دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و هشتم، بهمن و اسفند ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

بررسی نزدیکی تابعک‌های تقریبا ضربی به تابعک‌های ضربی در جبرهای باناخ جابجایی

فریبا ارشاد *

گروه ریاضی دانشگاه پیام نور، ایران

تاریخ ارسال مقاله : ۱۳۹۷/۱۱/۸ تاریخ پذیرش مقاله : ۱۳۹۸/۱۰/۲۸

چکیده

در این مقاله، تعریف تابعک‌های تقریبا ضربی بر جبرهای باناخ جابجایی را ارایه داده و نزدیکی این تابعک‌ها با تابعک‌های ضربی را بر این جبرها مورد بررسی قرار خواهیم داد (خاصیت AMNM). برخی از جبرهای باناخ دارای این خاصیت هستند (البته نه تمامی آن‌ها). به دلیل رابطه موجود بین طیف یک عضو یک جبر باناخ مختلط و تابعک‌های خطی ضربی، بررسی نزدیکی تابعک‌های خطی- تقریبا ضربی، اطلاعات مناسبی را در خصوص طیف یک عنصر جبر باناخ به ما می‌دهد. قضیه‌ای را در این مقاله بیان خواهیم کرد که به کمک آن، بررسی نزدیکی تابعک‌های تقریبا ضربی به تابعک‌های ضربی، بسیار راحت‌تر انجام خواهد گرفت. همچنین در این مقاله، نشان می‌دهیم هرگاه در جبرهای باناخ جابجایی A و B، در نزدیکی تابعک‌های تقریبا ضربی، تابعک‌های ضربی وجود داشته باشند، آن گاه A×B نیز دارای این خاصیت است و بالعکس. این خاصیت را برای حاصلضرب متناهی از جبرهای باناخ جابجایی نیز بررسی خواهیم کرد. به دسته‌ای از فضاهای دنباله‌ای هم اشاره‌ای خواهیم داشت.

واژه‌های کلیدی: جبرهای باناخ، تابعک ضربی، تابعک تقریبا ضربی، حاصلضرب دکارتی، فضای دنباله‌ای.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: m.norouzi@ub.ac.ir, m.norouzi65@yahoo.com

۱– مقدمه

همان طور که در مسایل پایداری، بسیاری از ریاضیدانان، نزدیکی توابع خطی و تقریبا خطی را بررسی کرده‌اند، بررسی نزدیکی تابعک‌های خطی–ضربی و تابعک‌های خطی–تقریبا ضربی بر جبرهای باناخ، از مطالب مورد علاقه خیل عظیمی از ریاضیدانان چون جانسون[†]، یاروش[‡] و... بوده و هست. طبق یکی از قضایای گلفاند، در جبرهای باناخ جابجایی، رابطهٔ بسیار نزدیکی بین طیف یک عنصر و تابعک‌های خطی–ضربی وجود دارد. بنابراین از نزدیکی تابعک‌های خطی–ضربی و تابعک‌های خطی–تقریبا ضربی، می‌توان اطلاعاتی در خصوص طیف یک عنصر، کسب کرد. از این پس در این مقاله، برای راحتی از کلمه "تابعک" بجای عبارت "تابعک خطی" استفاده خواهیم کرد.

در این مقاله، منظور از A، یک جبر باناخ جابجایی می‌باشد. همچنین فضای تمام تابعک‌های کراندار بر A را با A^* و مجموعه تمام تابعک‌های ضربی کراندار و ناصفر بر A را با $\hat{A}$ نمایش می‌دهیم.

برای اولین بار جانسون در [۱]، تابعک‌های تقریبا ضربی را بر A، به صورت زیر تعریف کرده است. فرض کنید $\varphi \in A^*$. تابع دو خطی $\check{\varphi}$ را بر $\mathrm{A}\times\mathrm{A}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\check{\varphi}(a,b) = \varphi(ab) - \varphi(a)\varphi(b).$$

همچنین $\|\check{\varphi}\|$ را به صورت

$$\|\check{\varphi}\| = sup\{|\check{\varphi}(a,b)| : \|a\| \le 1 , \|b\| \le 1\}$$

تعریف می‌کنیم.

هرگاه $\delta > 0$ی باشد که $\|\check{\varphi}\| \le \delta$، آنگاه φ را یک تابعک δ–ضربی (تقریبا ضربی) می‌نامیم.

یا روش در [۲] نشان داده است که هر گاه $\|\check{\varphi}\| \le \delta$، آنگاه $\|\varphi\| \le 1 + \delta$. بنابراین هر تابعک تقریبا ضربی، پیوسته است. برای هر $m \in \hat{A}$، به راحتی می‌توان یک تابعک تقریبا ضربی در نزدیکی آن یافت. زیرا اگر $\varepsilon > 0$، $\varphi \in A^*$ و $\|\varphi\| < \varepsilon$، آنگاه با یک محاسبه ساده، می‌توان نشان داد که $\psi = m + \varphi$، برای $\delta = 3\varepsilon + \varepsilon^2$، یک تابعک δ–ضربی است و $\|m - \psi\| < \varepsilon$.

عکس مطلب فوق، الزاما در هر جبر باناخی، برقرار نیست.

جانسون در [۱]، جبرهای باناخی را که نزدیک تابعک‌های تقریبا ضربی آن، تابعک‌های ضربی یافت می‌شوند را مختصرا AMNM[§] نامید. در واقع اگر برای $\varphi \in A^*$، قرار دهیم $d(\varphi) = inf\{\|\varphi - m\| : m \in \hat{A} \cup \{0\}\}$، آنگاه A را AMNM می‌نامیم، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ی وجود داشته باشد که برای هر تابعک δ–ضربی چون φ ، داشته باشیم $d(\varphi) < \varepsilon$.

جانسون در [۱]، قضیه زیر را اثبات کرده است. این قضیه در بررسی AMNM بودن یک جبر باناخ بسیار کلیدی است.

قضیه ۱–۱. فرض کنید A یک جبر باناخ جابجایی یکدار باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.

(الف) A یک جبر AMNM است.

(ب) برای هر $\{\Phi_n\}$ در A^* که $\|\check{\Phi}_n\| \to 0$ ، دنباله‌ای در $\hat{A} \cup \{0\}$، چون $\{\psi_n\}$ می‌توان یافت که $\|\Phi_n - \psi_n\| \to 0$.

(ج) برای هر دنباله $\{\Phi_n\}$ در A^* که $\|\check{\Phi}_n\| \to 0$، زیر دنباله‌ای از آن چون $\{\Phi_{n_i}\}$ و دنباله‌ای چون $\{\psi_i\}$ در $\hat{A} \cup \{0\}$ می‌توان یافت که $\|\Phi_{n_i} - \psi_i\| \to 0$.

(د) برای هر دنباله $\{\Phi_n\}$ در A^* که $\|\check{\Phi}_n\| \to 0$ و $\inf_n \|\Phi_n\| > 0$ ، دنباله‌ای چون $\{\psi_n\}$ در A^* می‌توان یافت که $\|\Phi_n - \psi_n\| \to 0$.

(هـ) برای هر دنباله $\{\Phi_n\}$ در A^* که $\|\check{\Phi}_n\| \to 0$ و $\|\Phi_n\| = \Phi_n(1) = 1$، دنباله‌ای چون $\{\psi_n\}$ در $\hat{A}$ می‌توان یافت که $\|\Phi_n - \psi_n\| \to 0$.

(و) برای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ ی وجود دارد که هرگاه $\Phi \in A^*$، $\|\Phi\| = \Phi(1) = 1$ و $\|\check{\Phi}\| < \delta$، آنگاه $d(\Phi) < \varepsilon$.

جانسون در [۱] ثابت کرد که هر جبر باناخ متناهی–البعد، $C_0(X)$، وقتی X یک فضای هاسدورف موضعا

[†] B. E. Johnson

[‡] K. Jarosz

[§] Almost multiplicative functionals are near multiplicative functionals

فشرده باشد و ℓ^p $(1 \le p \le \infty)$ جبرهایی AMNM هستند.

وی همچنین نشان داد که جبرهای باناخی هستند که AMNM نمی‌باشند.

یاروش در [۳] ثابت کرد که هر جبر یکنواخت یک مولده، AMNM است. البته در حالتی که این جبر یکنواخت بیشتر از یک مولد داشته باشد هنوز مساله آن حل نشده باقی مانده است. از جبرهای باناخ جابجایی که هنوز AMNM بودن آن‌ها مشخص نشده است، H^∞ می‌باشد.

تعریف ۱-۲. فرض کنید $\{\beta(n)\}_{n=0}^{\infty}$، دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت باشد به طوری که $\beta(0) = 1$. برای هر $1 < p < \infty$، فضای دنباله هایی چون $f = \{\hat{f}(n)\}_{n=0}^{\infty}$ را در نظر بگیرید که $\|f\|^P = \|f\|_\beta^P = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\hat{f}_{(n)}\right|^P \beta^P(n) < \infty$. این فضا را فضای هاردی وزندار می نامیم و با $H^P(\beta)$ نمایش می‌دهیم.

می‌توان نشان داد که برای هر $1 < p < \infty$ ، $H^P(\beta)$ با $\| \ \|_\beta$ یک فضای باناخ انعکاسی است ([۴]). ما در [۴] نشان داده ایم که هرگاه $liminf \beta(n) > 1$ و $1 < p < \infty$، آنگاه $H^P(\beta)$ با ضرب $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}_{(n)} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \hat{g}_{(n)} z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}_{(n)} \hat{g}_{(n)} z^n$، یک جبر باناخ AMNM می‌باشد.

۲-نتایج اصلی

فرض کنید A و B دو جبر باناخ جابجایی باشند. اعمال جمع، ضرب و نُرم را بر A×B به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d);$$
$$(a,b)(c,d) = (ac, bd);$$
$$\|(a,b)\| = \|a\| + \|b\|;$$

برای هر $(a,b),(c,d) \in A \times B$. به راحتی می‌توان نشان داد که A×B با این تعاریف یک جبر باناخ جابجایی می‌باشد.

ما در [۵] به کمک قسمت (د) قضیه ۱-۱، قضیه زیر را اثبات کرده ایم.

قضیه ۲-۱. اگر A و B دو جبر باناخ جابجایی AMNM باشند، آنگاه A×B نیز AMNM می باشد.

برای بررسی صحت عکس قضیه فوق، ابتدا یک لم را اثبات می کنیم.

لم ۲-۲. فرض کنید A و B دو جبر باناخ جابجایی و f:A→B، یک تابع خطی دوسویی کراندار باشد و برای هر a,b∈A ، $f(ab) = f(a)f(b),$ آنگاه جبر A، AMNM است، اگر و فقط اگر B یک جبر AMNM باشد.

اثبات: فرض کنید A، AMNM باشد و برای $\{\Phi_n\} \subset B^*$ داشته باشیم $\|\widetilde{\Phi_n}\| \to 0$.

با توجه به خاصیت f، برای هر $a, b \in A$،

$$\left|\widetilde{\Phi_n o f}(a,b)\right| = \left|\Phi_n\big(f(a)f(b)\big) - (\Phi_n o f)(a)(\Phi_n o f)(b)\right| \le \|\widetilde{\Phi_n}\| \|f\|^2 \|a\| \|b\|.$$

بنابراین $\|\widetilde{\Phi_n o f}\| \to 0$، وقتی $n \to \infty$.

بنابراین دنباله‌ای چون $\{\psi_n\} \subset \hat{A} \cup \{0\}$وجود دارد که$\|\Phi_n o f - \psi_n\| \to 0$ $(n \to \infty)$. با توجه به قضیه نگاشت باز، $\|f^{-1}\| < \infty$ می باشد. همچنین با توجه به خاصیت f، $\{\psi_n o f^{-1}\} \subset \hat{B} \cup \{0\}$ و $\|\Phi_n - \psi_n o f^{-1}\| \le \|\Phi_n o f - \psi_n\| \|f^{-1}\|$. پس $\|\Phi_n - \psi_n o f^{-1}\| \to 0$ و بنابراین B، خاصیت AMNM را داراست. اثبات عکس این مطلب، به طور مشابه می باشد.

قضیه ۲-۳ ([۱]). فرض کنید A یک جبر باناخ جابجایی و J یک ایده آل بستهٔ آن باشد. در این صورت:

(الف) اگر J و $\frac{A}{J}$، AMNM باشند، آنگاه A نیز AMNM می باشد.

(ب) اگر A، AMNM باشد، آنگاه J نیز AMNM است.

به کمک قضیه فوق و لم ۲-۲، عکس قضیه ۲-۱ را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۲-٤. فرض کنید A و B دو جبر باناخ جابجایی باشند. اگر A×B، AMNM باشد، آنگاه A و B هر دو AMNM هستند.

اثبات: با توجه به تعریف ضرب در A×B، به راحتی می‌توان نشان داد که $A \times \{0\}$ یک ایده آل بستهٔ A×B است. بنابراین با توجه به قضیه ۲-۳ (ب)، $A \times \{0\}$، AMNM می‌باشد. تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f: A \times \{0\} \to A$$

به طوری که $f(a,0) = a$، برای هر $a \in A$.

در این صورت، با توجه به لم ۲-۲، A، AMNM می‌باشد. به طور مشابه می‌توان ثابت کرد که B نیز AMNM می باشد.

حال فرض کنید A_1, A_2, A_3 سه جبر باناخ جابجایی باشند. اگر در $A_1 \times A_2 \times A_3$ ، جمع و ضرب اسکالر را به طور معمول و ضرب را به صورت زیر در $A_1 \times A_2 \times A_3$ تعریف کنیم:

$$(a_1, a_2, a_3)(b_1, b_2, b_3) = (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3),$$

آنگاه با تعریف $\|(a_1, a_2, a_3)\| = \|a_1\| + \|a_2\| + \|a_3\|$، به راحتی می‌توان نشان داد که $A_1 \times A_2 \times A_3$ ، یک جبر باناخ جابجایی می‌باشد.

فرض کنید

$$f: A_1 \times A_2 \times A_3 \to (A_1 \times A_2) \times A_3$$

و $f(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$. در این صورت به کمک لم ۲-۲، $A_1 \times A_2 \times A_3$، AMNM است، اگر و فقط اگر $(A_1 \times A_2) \times A_3$، AMNM باشد. بنابراین با استفاده از قضایای ۲-۱، ۲-۴ و استقراء می‌توان نشان داد که هرگاه $A_1, A_2, \ldots, A_n$ جبرهای باناخ جابجایی باشند، $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$، خاصیت AMNM را داراست، اگر و فقط اگر $A_1, A_2, \ldots, A_n$، همگی دارای خاصیت AMNM باشند.

در انتها اشاره ای به دسته‌ای از فضاهای دنباله‌ایی که یوسفی و باقری در [۶] به بررسی خاصیت AMNM در آنها پرداخته اند، می‌کنیم.

فرض کنید w فضای تمام دنباله های مختلط باشد. برای هر $p \geq 1$، فضای bv_p را به صورت زیر تعریف می‌کنیم؛

$$\left\{x \in w : x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}, \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{k-1}|^p < \infty\right\}.$$

برای $p = 1$، bv_1 همان فضای دنباله‌های با تغییر کراندار می‌باشد.

یوسفی و باقری در [۶] نشان داده‌اند که برای هر $p > 1$، bv_p یک جبر باناخ جابجایی AMNM می‌باشد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله برخی از جبرهای باناخ را که دارای خاصیت AMNM هستند را بررسی کردیم. همچنین نشان دادیم که این خاصیت به حاصلضرب تعداد متناهی از جبرهای باناخ دارای این خاصیت نیز منتقل می‌شود. در سال‌های اخیر تعمیمی از این خاصیت بنام خاصیت n-AMNM مطرح شده است و در این خصوص نتایجی نیز بدست آمده است. در این خصوص می‌توانید مراجع [۷] تا[۱۱] را ببینید.

فهرست منابع

[1] B. E. Johnson, Approximately multiplicative functionals, Journal of the London Mathematical Society, 2 (34), 489-510 (1986).

[2] K. Jarosz, Perturbations of Banach algebras, Lecture Notes in Mathematics 1120, Springer, Berlin,

[3] K. Jarosz, Almost multiplicative functionals, Studia Math., 124, 37-58 (1997).

[4] F. Ershad and S. H. Petroudi, approximately multiplicative functionals on the spaces of formal power series, Abstract and Applied Analysis, 2011, 1-6 (2011).

[5] F. Ershad and L. Bagheri, Approximately multiplicative functionals on the product of Banach algebras, J. Math. Extension, 7 (1), 61-67 (2013).

[6] L. Bagheri and B. Yousefi, AMNM property on variation sequence spaces, Int. Journal of Pure and Applied Mathematics, 95 (4), 593-593 (2014).

[7] H-R. Rahimi and A. Soltani, A Note on Approximately Amenable Modulo an Ideal of Banach Algebras, Journal of New Researches in Mathematics, 1 (2), 5- 12 (2015).

[8] Taghavi, A Note on Spectrum Preserving Additive Maps on C^* −Algebras, Journal of New Researches in Mathematics, 2 (6), 5-9 (2016).

[9] E. Ansari- pari and N. Eghbali, Almost n- multiplicative maps, African J. of Math. and computer science Research, 5 (12), 200-203 (2012),

[10] H. Shayanpour, E. Ansari, Z. Heidarpour and A. Zohri, Approximately n- multiplicative functionals on Banach algebras, Mediterr. J. Math., 13 (4), 1907-1920 (2016.

[11] Z. Heidarpour, E. Ansari, H. Shayanpour and A. Zohri, A class of certain properties of approximately n-multiplicative maps between locally multiplicatively convex algebras, Int. J. Nonlinear Anal. Appl., 9 (2), 111-116 (2018).