. این توابع بعدها توسط گرانو لولاونر و افراد دیگری مورد مطالعه قرار گرفتند.

در سال‌های اخیر، بسیاری از پژوهشگران، توابع خوشریخت ستاره‌گون و محدب و توابع ستاره‌گون و محدب از مرتبه معکوس α را مورد مطالعه و بررسی قرار داده‌اند. در این پژوهش‌ها رده‌های خاصی از این توابع معرفی می‌شوند و سپس به بررسی خواص این رده‌ها می‌پردازند و برخی شرایط کافی برای عضویت این توابع در این رده‌ها به دست می‌آورند. (به عنوان مثال مراجع [1] تا [7]). در این مقاله یک رده جدید از توابع محدب معرفی می‌کنیم. همچنین برخی شرایط کافی برای عضویت توابع در این رده جدید به دست می‌آوریم.

Σ را گردایه تمام توابع f به صورت

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

در نظر می‌گیریم که در قرص باز واحد محذوف

$$\mathbb{U}^* := \{z : z \in \mathbb{C} \ 0 < |z| < 1\} = \mathbb{U} - \{0\}$$

تحلیلی‌اند.

بسیاری از ویژگی‌های مهم و مشخصات جالب زیررده‌های Σ مثل رده $\mathcal{MS}^*(\alpha)$ توسط لیو و سرویستاوا، آوف و همکاران مورد بررسی قرار گرفته است [8]، [9] و [10]. یانگ سان و همکارانش زیررده $\mathcal{NS}^*(\alpha)$ را معرفی کردند و برخی شرایط برای عضویت این توابع در آن را به دست آوردند [11]. همچنین برخی از خواص جالب توابع تحلیلی وابسته به ضرب گروهی، توسط فورنیر و همکاران، آهوچا و همکاران مورد بررسی قرار داده شده است [12] و [13].

در سال ۲۰۱۲ سان و کونگ رده خاصی از توابع ستاره‌گون محدب را به صورت زیر معرفی کردند [11].

تعریف ۱-۱: گوئیم تابع $f \in \Sigma$ در رده $\mathcal{MC}(\alpha)$ از توابع خوشریخت محدب از مرتبه α قرار دارد اگر در شرط زیر صدق کند،

$$\Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < -\alpha.$$

که در آن $0 \leq \alpha < 1$ یک مقدار ثابت و z یک مقدار دلخواه در \mathbb{U} می‌باشد.

مثال ۱-۱: تابع $f \in \Sigma$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(z) = \frac{e^{\beta z}}{z},$$

که در آن $0 < \beta < \frac{1}{3}$ یک مقدار ثابت و z یک مقدار دلخواه در \mathbb{U} می‌باشد.

به سادگی ملاحظه می‌کنیم

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{\beta z + 1}{\beta z - 1}.$$

بنابراین

$$\Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) = \Re\left(2 + \frac{2}{\beta z - 1}\right) < 2 +$$

$$\frac{2}{\beta - 1} = -\frac{2\beta}{1 - \beta}.$$

در نتیجه یک تابع خوشریخت محدب از مرتبه

برای هر عدد حقیقی x, y به طوری که $y \leq -\frac{1+x^2}{2}$ اگر

$$p(z) = 1 + c_1z + c_2z^2 + \dots$$

تحلیلی در \mathbb{U} و $\Phi(p(z), zp'(z); z) \in \Omega$ برای هر $z \in \mathbb{U}$ آن گاه $\Re(p(z)) > 0$.

در ادامه شرایط کافی برای این که یک تابع در رده $\mathcal{NC}(\alpha)$ باشد را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم و مثال‌هایی را از رده ذکر شده بیان می‌کنیم. در واقع نتایج به دست آمده، نتایج مربوط به سان و کونگ را به شکل دیگری برای رده جدید از توابع تحلیلی ستاره‌گون مورد مطالعه قرار داده است.

۲- نتایج اصلی

ماین بخش را با ارائه یک شرط کافی برای عضویت توابع در $\mathcal{NC}(\alpha)$ شروع می‌کنیم.

قضیه ۲-۱: فرض کنیم $f \in \Sigma$ به صورت،

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

باشد و در رابطه،

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k + \alpha(k - 1))|a_k| \leq \frac{1}{2}(1 - |4 + 4\alpha - 1|), \quad (1)$$

صدق کند. آن گاه $f \in \mathcal{NC}(\alpha)$ که در آن $0 < \alpha < 1$ یک مقدار ثابت دلخواه است.

برهان. با استفاده از نکته ۱-۱ کافی است نشان دهیم برای هر $z \in \mathbb{U}$

$$\left| \frac{2(1+\alpha)zf''(z)}{f'(z)} + 1 \right| < 1. \quad (2)$$

ابتدا مشاهده می‌کنیم که

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2(1+\alpha)zf''(z) + f'(z)}{f'(z)} \right| = \\ & \left| \frac{(4+4\alpha-1)}{-1 + \sum_{k=0}^{\infty} Ka_k z^{k+1}} + \frac{\sum_{k=0}^{\infty} ((2+2\alpha)k(k-1) + k)a_k z^{k+1}}{-1 + \sum_{k=0}^{\infty} Ka_k z^{k+1}} \right| < \\ & \frac{|4+4\alpha-1|}{1 - \sum_{k=0}^{\infty} k|a_k||z|^{k+1}} + \end{aligned}$$

$\alpha = \frac{2\beta}{1-\beta}$ می‌باشد.

در ادامه دسته جدید از توابع ستاره‌گون محدب از مرتبه معکوس α معرفی می‌کنیم.

تعریف ۲-۱: تابع $f \in \Sigma$ در رده $\mathcal{NC}(\alpha)$ متشکل از توابع خوشریخت محدب از مرتبه معکوس α قرار دارد اگر و تنها اگر،

$$\Re\left(1 + \frac{f'(z)}{zf''(z)}\right) < -\alpha.$$

که در آن $0 \leq \alpha < 1$ یک مقدار ثابت و z یک مقدار دلخواه در \mathbb{U} می‌باشد.

نکته ۱-۱: ملاحظه می‌کنیم از $\Re(p(z)) < 0$ نتیجه می‌شود،

$$\Re\left(\frac{1}{p(z)}\right) = \Re\left(\frac{p(z)}{|p(z)|^2}\right) < 0.$$

بنابراین، $f \in \Sigma$ تابع خوشریخت محدب از مرتبه معکوس α است اگر و تنها اگر،

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} + \frac{1}{2(1+\alpha)} \right| < \frac{1}{2(1+\alpha)}$$

که در آن $0 \leq \alpha < 1$ یک مقدار ثابت و z یک مقدار دلخواه در \mathbb{U} می‌باشد.

برای اثبات نتایج این مقاله به لم‌های تکراری زیر نیاز داریم.

لم ۲-۱ (لم جک [14]): گیریم φ یک تابع منظم غیرثابت در U باشد. اگر $|\varphi|$ ماکسیمم مقدار خود را روی دایره $|z| = r < 1$ در z_0 بگیرد، آنگاه $z_0\varphi'(z_0) = k\varphi(z_0)$,

که در آن $k \geq 1$ یک عدد حقیقی است.

لم ۳-۱ ([15]): گیریم Ω یک مجموعه در صفحه مختلط \mathbb{C} باشد. فرض کنید که Φ نگاشتی از $\mathbb{U} \times \mathbb{C}^2$ به \mathbb{C} باشد که $\Phi(ix, y; z) \notin \Omega$ برای $z \in \mathbb{U}$ و

که در آن $0 < \alpha < 1$ یک مقدار ثابت و z یک مقدار دلخواه در \mathbb{U} می‌باشد.
آن گاه h در \mathbb{U} تحلیلی است. از رابطه (۴) نتیجه می‌شود

$$1 + \beta \frac{zf'''(z)}{f''(z)} = -\beta \frac{[zh'(z)\alpha + 1]}{h(z)\alpha + (1+\alpha)} + 1 - \beta \quad (۶)$$

با ترکیب (۵) و (۶)، به دست می‌آوریم

$$\frac{f'(z)}{zf''(z)} \left(1 + \beta \frac{zf'''(z)}{f''(z)}\right) = -\beta zh'(z)\alpha + (1 - \beta)h(z)\alpha + (1 - \beta)(1 + \alpha) - \beta = \Phi(h(z), zh'(z); z),$$

که در آن

$$\Phi(r, s; t) = \beta as + (1 - \beta)ar + (1 - \beta)(1 + \alpha) - \beta.$$

حال برای هر x و y حقیقی که $y \leq -\frac{1+x^2}{2}$ داریم
 $\Re(\Phi(ix, y; z)) = -\beta\alpha y + 1 + \alpha - 2\beta - \beta\alpha$
 $\leq \frac{\beta\alpha}{2}(1 + x^2) + 1 + \alpha - 2\beta - \beta\alpha$
 $= (1 + \alpha) - \frac{1}{2}\beta(4 + \alpha)$
 $(0 \leq \alpha < 1).$

اگر قرار دهیم،

$$\Omega = \left\{ \zeta : \Re(\zeta) > (1 + \alpha) - \frac{1}{2}\beta(4 + \alpha) \right\},$$

آن گاه برای هر x و y حقیقی که $y \leq -\frac{1+x^2}{2}$ داریم $\Phi(ix, y; z) \notin \Omega$ علاوه بر این، به موجب رابطه (۴)، ما می‌دانیم که

$$\Phi(h(z), zh'(z); z) \in \Omega.$$

بنابراین، با توجه لم ۱-۳، نتیجه می‌گیریم برای هر $z \in \mathbb{U}$ $\Re(h(z)) > 0$.

این دلالت بر درستی قضیه دارد. \square

$$\frac{\sum_{k=0}^{\infty} ((2+2\alpha)k(k-1)+k)|a_k||z|^{k+1}}{1 - \sum_{k=0}^{\infty} k|a_k||z|^{k+1}} < \frac{|4+4\alpha-1|}{1 - \sum_{k=0}^{\infty} k|a_k|} + \frac{\sum_{k=0}^{\infty} ((2+2\alpha)k(k-1)+k)|\alpha_k|}{1 - \sum_{k=0}^{\infty} k|\alpha_k|}.$$

حال با استفاده از نامساوی (۱) داریم،

$$\frac{|4-4\alpha-1|}{1 - \sum_{k=0}^{\infty} k|\alpha_k|} + \frac{\sum_{k=0}^{\infty} ((2+2\alpha)k(k-1)+k)|\alpha_k|}{1 - \sum_{k=0}^{\infty} k|\alpha_k|} < 1 \quad (۳)$$

بنابراین با توجه به روابط (۲) و (۳) اثبات قضیه کامل می‌شود. \square

در زیر دسته‌ای از توابع را معرفی می‌کنیم.

مثال ۲-۱: فرض کنیم $0 < \alpha < 1$ یک مقدار ثابت دلخواه باشد. تابع $f \in \Sigma$ به صورت زیر

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-|4+4\alpha-1|)}{k^2(k+1)(k+\alpha(k-1))} a_k z^k$$

متعلق به $\mathcal{NC}(\alpha)$ است.

در ادامه یک شرط کافی دیگر برای عضویت یک تابع در $\mathcal{NC}(\alpha)$ بیان می‌کنیم.

قضیه ۲-۲: فرض کنیم $f \in \Sigma$ به صورت،

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

باشد و در رابطه،

$$\Re\left(\frac{f'(z)}{zf''(z)}\left(1 + \beta \frac{zf'''(z)}{f''(z)}\right)\right) < \frac{1}{2}\beta(\alpha + 3) - (1 + \alpha), \quad (۴)$$

صدق کند. آن گاه $f \in \mathcal{NC}(\alpha)$ که در آن $0 \leq \alpha < 1$ و $\beta \geq 0$ ثابت‌های دلخواه می‌باشند.

برهان. تابع کمکی $h(z)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$h(z) := \frac{-\frac{f'(z)}{zf''(z)} - (1+\alpha)}{-\alpha} \quad (۵)$$

بنابراین برای هر x و y حقیقی که $y \leq -\frac{1+x^2}{2}$ داریم $\Phi(ix, y; z) \notin \Omega$.

همچنین با توجه به (۷) داریم $\Phi(g(z), zg'(z); z) \in \Omega$. آن گاه بنابر لم ۳-۱، نتیجه می گیریم

$$\Re(g(z)) > 0 \quad (z \in \mathbb{U}).$$

این اثبات قضیه را کامل می کند. \square

تشکر و قدردانی

نویسندگان مقاله مراتب تشکر خود را از سردبیر و داوران محترم ابراز می کنند.

قضیه ۲-۳: فرض کنیم $f \in \Sigma$ به صورت،

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

باشد و در رابطه،

$$\Re \left(1 + \frac{zf'''(z)}{f''(z)} - \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) < \begin{cases} \frac{1}{2(1+\alpha)} \left(0 \leq \alpha < \frac{1}{2} \right), \\ \frac{1+\alpha}{2} \left(\frac{1}{2} \leq \alpha < 1 \right), \end{cases} \quad (۷)$$

صدق کند. آن گاه $f \in \mathcal{NC}(\alpha)$ که در آن $0 \leq \alpha < 1$ مقدار ثابت دلخواه می باشد.

برهان. تابع کمکی $g(z)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم،

$$g(z) := -1 - \alpha - \frac{f'(z)}{zf''(z)} \quad (۸)$$

که در آن $0 < \alpha < 1$ یک مقدار ثابت و z یک مقدار دلخواه در \mathbb{U} می باشد.

آن گاه g در \mathbb{U} تحلیلی است. از رابطه (۸) نتیجه می شود

$$1 + \frac{zf'''(z)}{f''(z)} - \frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{zg'(z)}{g(z)+(1+\alpha)} = \Phi(g(z), zg'(z); z),$$

که در آن

$$\Phi(r, s; t) = \frac{s}{r+(1+\alpha)}.$$

حال برای هر x و y حقیقی که $y \leq -\frac{1+x^2}{2}$ داریم

$$\begin{aligned} \Re(\Phi(ix, y; z)) &= \frac{(1+\alpha)y}{x^2+(1+\alpha)^2} \\ &\leq -\frac{(1+\alpha) \times \left(\frac{1+x^2}{2}\right)}{x^2+(1+\alpha)^2} \\ &\leq -\frac{(1+\alpha)}{2} \times \frac{1+x^2}{x^2+(1+\alpha)^2} \\ &\leq \begin{cases} -\frac{(1+\alpha)}{2} \times \frac{1}{(1+\alpha)^2} \left(0 \leq \alpha < \frac{1}{2} \right), \\ -\frac{(1+\alpha)}{2} \times 1 \left(\frac{1}{2} \leq \alpha < 1 \right), \end{cases} \end{aligned}$$

حال قرار می دهیم

$$\Omega = \left\{ \zeta : \Re(\zeta) > \begin{cases} \frac{1}{2(1+\alpha)} \left(0 \leq \alpha < \frac{1}{2} \right) \\ \frac{\alpha+1}{2} \left(\frac{1}{2} \leq \alpha < 1 \right) \end{cases} \right\},$$

multivalent functions. Appl. Math. Lett. 16, (2003), 13-16.

فهرست منابع

[9] J. L. Liu, H. M. Srivastava. *A linear operator and associated families of meromorphically multivalent functions*. J. Math. Anal. Appl. 259, (2001), 566-581.

[10] M. K. Aouf. *Argument estimates of certain meromorphically multivalent functions associated with generalized hypergeometric function*. Appl. Math. Comput. 206, (2008), 772-780.

[11] Y. Sun, W. P. Kuang, Z. G. Wang. *On Meromorphic Starlike Functions of Reciprocal Order α* . Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 35(2), (2012), 469-477.

[12] R. Fournier, S. T. Ruscheweyh. *Remarks on a multiplier conjecture for univalent functions*. Proc. Amer. Math. Soc. 116, (1992), 35-43.

[13] O. P. Ahuja, J. M. Jahangiri, H. Silverman. *Subclasses of starlike functions related to a multiplier family*. Journal of natural geometry, 15, (1999), 65-72.

[14] I. S. Jack. *Function starlike and convex of order α* . J. London Math. Soc. 3 (1971), 469-474.

[15] S. S. Miller, P.T. Mocanu. *Differential subordinations and inequalities in the complex plane*. J. Differential Equations 67, (1987), 199-211.

[1] R. M. Ali, V. Ravichandran. *Classes of meromorphic convex functions*, Taiwanese J. Math. 14, (2010), 1479-1490.

[2] M. H. Mohd, R. M. Ali, L. S. Keong, V. Ravichandran. *Subclasses of meromorphical functions associated with convolution*. J. Inequal. Appl. Article ID 190291, (2009), 1-10.

[3] Y. Sun, W. P. Kuang, Z-G. Wang. *On meromorphic starlike functions of reciprocal order α* . Department of Mathematics, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, May (2012), 469-477.

[4] Z. G. Wang, Z. H. Liu, R. G. Xiang. *Some criteria for meromorphic multivalent starlike functions*. Appl. Math. Compute. doi:10.1016/j.amc. (2011), 2011.03.079.

[5] M. Taati, S. Moradi, S. Najafzadeh. *Some properties and results for certain subclasses of starlike and convex functions*. Sahand Communications in Mathematical Analysis (SCMA) Vol. 7 No. 1, (2017), 1-15.

[6] M. Taati, S. Moradi, S. Najafzadeh. *Sufficient Conditions for a New Class of Polynomial Analytic Functions*. Mathematics interdisciplinary Research. 2, (2017), 59 - 69.

[7] Z. G. Wang, H. M. Srivastava, S. M. Yuan. *Some basic properties of certain Subclasses of meromorphically starlike functions*. J. Inequal. Appl. 2014:29, (2014).

[8] J. L. Liu, H. M. Srivastava. *Some convolution conditions for starlikeness and convexity of meromorphically*