دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و هشتم، بهمن و اسفند ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

مشخصه‌ای برای ابرحلقه‌های ε_m-کامل به وسیله m-بخش‌های کامل

مرتضی نوروزی *

استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۰۷/۲۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۹/۰۲

چکیده

در این مقاله، m-بخش‌های کامل از یک ابرحلقه تعریف شده، و تفاوت و ارتباط آن‌ها با بخش‌های کامل در یک ابرحلقه بررسی می‌شود. علاوه‌براین، با استفاده از رابطه ε_m روی ابرحلقه‌ها، مفهوم ابرحلقه‌های ε_m-کامل معرفی و مشخصه‌ای برای آن‌ها به وسیله m-بخش‌های کامل تعیین خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: ابرحلقه، رابطه منظم‌قوی، رابطه ε_m، m-بخش کامل

*. عهده‌دار مکاتبات:
Email: m.norouzi@ub.ac.ir, m.norouzi65@yahoo.com

۱- مقدمه

می‌دانیم که خارج قسمت یک گروه G توسط یک زیرگروه دلخواه H از G ، یک گروه است اگر و تنها اگر H یک زیرگروه نرمال از G باشد. مارتی[2] [۱] در سال ۱۹۳۴ در هشتمین کنگره ریاضیدانان اسکاندیناوی، برای اولین بار مفهوم ابرگروه‌ها را معرفی کرد و نشان داد ساختار خارج قسمتی $G/_{\mathrm{H}}$ همیشه یک ابرگروه است. از آن زمان به بعد به تدریج نظریه ابرساختارهای جبری در سرتاسر جهان گسترش یافت، و پیشرفت‌های مختلفی در زمینه‌های گوناگون از آن به ثبت رسید. مراجع [۷-۱] منابع مناسبی برای اطلاع از پیشرفت‌های صورت گرفته در زمینه ابرساختارهای جبری می‌باشند.

فرض کنید R یک مجموعه ناتهی و $P^*(\mathrm{R})$ مجموعه تمام زیرمجموعه‌های ناتهی R باشد. هر یک از توابع

$$+: R \times R \longrightarrow P^*(R)$$
$$\cdot : R \times R \longrightarrow P^*(R)$$

را یک ابرعمل روی R گویند، که برای هر دو زیرمجموعه A و B از R و هر عنصر x از R تحت این ابرعمل‌ها قرار می دهیم:

$$A + B = \bigcup_{a\in A, b\in B} a + b$$
$$A + x = A + \{x\}$$

(که به طور مشابه برای ابرعمل "$\cdot$" بیان می‌شود).

تعریف ۱-۱: یک ابرحلقه ابرساختاری جبری مانند $(R\ , +,\cdot)$ است که در آن:

الف) $(R, +)$ یک ابرگروه است، یعنی ابرعمل $+$ روی R شرکت‌پذیر است و برای هر $x \in R$ داریم $x + R = R = R + x$ (اصل تکثیر)؛

ب) $(R,\cdot)$ یک نیم‌ابرگروه است، یعنی ابرعمل $\cdot$ روی R شرکت‌پذیر است؛

ج) برای هر $x, y, z \in R$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$
$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

(خاصیت پخش‌پذیری ابرعمل $\cdot$ نسبت به $+$).

اگر در تعریف فوق، $(R, +)$ یک نیم ابرگروه باشد، آنگاه $(R, +,\cdot)$ را یک نیم ابرحلقه گویند.

دسته‌بندی مناسبی از تحقیقات و مطالعات انجام شده روی انواع مختلف ابرحلقه‌ها در مرجع [۴] صورت گرفته است که برای مطالعه جزئیات می‌توان به آن رجوع کرد.

ساختارهای خارج‌قسمتی نقش مهمی در نظریه ابرساختارهای جبری بازی می‌کنند. دلیل آن می‌تواند ارتباطی باشد که ساختارهای خارج‌قسمتی میان ابرساختارهای جبری و ساختارهای جبری معمولی برقرار می کنند. این ارتباط با استفاده از ساختار خارج قسمتی تشکیل شده به وسیله یک رابطه هم‌ارزی منظم قوی روی یک ابرساختار، برقرار می‌شود.

تعریف ۱-۲: یک رابطه هم‌ارزی ρ روی یک ابرگروه $(R, +)$ منظم گفته می‌شود، اگر برای هر $a, b, x \in R$ به طوری که $a\rho b$، داشته باشیم $(a + x)\ \bar{\rho}\ (b + x)$ و $(x + a)\ \bar{\rho}\ (x + b)$، که این یعنی:

$$\begin{cases} \forall u \in a + x \ \ \exists v \in b + x\ ;\ \ u\rho v \\ \forall t \in b + x \ \ \exists z \in a + x\ ;\ \ t\rho z \end{cases}$$

(به طور مشابه برای $(x + a)\ \bar{\rho}\ (x + b)$ بیان می‌شود).

علاوه بر این، ρ را روی ابرگروه R منظم قوی گویند هرگاه برای هر $u \in a + x$ و برای هر $v \in b + x$ داشته باشیم $u\rho v$، که در این حالت به صورت $(a + x)\ \bar{\bar{\rho}}\ (b + x)$ نمایش داده می‌شود و همچنین $((x + a)\ \bar{\bar{\rho}}\ (x + b))$. یک رابطه هم‌ارزی روی ابرحلقه $(R, +,\cdot)$ منظم (قوی) گفته می‌شود هرگاه روی هر دو $(R, +)$ و $(R,\cdot)$ منظم (قوی) باشد.

اولین نوع از این روابط روی ابرحلقه‌ها رابطه γ است که توسط وجیوک لیس[3] در [۶] روی یک (نیم) ابرحلقه $(R, +,\cdot)$ به صورت زیر برای هر $a, b \in R$ تعریف شد:

$$a\gamma b \iff \exists n \in \mathbb{N}, \exists k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N},\ \exists z_{i1}, \dots, z_{ik_i} \in R\ (\forall\ 1 \le i \le n);\ \{a, b\} \subseteq \textstyle\sum_{i=1}^{n}(\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij})$$

---

[2] F. Marty

[3] T. Vougiouklis

γ رابطه‌ای انعکاسی و تقارنی روی (نیم) ابرحلقه‌ها است که لزوما متعدی نیست. نشان داده شده است که بستار متعدی γ، یعنی $\gamma^* = \gamma \cup \gamma \circ \gamma \cup \gamma \circ \gamma \circ \gamma \cup \dots$

کوچکترین رابطه منظم قوی روی یک (نیم) ابرحلقه $(R,+,\cdot)$ است به طوری که $\left({R}/{\gamma^*}, \oplus, \odot\right)$ یک (نیم)حلقه است که در آنجا برای هر $\gamma^*(x), \gamma^*(y) \in {R}/{\gamma^*}$ داریم:

$$\gamma^*(x) \oplus \gamma^*(y) = \{\gamma^*(z) \mid z \in \gamma^*(x) + \gamma^*(y)\}$$
$$\gamma^*(x) \odot \gamma^*(y) = \{\gamma^*(t) \mid t \in \gamma^*(x) \cdot \gamma^*(y)\}$$

در واقع ترکیب هر دو عنصر دلخواه از ${R}/{\gamma^*}$ توسط $\oplus$ و $\odot$ یک مجموعه تک عضوی است. در واقع برای $\gamma^*(q), \gamma^*(p) \in \gamma^*(x) \oplus \gamma^*(y)$ داریم $p, q \in \gamma^*(x) + \gamma^*(y)$، پس وجود دارند $a, a' \in \gamma^*(x)$ و $b, b' \in \gamma^*(y)$ به طوری که $p \in a + b$ و $q \in a' + b'$. با توجه به منظم قوی بودن رابطه γ^* داریم $(a+b)\overline{\overline{\gamma^*}}(a'+b')$ که نتیجه می دهد $p\gamma^*q$ و این یعنی $\gamma^*(p) = \gamma^*(q)$.

بنابراین، می‌توان نوشت:

$$\gamma^*(x) \oplus \gamma^*(y) = \gamma^*(z), \qquad \forall z \in \gamma^*(x) + \gamma^*(y)$$
$$\gamma^*(x) \odot \gamma^*(y) = \gamma^*(t), \qquad \forall t \in \gamma^*(x) \cdot \gamma^*(y)$$

از این رو، رابطه γ^* یک رابطه اساسی روی (نیم) ابرحلقه R، و ${R}/{\gamma^*}$ را (نیم) حلقه اساسی بدست آمده توسط γ^* گویند. روابط دیگری نیز با این خواص روی ابرحلقه‌ها مطالعه و بررسی شده است که برای آشنایی با آن‌ها می‌توان به مراجع [۷]، [۸] و [۹] رجوع کرد.

پس از آن، در راستای بررسی متعدی بودن رابطه γ روی ابرحلقه‌ها در [۱۰]، مفهوم یک بخش کامل در ابرحلقه‌ها به صورت زیر تعریف شد:

تعریف ۱-۳: زیرمجموعه ناتهی M از ابرحلقه $(R,+,\cdot)$ یک بخش کامل از R گفته می‌شود هرگاه

$$M \cap \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}\right) \neq \emptyset$$

برای همه اعداد طبیعی $n, k_1, \dots, k_n$ و عناصر دلخواه $z_{i1}, \dots, z_{ik_i}$ از R به طوری که $1 \le i \le n$، نتیجه دهد

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}\right) \subseteq M.$$

علاوه بر این، ابرحلقه $(R,+,\cdot)$ را n-کامل ([۳]) گویند هرگاه

$$\gamma\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}\right)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}\right).$$

می‌توان دید که، هر مجموع متناهی از حاصل ضرب‌های متناهی عناصر یک ابرحلقه n-کامل R، یک بخش کامل از R است.

در [۱۱] نویسندگان نگاه متفاوتی به مطالعه روابط اساسی روی ابرحلقه‌ها داشته‌اند. می‌دانیم که رابطه γ، رابطه‌ای اساسی روی (نیم) ابرحلقه ها است، یعنی کوچکترین رابطه منظم قوی روی (نیم) ابرحلقه‌ها است که ساختار خارج قسمتی تولید شده توسط آن یک (نیم) حلقه است. این نگاه متفاوت از آن جهت است که به دنبال آن بودند تا بدانند تحت چه شرایطی و روی چه (نیم) ابرحلقه‌هایی می‌توان رابطه‌ای اساسی کوچکتر از رابطه γ تعریف کرد که ساختار خارج قسمتی تولید شده توسط آن یک (نیم)حلقه باشد. برای پاسخ به این سوال، رابطه ε_m را روی ابرحلقه‌ها به صورت زیر تعریف کردند:

فرض کنید $m \ge 2$ یک عدد دلخواه طبیعی و $(R,+,\cdot)$ یک (نیم) ابرحلقه باشد. برای هر $a, b \in R$

$$a\varepsilon_m b \iff \exists n \in \mathbb{N}, \exists z_1, \dots, z_n \in R; \quad \{a,b\} \subseteq \sum_{i=1}^{n} z_i^m = z_1^m + \dots + z_n^m$$

که در آنجا $z_i^m = \underbrace{z_i \cdots z_i}_{m}$ و $\{(x,x) | x \in R\} \subseteq \varepsilon_m$.

به راحتی می‌توان دید $\varepsilon_m \subseteq \gamma$ و در نتیجه $\varepsilon_m^* \subseteq \gamma^*$. علاوه بر این نشان داده شده است ([۱۰]) که $\varepsilon_m \neq \gamma$ و همچنین $\varepsilon_m^* \neq \gamma^*$. حال فرض کنید $(R,+,\cdot)$ابرحلقه‌ای باشد که در آن $(R,\cdot)$ جابجایی است و برای همه زیرمجموعه‌های $B, A_1, \dots, A_n$ از R، رابطه زیر برقرار باشد:

$$B \subseteq \sum_{i=1}^{n} A_i^m \iff \exists x_i \in A_i \ (1 \le i \le n); \quad B \subseteq \sum_{i=1}^{n} x_i^m \qquad (1)$$

در [۱۱] نشان داده شد که ε_m^* کوچکترین رابطه هم‌ارزی منظم قوی روی (نیم) ابرحلقه‌های صادق در شرط (۱) است که ساختار خارج قسمتی تولید شده توسط آن یک (نیم) حلقه معمولی است. از این رو، ε_m^* یک رابطه اساسی روی چنین ابرحلقه‌هایی است.

۲- m-بخش‌های کامل

در این بخش، مفهوم یک m-بخش کامل از یک ابرحلقه را تعریف می‌کنیم و تفاوت و ارتباط آن با بخش‌های کامل تعریف شده روی ابرحلقه‌ها، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف ۲-۱: فرض کنید $(R,+,\cdot)$ یک (نیم)ابرحلقه و $m \geq 2$ یک عدد دلخواه طبیعی باشد. زیرمجموعه ناتهی A یک mبخش کامل از R گفته می‌شود هرگاه $A \cap \sum_{i=1}^{n} z_i^m \neq \emptyset$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $z_1, \dots, z_n \in R$، نتیجه دهد $\sum_{i=1}^{n} z_i^m \subseteq A.$

نتیجه ۲-۲: هر بخش کامل از یک (نیم) ابرحلقه R برای هر عدد طبیعی دلخواه $m \geq 2$ یک mبخش کامل از R است.

برهان. با توجه به تعریف به وضوح برقرار است.

مثال زیر نشان می دهد که عکس نتیجه ۲-۲ لزوما برقرار نیست.

مثال ۲-۳: نیم ابرحلقه $R = \{a,b,c,d\}$ تعریف شده به وسیله ابرعمل های زیر را در نظر بگیرید:

$+$	a	b	c	d
a	$\{b,c\}$	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$
b	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$
c	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$
d	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$

$\cdot$	a	b	c	d
a	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$
b	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$
c	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$
d	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$	$\{b,d\}$

در این صورت $A = \{a,b,d\}$ برای هر $m \geq 2$ یک m-بخش کامل از R است زیرا برای هر $m \geq 2$، هر عدد طبیعی n و $z_1, \dots, z_n \in R$ داریم: $\sum_{i=1}^{n} z_i^m = \{b,d\}.$

علاوه بر این می‌دانیم زیرمجموعه ناتهی A از R یک بخش کامل است اگر و تنها اگر $x \in A$ و $x\gamma y$ برای هر $y \in R$ نتیجه دهد $y \in A$. از این رو، $A = \{a,b,d\}$ یک بخش کامل از R نیست زیرا $b \in A$ و $b\gamma c$ اما $c \notin A$.

در مثال (۲-۳) زیرمجموعه ناتهی $B = \{b,c,d\}$ یک بخش کامل از R است که برای هر $m \geq 2$ یک m-بخش کامل نیز می باشد.

برای برقراری حالتی از عکس نتیجه (۲-۲)، در زیر مفهوم و مثال هایی از ابرحلقه های m-خودتوان [۱۱] را یادآوری می کنیم:

تعریف ۲-٤: ابرحلقه $(R,+,\cdot)$ را m-خودتوان گوییم هرگاه عدد طبیعی ثابت $m \geq 2$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in R$ داشته باشیم $x \in x^m$.

مثال ۲-۵: روی مجموعه $R = \{0,a,b\}$ ابرعمل-های زیر را در نظر بگیرید:

$+$	0	a	b
0	$\{0\}$	$\{a\}$	$\{b\}$
a	$\{a\}$	$\{a,b\}$	R
b	$\{b\}$	R	$\{a,b\}$

$\cdot$	0	a	b
0	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
a	$\{0\}$	R	R
b	$\{0\}$	R	R

برای هر $2 \leq m \in \mathbb{N}$ داریم
$$0^m = \{0\} \quad \text{و} \quad a^m = b^m = R،$$
از این رو $(R,+,\cdot)$ برای هر $2 \leq m \in \mathbb{N}$، یک ابرحلقه m-خودتوان است.

مثال ۲-٦: برای هر $x, y \in \mathbb{Z}$، تعریف کنید $x \oplus y = \{x, y, x+y\}$ و $x \odot y = \{xy\}$. در این صورت $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ یک ابرحلقه است. همچنین برای هر $1 \neq x \in \mathbb{Z}$ داریم
$$x \notin \{x^m\} = \underbrace{x \odot \cdots \odot x}_{m}$$
از این رو، برای هر $2 \leq m \in \mathbb{N}$ ابرحلقه $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$، m-خودتوان نیست.

قضیه ۲-۷: فرض کنید R یک ابرحلقه m-خودتوان باشد که در رابطه (1) صدق می‌کند. در این صورت، زیرمجموعه A از R یک m-بخش کامل از R است اگر و تنها اگر A یک بخش کامل از R باشد.

برهان: با توجه به نتیجه ۲-۲، هر بخش کامل یک m-بخش کامل است. حال فرض کنید A یک m-بخش کامل از R باشد. همچنین فرض کنید برای اعداد طبیعی $n, k_1, \dots, k_n$ و عناصر دلخواه $z_{i1}, \dots, z_{ik_i}$ از R به طوری که $1 \leq i \leq n$، داشته باشیم $A \cap \sum_{i=1}^n (\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}) \neq \emptyset$.
از آنجایی که R یک ابرحلقه m-خودتوان است، داریم
$$\sum_{i=1}^n (\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}) \subseteq \sum_{i=1}^n (\prod_{j=1}^{k_i} {z_{ij}}^m) \subseteq \sum_{i=1}^n (\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij})^m$$
از این رو، با توجه به رابطه (1)، برای هر $1 \leq i \leq n$ عناصر $t_i \in \prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}$ وجود دارند به طوری که
$\sum_{i=1}^n (\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}) \subseteq \sum_{i=1}^n t_i^m$ پس، $A \cap \sum_{i=1}^n t_i^m \neq \emptyset$. حال چون A یک m-بخش کامل است، خواهیم داشت، $\sum_{i=1}^n t_i^m \subseteq A$. بنابراین،
$\sum_{i=1}^n (\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}) \subseteq \sum_{i=1}^n t_i^m \subseteq A$،
که نتیجه می‌دهد A یک بخش کامل از R است.

۳- ابرحلقه‌های $\boldsymbol{\varepsilon_m}$-کامل

در این بخش، ابرحلقه‌های ε_m-کامل تعریف شده و تفاوت و ارتباط آن‌ها با ابرحلقه‌های n-کامل نشان داده می‌شوند. علاوه بر این، با استفاده از مفهوم m-بخش‌های کامل، مشخصه‌ای برای این نوع از ابرحلقه‌ها معرفی می‌کنیم.

تعریف ۳-۱: فرض کنید $2 \leq m \in \mathbb{N}$. (نیم)ابرحلقه $(R, +, \cdot)$ را یک (نیم)ابرحلقه ε_m-کامل گویند، هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $z_1, \dots, z_n \in R$ داشته باشیم
$$\varepsilon_m(\sum_{i=1}^n z_i^m) = \sum_{i=1}^n z_i^m.$$

مثال ۳-۲: نیم ابرحلقه $(R, +, \cdot)$ مثال (۲-۳) را در نظر بگیرید. برای هر $2 \leq m \in \mathbb{N}$ و برای هر $z_1, \dots, z_n \in R$ داریم $\sum_{i=1}^n z_i^m = \{b, d\}$. همچنین داریم $\varepsilon_m(b) = \varepsilon_m(d) = \{b, d\}$. از این رو، $\varepsilon_m(\sum_{i=1}^n z_i^m) = \{b, d\} = \sum_{i=1}^n z_i^m$. بنابراین، R یک نیم‌ابرحلقه ε_m-کامل است.

مثال ۳-۳: برای ابرحلقه $(R, +, \cdot)$ در مثال (۲-۵) داریم
$$\varepsilon_2(0^2 + 0^2) = \varepsilon_2(0)$$
$$= R$$
$$\neq \{0\}$$
$$= 0^2 + 0^2$$
بنابراین، R یک ابرحلقه ε_2-کامل نیست. علاوه بر این، می‌توان دید ابرحلقه R برای هر $3 \leq m \in \mathbb{N}$ نیز، ε_m-کامل نیست.

مثال ۳-٤: قرار دهید $R = \{0, 1\}$ و تعریف کنید
$$x + y = x \cdot y = R$$
برای هر $x, y \in R$. در این صورت $(R, +, \cdot)$ یک ابرحلقه است، که در آنجا برای هر $2 \leq m \in \mathbb{N}$ و برای هر $z_1, \dots, z_n \in R$ داریم
$$\varepsilon_m(\sum_{i=1}^n z_i^m) = R = \sum_{i=1}^n z_i^m$$
از این رو، R ε_m-کامل است.

نتیجه ۳-۵: اگر $(R, +, \cdot)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ یک (نیم)ابرحلقه n-کامل باشد، آنگاه برای هر $2 \leq m \in \mathbb{N}$، R یک (نیم)ابرحلقه ε_m-کامل است.

برهان. فرض کنید $(R, +, \cdot)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ یک ابرحلقه n-کامل باشد. حال فرض کنید $2 \leq m \in \mathbb{N}$ و $z_1, \dots, z_n \in R$ و $x \in \varepsilon_m(\sum_{i=1}^n z_i^m)$ پس $t \in \sum_{i=1}^n z_i^m$ وجود دارد به طوری که $x \in \varepsilon_m(t)$. حال از آنجایی که $\varepsilon_m \subseteq \gamma$ و R یک ابرحلقه n-کامل است داریم:
$$x \in \varepsilon_m(t) \subseteq \gamma(t) \subseteq \gamma\,(\sum_{i=1}^n z_i^m) = \sum_{i=1}^n z_i^m$$
بنابراین $\varepsilon_m(\sum_{i=1}^n z_i^m) \subseteq \sum_{i=1}^n z_i^m$. از طرفی چون ε_m انعکاسی است به وضوح
$$\sum_{i=1}^n z_i^m \subseteq \varepsilon_m(\sum_{i=1}^n z_i^m).$$
در نتیجه برای هر $z_1, \dots, z_n \in R$ داریم
$$\varepsilon_m(\sum_{i=1}^n z_i^m) = \sum_{i=1}^n z_i^m$$
و این یعنی R یک ابرحلقه ε_m-کامل است.

عکس نتیجه (۳-۵) لزوما برقرار نیست. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۳-٦: نیم ابرحلقه ε_m-کامل $(R, +, \cdot)$ مثال (۲-۳) را در نظر بگیرید. می‌توان دید که در آنجا $\gamma(b) = \{b, c, d\}$ و $\gamma(c) = \{b, c\}$.
از این رو
$$\gamma(a + a) = \gamma(\{b, c\})$$
$$= \gamma(b) \cup \gamma(c)$$

$$= \{b, c, d\}$$
$$\neq \{b, c\}$$
$$= a + a$$

و این یعنی R 2–کامل نیست. علاوه بر این برای هر $n \geq 3$ دلخواه می توان دید که

$$\sum_{i=1}^{n} a = \{b, d\} \neq \{b, c, d\} = \gamma(\sum_{i=1}^{n} a).$$

پس R برای هر $n \in \mathbb{N}$ یک نیم ابرحلقه n–کامل نیست.

برای $2 \leq m \in \mathbb{N}$ ابرحلقه R را m–خودتوان قوی گویند هرگاه برای هر $x \in R$ داشته باشیم $\{x\} = x^m$. همچنین یادآوری می‌کنیم که روی یک ابرحلقه m–خودتوان صادق در رابطه (1) همواره $\varepsilon_m = \gamma$. از این رو:

قضیه ۳–۷: فرض کنید R یک ابرحلقه m–خودتوان قوی صادق در رابطه (1) باشد. در این صورت اگر R ε_m–کامل باشد آنگاه برای هر عدد طبیعی n یک ابرحلقه n–کامل نیز است.

برهان. فرض کنید برای اعداد طبیعی دلخواه $n, k_1, \dots, k_n$ و عناصر دلخواه $z_{i1}, \dots, z_{ik_i}$ از R به طوری که $1 \leq i \leq n$، داشته باشیم:

$$x \in \gamma(\sum_{i=1}^{n}(\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij})).$$

از این رو $t \in \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}\right)$ وجود دارد به طوری که

$$x \in \gamma(t),$$

حال چون R یک ابرحلقه m–خودتوان قوی است، پس

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}\right) \subseteq \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}\right)^m$$

و چون در رابطه (1) صدق می‌کند، پس برای هر i عناصر $t_i \in \prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}$ $(1 \leq i \leq n)$ وجود دارند به طوری که

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}\right) \subseteq \sum_{i=1}^{n} t_i^m,$$

حال از آنجایی که $\varepsilon_m = \gamma$، پس

$$x \in \gamma(t) \subseteq \gamma\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^m\right) = \varepsilon_m(\sum_{i=1}^{n} t_i^m) = \sum_{i=1}^{n} t_i^m \ (\text{کامل است} - \varepsilon_m\ R) \subseteq \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}\right)^m = \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}^m\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}\right),$$

بنابراین،

$$\gamma(\sum_{i=1}^{n}(\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij})) \subseteq \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{k_i} z_{ij}^m\right).$$

بنابر انعکاسی بودن γ به وضوح عکس شمولیت فوق برقرار است. از این رو، R یک ابرحلقه n–کامل است.

قضیه ۳–۸: ابرحلقه $(R, +, \cdot)$ ε_m–کامل است اگر و تنها اگر $\varepsilon_m(x) = \sum_{i=1}^{n} z_i^m$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $z_1, \dots, z_n \in R$ و برای هر $x \in \sum_{i=1}^{n} z_i^m$.

برهان. فرض کنید R ε_m–کامل باشد. در این صورت برای $n \in \mathbb{N}$ ، $z_1, \dots, z_n \in R$ و $x \in \sum_{i=1}^{n} z_i^m$ داریم:

$$\varepsilon_m(x) \subseteq \bigcup_{t \in \sum_{i=1}^{n} z_i^m} \varepsilon_m(t) = \varepsilon_m(\sum_{i=1}^{n} z_i^m) = \sum_{i=1}^{n} z_i^m.$$

از طرفی اگر $y \in \sum_{i=1}^{n} z_i^m$ آنگاه $x\varepsilon_m y$ که نتیجه می دهد، $y \in \varepsilon_m(x)$. بنابراین،

$$\varepsilon_m(x) = \sum_{i=1}^{n} z_i^m$$

برعکس، فرض کنید $\varepsilon_m(x) = \sum_{i=1}^{n} z_i^m$، برای هر $x \in \sum_{i=1}^{n} z_i^m$ به طوری که $n \in \mathbb{N}$ و $z_1, \dots, z_n \in R$. از این رو داریم:

$$\varepsilon_m(\sum_{i=1}^{n} z_i^m) = \bigcup_{x \in \sum_{i=1}^{n} z_i^m} \varepsilon_m(x) = \sum_{i=1}^{n} z_i^m.$$

بنابراین، R یک ابرحلقه ε_m–کامل است.

حال مشخصه‌ای برای ابرحلقه های ε_m–کامل بر اساس m–بخش‌های کامل ارایه می‌کنیم:

قضیه ۳–۹: اگر R یک ابرحلقه ε_m–کامل باشد، آنگاه $\sum_{i=1}^{n} z_i^m$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $z_1, \dots, z_n \in R$، یک m–بخش کامل از R است.

برهان. برای $t \in \mathbb{N}$ و $x_1, \dots, x_t \in R$ فرض کنید

$$\sum_{i=1}^{t} x_i^m \cap \sum_{i=1}^{n} z_i^m \neq \emptyset.$$

از این رو، $y \in \sum_{i=1}^{n} z_i^m$ وجود دارد به طوری که $y \in \sum_{i=1}^{t} x_i^m$. حال برای هر $u \in \sum_{i=1}^{n} z_i^m$ داریم $u\varepsilon_m y$، که بنابر قضیه (۳–۸) نتیجه می‌شود

$$u \in \varepsilon_m(y) = \sum_{i=1}^{t} x_i^m.$$

پس، $\sum_{i=1}^{n} z_i^m \subseteq \sum_{i=1}^{t} x_i^m$. بنابراین، $\sum_{i=1}^{n} z_i^m$ یک m–بخش کامل از R است.

مثال ۳–۱۰: ابرحلقه $(R = \{0, 1\}, +, \cdot)$ تعریف شده به صورت زیر را در نظر بگیرید:

+	0	1
0	{0}	R
1	R	{1}

·	0	1
0	{0}	{0}
1	{0}	R

برای هر $2 \leq m \in \mathbb{N}$ داریم $\{0\} = 0^m \sum_{i=1}^{n}$ که یک m-بخش کامل از R نیست زیرا

$$\sum_{i=1}^{n} 1^m \cap \{0\} = R \cap \{0\} = \{0\}$$

ولی $R \nsubseteq \{0\}$. از این رو، طبق قضیه (۳-۹)، R یک ابرحلقه ε_m-کامل نیست.

مثال (۳-۱۰) نشان می‌دهد که چطور m-بخش‌های کامل می‌توانند ابزاری برای شناسایی ابرحلقه‌های ε_m-کامل باشند.

فهرست منابع

[1] F. Marty, (1934) Sur une generalization de la notion de groupe 8^{th} congres des Mathematiciens Scandinaves, Stockholm, 45-49.

[2] P. Corsini, (1993) Prolegomena of Hypergroup Theory, Second Eddition Aviani Editore.

[3] P. Corsini, V. Leoreanu-Fotea, (2003) Applications of hyperstructure theory, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[4] B. Davvaz, V. Leoreanu-Fotea, (2007) Hyperring Theory and Applications, International Academic Press, USA.

[5] T. Vougiouklis, (1994) Hyperstructures and their representations, Hadronic Press Inc., Palm Harbor.

[6] T. Vougiouklis, (1991) The fundamental relation in hyperrings. The general hyperfield, Algebraic hyperstructures and applications, Xanthi, World Sci. Publ., Teaneck, NJ., 203-211.

[7] B. Davvaz, T. Vougiouklis, (2007) Commutative rings obtained from hyperrings (H_v-rings) with α^*-relations, Communications in Algebra, 35 (11) 3307-3320.

[8] R. Ameri, T. Nozari, (2010) A new characterization of fundamental relation on hyperrings, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 5 (15) 721-738.

[9] P. Ghiasvand, S. Mirvakili, B. Davvaz, (2017) Boolean rings obtained from hyperrings with $\eta^*_{\{1,m\}}$-relation, Iranian Journal of Science and Technology, Transaction A: Science, 41 (1) 69-79.

[10] S. Mirvakili, S.M. Anvariyeh, B. Davvaz, (2008) Transitivity of Γ-relation on hyperfields, Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie, 51 (3) 233-243.

[11] M. Norouzi, I. Cristea, (2017) Fundamental relation on m-idempotent hyperrings, Open Mathematics, 15, 1558-1567.