دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و هشتم، بهمن و اسفند ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

تعمیم‌هایی از نامساوی‌های نوع چبیشف با ضرب هادامارد در فضاهای L^p شامل توابع عملگر مقدار

رودین تیموریان[۱]، امیر قاسم غضنفری[*]

(۱) دانشجوی دکتری ریاضی، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه لرستان، خرم‌آباد، ایران
(۲) دانشیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه لرستان، خرم‌آباد، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۶/۲۰   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۱۰/۱۹

چکیده

فرض‌کنید $\mathrm{B(H)}$ C^*- جبر متشکل از تمامی عملگرهای خطی و کراندار روی فضای هیلبرت مختلط H همراه با نرم عملگری باشد که دارای یک پایه متعامد یکه است. همچنین فرض‌کنید $\mathfrak{A}$ یک *- زیر جبر باناخ از $\mathrm{B(H)}$، Ω یک فضای هاسدرف فشرده همراه با اندازه رادون μ و $\alpha:\Omega\to[0,\infty)$ یک تابع انتگرال‌پذیر باشد. در این صورت ابتدا برای $1\le p\le\infty$ فضای $\mathrm{L}^p_\alpha(\Omega,\mathfrak{A})$ شامل توابع عملگرمقدارِ انتگرال‌پذیر از Ω به $\mathfrak{A}$ که نسبت به نرم تعریف شده روی آن‌ها دارای نرم متناهی هستند را معرفی می‌کنیم و سپس نشان می‌دهیم که اگر p,q مزدوج نمایی باشند و اعضای $(A_t)\in\mathrm{L}^p_\alpha(\Omega,\mathfrak{A})$ و $(B_t)\in\mathrm{L}^q_\alpha(\Omega,\mathfrak{A})$ دارای خاصیت هم‌نوایی تقریبی برای ضرب هادامارد باشند، آن‌گاه

$$\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\int_\Omega \alpha(t)\left(A_t\circ B_t\right)d\mu(t)\ge\int_\Omega \alpha(t)A_t d\mu(t)\circ\int_\Omega \alpha(t)B_t d\mu(t).$$

همچنین با استفاده از خواص تابعک خطی مثبتِ اثر که با tr نمایش داده می‌شود، یک نیم- ضرب داخلی برای توابع انتگرال‌پذیر مربعی از عملگرهای واقع در $\mathrm{L}^2_\alpha\left(\Omega,\mathrm{L}^2(\mathrm{H})\right)$ معرفی و با استفاده از آن نامساوی نوع شوارتس و چبیشف شامل ضرب هادامارد را ثابت می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: ضرب هادامارد، نامساوی عملگری، نامساوی چبیشف، نامساوی شوارتس.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: ghazanfari.a@lu.ac.ir

۱- مقدمه

فرض کنید H یک فضای هیلبرت مختلط همراه با پایه متعامد یکه $\{e_j\}$ و $\mathrm{B(H)}$ C^*- جبر متشکل از تمامی عملگرهای خطی کراندار روی H باشد. ضرب هادامارد[1] دو عملگر $A, B \in \mathrm{B(H)}$ را با $A \circ B$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle A \circ Be_i, e_j \rangle = \langle Ae_i, e_j \rangle \langle Be_i, e_j \rangle.$$

روشن است که $A \circ B = B \circ A$. ضرب هادامارد را می‌توان با پالایش حاصلضرب تانسوری $A \otimes B$ از میان یک عملگر خطی مثبت نوشت؛ یعنی

$$A \circ B = U^*(A \otimes B)U \qquad (۱.۱)$$

که در آن $U : \mathrm{H} \to \mathrm{H} \times \mathrm{H}$ ایزومتری است که با $Ue_j = e_j \otimes e_j$ تعریف می‌شود [۱]. از(۱.۱) نتیجه می‌شود:

$$\|A \circ B\| \le \|A\| \|B\|.$$

اگر $A \ge 0$ و $B \ge 0$، آن‌گاه $A \circ B \ge 0$؛ زیرا عملگرهای $C, D \in \mathrm{B(H)}$ وجود دارند به طوری که $A = C^*C$ و $B = D^*D$، بنابراین

$$A \circ B = U^*(C^*C \otimes D^*D)$$
$$= U^*(C \otimes D)^*(C \otimes D)U \ge 0.$$

برای ماتریس‌ها به سادگی می‌توان نشان داد که اگر $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$، آن‌گاه $A \circ B = (a_{ij}b_{ij})$ [۲] ؛ و این یک زیرماتریس اصلی از حاصل‌ضرب تانسوری $A \otimes B = (a_{ij}B)_{1 \le i, j \le n}$ است.

اگر $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ و $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ دنباله‌هایی حقیقی و $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ یک دنباله حقیقی نامنفی باشد. در این صورت تابع وزن‌دار چبیشف[2] به صورت زیر تعریف می‌شو:

$$T(\omega, a, b) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \sum_{j=1}^{n} \omega_j a_j b_j - \sum_{j=1}^{n} \omega_j a_j \sum_{j=1}^{n} \omega_j b_j \qquad (۲.۱)$$

در سال ۱۸۸۲، چبیشف [۳] ثابت کرد که اگر a و b هر دو صعودی یا هردو نزولی باشند، آن‌گاه $T(\omega, a, b) \ge 0$.

برای توابع انتگرال‌پذیر لبگ $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعک چبیشف زیر

$$T(f, g) := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) g(t) dt - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \, \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt.$$

شکل انتگرالی رابطه‌ی (۲.۱) است. در سال ۱۹۳۴، جی گروس[3] [۴] نشان داد که نامساوی زیر برقرار است:

$$|T(f, g)| \le \frac{1}{4}(M - m)(N - n), \qquad (۳.۱)$$

که در آن n, N, m, M اعداد حقیقی با ویژگی $-\infty < m \le f \le M < \infty$ ، $-\infty < n \le g \le N < \infty$ تقریبا همه جا رو $[a, b]$ هستند. عدد ثابت $\frac{1}{4}$ در (۳.۱) بهترین مقدار ممکن است؛ به این معنی که نمی‌توان مقدار کوچک‌تری به جای آن قرار داد و توسط

$$f(x) = g(x) = \operatorname{sgn}(x - \frac{a+b}{2})$$

به دست می‌آید.

در سال‌های اخیر چندین بسط و تعمیم برای نامساوی چبیشف ارایه شده است. برای اطلاعات بیشتر می‌توانید [۵] و مراجع آن را ببینید. این نامساوی یک تعمیم از نامساوی گروس است [۶]. تعدادی از نامساوی‌های انتگرالی از نوع چبیشف، توسط بارزا، پیرسون و سوریا[4] در [۷] ارایه شده‌اند. در [۸] تعمیمی از نامساوی‌های نوع چبیشف برای توابع پیوسته از عملگرهای خطی خودالحاق در فضاهای هیلبرت ثابت شده است.

تعدادی از مقالات نوشته شده روی این نامساوی، نامساوی‌هایی شبیه نامساوی چبیشف داده شده در (۳.۱) را ارایه نموده‌اند که شامل ضرب هادامارد عملگرهای خطی هستند [۹ و ۱۰].

مصلحیان و باخرد در [۱۰] ضرب هادامارد میدان‌های پیوسته از عملگرهای واقع در $\mathrm{C}(\Omega, \mathfrak{A})$ را با نرم

1. Hadamard
2. Chebyshev
3. G. Grüss
4. Barza , Persson and Soria

$\|(A_t)\| = \sup_{t\in\Omega}\|A_t\|$ در نظر گرفتند که در آن $\mathfrak{A}$ یک C^*– جبر از عملگرهایی است که روی یک فضای هیلبرت عمل می‌کنند. آن‌ها ثابت کردند که اگر (A_t) و (B_t) اعضای از $\mathrm{C}(\Omega,\mathfrak{A})$ با خاصیت همنوایی برای ضرب هادامارد[6] باشند، آن‌گاه

$$\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\int_\Omega \alpha(t)\left(A_t\circ B_t\right)d\mu(t) \geq \int_\Omega \alpha(t)A_t d\mu(t)\circ\int_\Omega \alpha(t)B_t d\mu(t). \tag{۴.۱}$$

نتایج بالا انگیزه‌ای شد که در این مقاله ثابت کنیم که نامساوی (۴.۱) برای فضاهای دیگری از توابع عملگر مقدار (که لزوماً پیوسته نیستند)، نیز برقرار است. علاوه بر این با استفاده از خواص تابعک خطی مثبت اثر، یک نیم‌ضرب داخلی شامل ضرب هادامارد عملگرهای خطی در یک زیر فضای مناسب از $\mathrm{B(H)}$ معرفی و با استفاده از آن چند تعمیم عملگری جدید از نامساوی‌های نوع شوارتس و چبیشف شامل ضرب هادامارد عملگرها، ارایه می‌کنیم.

قبل از بیان نتایج اصلی، یادآوری می‌کنیم که انتگرال بوخنر[۷] تعمیم یافته انتگرال لبگ برای توابعی است که مقادیر آن‌ها در یک فضای باناخ، و یا به طور کلی‌تر در یک فضای برداری توپولوژی قرار دارد. بیشتر خواص اساسی انتگرال بوخنر از خواص انتگرال‌های لبگ کلاسیک نتیجه می‌شوند [۱۱و۱۲]. برای دیدن انتگرال‌های بوخنر در C^*–جبرها [۱۳و۱۴] را ببینید. از این‌جا به بعد تمام انتگرال– های مورد بحث بوخنر هستند.

۲– نتایج اصلی

فرض‌کنید H یک فضای هیلبرت مختلط با پایه متعامد $\{e_j\}$، A یک عملگر خطی روی H، A^* عملگر الحاقی A و $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$ باشد. یادآوری می‌کنیم که نرم عملگری، نرم رده‌ی– اثر[۸] و نرم هیلبرت–اشمیت[۹] عملگر A، به ترتیب عبارت‌اند از:

$$\|A\| = \sup\{\|A(x)\| : \|x\| \leq 1\}$$

$$\|A\|_1 = \mathrm{tr}(|A|) = \sum_j \langle |A|e_j, e_j\rangle$$

$$\|A\|_2 = \left(\sum_j \|A(e_j)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

هرگاه $\|A\| < \infty$، گوییم عملگر A کراندار است و همان طوری که گفته شد، مجموعه‌ی تمام عملگرهای خطی کراندار روی H را با $\mathrm{B(H)}$ نمایش می‌دهیم. اگر $\|A\|_1 < \infty$، A یک عملگر رده‌ی–اثر نامیده می‌شود و مجموعه‌ی تمام عملگرهای رده‌ی–اثر روی H را با $\mathrm{L^1(H)}$ نمایش می‌دهیم. اگر $\|A\|_2 < \infty$، گوییم A یک عملگر هیلبرت–اشمیت است و مجموعه‌ی تمام عملگرهای هیلبرت–اشمیت را با $\mathrm{L^2(H)}$ نمایش می‌دهیم. همچنین مجموعه‌ی تمام عملگرهای رتبه–متناهی روی H را با $\mathrm{F(H)}$ و مجموعه‌ی عملگرهای فشرده روی H را با $\mathrm{K(H)}$ نمایش می‌دهیم. به سادگی می‌توان نشان داد که

$$\|A\| \leq \|A\|_1 \leq \|A\|_2$$

و $\mathrm{F(H)} \subseteq \mathrm{L^1(H)} \subseteq \mathrm{L^2(H)} \subseteq \mathrm{K(H)} \subseteq \mathrm{B(H)}$

همچنین بر $i = 1, 2$ ، $\mathrm{L}^i\mathrm{(H)}$ یک ایده‌آل در $\mathrm{K(H)}$ و $\mathrm{F(H)}$ با نرم $\|.\|_i$ در $\mathrm{L}^i\mathrm{(H)}$ چگال است [۱۵].

فرض‌کنید $\mathfrak{A}$ یک $*$–زیر جبر باناخ از $\mathrm{B(H)}$، Ω یک فضای هاسدرف فشرده همراه با اندازه رادون μ و $\alpha : \Omega \to [0,\infty)$ یک تابع انتگرال‌پذیر باشد. اگر $1 \leq p < \infty$ یک عدد حقیقی و تابع $\begin{cases} \mathrm{A} : \Omega \to \mathfrak{A} \\ t \to A_t \end{cases}$ اندازه پذیر قوی باشد، تعریف کنید:

$$|||\,\mathrm{A}\,|||_p := \left(\int_\Omega \alpha(t)\|A_t\|^p\, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}}$$

و فرض کنید $\mathrm{L}^p_\alpha(\Omega,\mathfrak{A})$ مجموعه‌ی تمام توابع A از Ω به $\mathfrak{A}$ باشد که برای آن‌ها $|||\,\mathrm{A}\,|||_p < \infty$.

---

2. Synchronous property for Hadamard product
3. Bochner
4. Trace-class
5. Hilbert-Schmidt

از آن جایی که مقادیر هر تابع عضو این فضا خانواده‌ای از عملگرهاست، از این پس به جای تابع A می‌نویسیم (A_t) و آن را یک میدان از عملگرهای در $\mathfrak{A}$ می‌نامیم. میدان (A_t) از عملگرهای در $\mathfrak{A}$ یک میدان اندازه‌پذیر کراندار اساسی است هرگاه تابع $t \to A_t$ انتگرال‌پذیر قوی باشد و $|||(A_t)|||_\infty := \operatorname{ess\ sup}\|A_t\| < \infty$. مجموعه‌ی تمام میدان‌های اندازه‌پذیر کراندار اساسی از عملگرهای در $\mathfrak{A}$ را با $\mathrm{L}_\alpha^\infty(\Omega,\mathfrak{A})$ نمایش می‌دهیم. روشن است که $\mathrm{C}(\Omega,\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{L}_\alpha^p(\Omega,\mathfrak{A})$. اگر $\mathfrak{A}$ یک ایده‌آل در $\mathrm{B(H)}$ و نرم آن پایای یکانی باشد، آن‌گاه نرم $\mathrm{L}_\alpha^p(\Omega,\mathfrak{A})$ پایای یکانی است؛ زیرا:

$$|||U(A_t)V|||_p = \left(\int_\Omega \alpha(t)\|UA_tV\|^p\, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega \alpha(t)\|A_t\|^p\, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}} = |||(A_t)|||_p .$$

تعریف ۱. فرض‌کنید Ω یک فضای هاسدرف فشرده همراه با اندازه رادون μ باشد. در این صورت:

(i) گوییم میدان‌های (A_t) و (B_t) از عملگرهای در $\mathrm{B(H)}$ دارای خاصیت همنوایی تقریبی[1] برای ضرب هادامارد است، هرگاه $(A_t - A_s)\circ(B_t - B_s) \geq 0$ تقریباً همه جا نسبت به $\mu\times\mu$.

(ii) گوییم میدان‌های (A_t) و (B_t) از عملگرهای در $\mathrm{B(H)}$ دارای خاصیت همنوایی ضعیف[2] برای ضرب هادامارد است، هرگاه برای هر تابعک خطی مثبت Λ روی $\mathrm{B(H)}$، $\Lambda\left((A_t - A_s)\circ(B_t - B_s)\right) \geq 0$ تقریباً همه جا نسبت به $\mu\times\mu$.

قضیه ۱. فرض‌کنید p و q مزدوج نمایی باشند، $1 \leq p \leq \infty$، $\mathfrak{A}$ یک باناخ $*$-جبر، Ω یک فضای هاسدرف فشرده همراه با اندازه رادون μ و $\alpha:\Omega \to [0,\infty)$ یک تابع انتگرال‌پذیر باشد. همچنین فرض‌کنید $(A_t)_{t\in\Omega}$ و $(B_t)_{t\in\Omega}$ به ترتیب میدان‌هایی در $\mathrm{L}_\alpha^p(\Omega,\mathfrak{A})$ و $\mathrm{L}_\alpha^q(\Omega,\mathfrak{A})$ با خاصیت همزمانی تقریبی هادامارد باشند. در این صورت:

$$\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\int_\Omega \alpha(t)\left(A_t\circ B_t\right)d\mu(t) \geq \left(\int_\Omega \alpha(t)A_t d\mu(t)\right)\circ\left(\int_\Omega \alpha(s)B_s d\mu(s)\right). \tag{۱.۲}$$

برهان. اگر $1 < p < \infty$ و $(A_t) \in \mathrm{L}_\alpha^p(\Omega,\mathfrak{A})$. نشان می‌دهیم انتگرال‌های (۱.۲) روی Ω انتگرال‌پذیر بوخنر هستند. این توابع انتگرال‌پذیر قوی هستند و از نامساوی $\|A\circ B\| \leq \|A\|\|B\|$ داریم:

$$\int_\Omega \alpha(t)\|A_t\circ B_t\|d\mu(t) \leq \int_\Omega \alpha(t)\|A_t\|\|B_t\|d\mu(t) \leq \left(\int_\Omega \alpha(t)\|A_t\|^p\, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_\Omega \alpha(t)\|B_t\|^q\, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{q}} = |||(A_t)|||_p|||(B_t)|||_q < \infty,$$

و

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_\Omega \alpha(t)A_t d\mu(t)\circ\int_\Omega \alpha(t)B_t d\mu(t)\right\| \leq \\
&\left\|\int_\Omega \alpha(t)A_t d\mu(t)\right\| \left\|\int_\Omega \alpha(t)B_t d\mu(t)\right\| \leq \\
&\int_\Omega \alpha(t)\|A_t\|d\mu(t)\int_\Omega \alpha(t)\|B_t\|d\mu(t) \leq \\
&\left(\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_\Omega \alpha(t)\|A_t\|^p\, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}} \times \\
&\left(\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega \alpha(t)\|B_t\|^q\, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{q}} \leq \\
&\left(\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\right)\ |||(A_t)|||_p|||(B_t)|||_q < \infty.
\end{aligned}$$

برای $p=1$ داریم:

$$\int_\Omega \alpha(t)\|A_t\circ B_t\|d\mu(t) \leq \left(\int_\Omega \alpha(t)\|A_t\|d\mu(t)\right)\left(\operatorname{ess\ sup}\|B_t\|\right) \leq |||A|||_1|||B|||_\infty \leq \infty,$$

و

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_\Omega \alpha(t)A_t d\mu(t)\circ\int_\Omega \alpha(t)B_t d\mu(t)\right\| \leq \\
&\left\|\int_\Omega \alpha(t)A_t d\mu(t)\right\|\left\|\int_\Omega \alpha(t)B_t d\mu(t)\right\| \leq \\
&\int_\Omega \alpha(t)\|A_t\|d\mu(t)\int_\Omega \alpha(t)\|B_t\|d\mu(t) \leq \\
&\int_\Omega \alpha(t)\|A_t\|d\mu(t)\int_\Omega \alpha(t)|||B_t|||_\infty\ d\mu(t) \leq \\
&\left(\int_\Omega \alpha(t)d\mu(t)\right)|||(A_t)|||_1|||(B_t)|||_\infty < \infty.
\end{aligned}$$

به طور مشابه برای $p=\infty$ داریم:

$$\int_\Omega \alpha(t)\|A_t\circ B_t\|d\mu(t) \leq |||(A)|||_\infty|||(B)|||_1 \leq \infty,$$

و

1. Almost synchronous property
2. Weakly synchronous property

$$\left\|\int_\Omega \alpha(t)A_t d\mu(t)\circ\int_\Omega \alpha(t)B_t d\mu(t)\right\| \le$$
$$\left(\int_\Omega \alpha(t)d\mu(t)\right)|||(A_t)|||_\infty |||(B_t)|||_1 < \infty.$$

حال نشان می‌دهیم که نامساوی (۱.۲) برقرار است.

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\int_\Omega \alpha(t)\left(A_t\circ B_t\right)d\mu(t)-\\&\left(\int_\Omega \alpha(t)A_t d\mu(t)\right)\circ\left(\int_\Omega \alpha(s)B_s d\mu(s)\right)=\\&\int_\Omega\int_\Omega \alpha(s)\alpha(t)\left(A_t\circ B_t\right)d\mu(t)d\mu(s)-\\&\int_\Omega\int_\Omega \alpha(t)\alpha(s)\left(A_t\circ B_t\right)d\mu(t)d\mu(s)=\\&\frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega \alpha(s)\alpha(t)(A_t-A_s)\circ\\&(B_t-B_s)d\mu(t)d\mu(s)\ge 0.\end{aligned}$$

نتیجه ۱. فرض‌کنید Ω یک فضای هاسدرف فشرده همراه با اندازه رادون μ و $\alpha:\Omega\to[0,\infty)$ یک تابع نتگرال‌پذیر باشد. اگر (A_t) و (B_t) دو میدان در $L^2_\alpha\left(\Omega, L^2(H)\right)$ با خاصیت همنوایی ضعیف برای ضرب هادامارد باشند، آن‌گاه:

$$\operatorname{tr}\left(\int_\Omega \alpha(t)A_t d\mu(t)\circ\int_\Omega \alpha(t)B_t d\mu(t)\right)\le$$
$$\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\int_\Omega \alpha(t)\operatorname{tr}\left(A_t\circ B_t\right)d\mu(t).$$

برهان. روشن است که تقریباً همه جا نسبت به $\mu\times\mu$، $\operatorname{tr}\left(\left(A_t-A_s\right)\circ\left(B_t-B_s\right)\right)\ge 0$. پس:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\int_\Omega \alpha(t)\operatorname{tr}\left(A_t\circ B_t\right)d\mu(t)-\\&\operatorname{tr}\left(\int_\Omega \alpha(t)A_t d\mu(t)\circ\int_\Omega \alpha(t)B_t d\mu(t)\right)=\\&\operatorname{tr}\Big(\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\int_\Omega \alpha(t)\left(A_t\circ B_t\right)d\mu(t)-\\&\int_\Omega \alpha(t)A_t d\mu(t)\circ\int_\Omega \alpha(t)B_t d\mu(t)\Big)=\\&\operatorname{tr}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega \alpha(t)\alpha(s)\left(A_t-A_s\right)\circ\left(B_t-B_s\right)d\mu(t)d\mu(s)\right)=\\&\frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega \alpha(t)\alpha(s)\operatorname{tr}\left((A_t-A_s)\circ(B_t-B_s)\right)d\mu(t)d\mu(s)\ge 0.\end{aligned}$$

در ادامه یک نیم‌–ضرب داخلی روی $L^2_\alpha\left(\Omega, L^2(H)\right)$ ارایه می‌دهیم. برای این منظور ابتدا گزاره ساده زیر را ثابت می‌کنیم.

گزاره ۱: برای هر $A,B\in L^2(H)$ نامساوی شوارتز زیر برقرار است:

$$\begin{aligned}\left|\operatorname{tr}(A\circ B^*)\right|^2 &\le \operatorname{tr}(A\circ A^*)\operatorname{tr}(B\circ B^*)\\&=\|1_H\circ A\|_2^2\,\|1_H\circ B\|_2^2 \qquad (۲.۲)\\&\le \|A\|_2^2\,\|B\|_2^2.\end{aligned}$$

اثبات: روشن است که اگر A یک عملگر خطی کراندار روی H و A^* عملگر الحاقی آن باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A\circ A^*)&=\operatorname{tr}(1_H\circ A\circ A^*)\\&=\operatorname{tr}\left((1_H\circ A)(1_H\circ A)^*\right)\\&=\|1_H\circ A\|_2^2\ge 0.\end{aligned}$$

این مطلب نشان می‌دهد که $\langle A,B\rangle:=\operatorname{tr}(A\circ B^*)$ یک نیم‌– ضرب داخلی روی H است. از این‌جا و نامساوی شوارتز، نامساوی (۲.۲) حاصل می‌شود.

قضیه ۲. (i) نگاشت

$$\begin{aligned}&\langle\cdot,\cdot\rangle: L^2_\alpha(\Omega,L^2(H))\times L^2_\alpha(\Omega,L^2(H))\to\mathbb{C},\\&\langle(A_t),(B_t)\rangle:=\\&\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\int_\Omega \alpha(t)\operatorname{tr}\left(A_t\circ B_t^*\right)d\mu(t)- \qquad (۳.۲)\\&\operatorname{tr}\left(\int_\Omega \alpha(t)A_t d\mu(t)\circ\int_\Omega \alpha(t)B_t^* d\mu(t)\right),\end{aligned}$$

یک نیم‌– ضرب داخلی روی $L^2_\alpha\left(\Omega, L^2(H)\right)$ است و نامساوی زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}&\Big|\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\int_\Omega \alpha(t)\operatorname{tr}\left(A_t\circ B_t\right)d\mu(t)-\\&\operatorname{tr}\left(\int_\Omega \alpha(t)A_t d\mu(t)\circ\int_\Omega \alpha(t)B_t d\mu(t)\right)\Big|\le \qquad (۴.۲)\\&\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\,|||(A_t)|||\ \ |||(B_t)|||-\\&\left\|1_H\circ\int_\Omega \alpha(t)A_t d\mu(t)\circ\int_\Omega \alpha(t)B_t d\mu(t)\right\|_2.\end{aligned}$$

(ii) فرض‌کنید $(A_t),(B_t)\in L^2_\alpha\left(\Omega, L^2(H)\right)$ و $A,B\in L^2(H)$، در این صورت:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\times\int_\Omega \alpha(t)(A_t-A)\circ(B_t-B)^*d\mu(t)-\\&\int_\Omega \alpha(t)(A_t-A)d\mu(t)\circ\int_\Omega \alpha(t)(B_t-B)^*d\mu(t)= \qquad (۵.۲)\\&\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\int_\Omega \alpha(t)A_t\circ B_t^*d\mu(t)-\\&\int_\Omega \alpha(t)A_t d\mu(t)\circ\int_\Omega \alpha(t)B_t^*d\mu(t).\end{aligned}$$

اثبات: (i) اگر $(A_t),(B_t)\in L^2_\alpha\left(\Omega, L^2(H)\right)$ باشد، نشان می‌دهیم که انتگرال‌های (۳.۲) روی Ω انتگرال‌پذیر بوخنر هستند. این توابع به طور قوی اندازه‌پذیرند و بنا بر نامساوی (۲.۲) داریم:

$$\int_\Omega \alpha(t)\,\mathrm{tr}(A_t\circ B_t^*)d\mu(t)\le \int_\Omega \alpha(t)\|A_t\|_2\|B_t\|_2\,d\mu(t)\le$$
$$\left(\int_\Omega \alpha(t)\|A_t\|_2^{\,2}d\mu(t)\right)^{\frac12}\times\left(\int_\Omega \alpha(t)\|B_t\|_2^{\,2}d\mu(t)\right)^{\frac12}=$$
$$|||(A_t)|||\ \ |||(B_t)|||<\infty.$$

همچنین داریم:

$$\mathrm{tr}\left(\int_\Omega \alpha(t)A_t\,d\mu(t)\circ\int_\Omega \alpha(t)B_t^*d\mu(t)\right)\le$$
$$\left\|\int_\Omega \alpha(t)A_t\,d\mu(t)\right\|_2\left\|\int_\Omega \alpha(t)B_t^*d\mu(t)\right\|_2\le$$
$$\int_\Omega \alpha(t)\|A_t\|_2\,d\mu(t)\int_\Omega \alpha(t)\|B_t^*\|_2\,d\mu(t)\le$$
$$\left(\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega \alpha(t)\|A_t\|_2^{\,2}d\mu(t)\right)^{\frac12}\times$$
$$\left(\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega \alpha(t)\|B_t^*\|_2^{\,2}d\mu(t)\right)^{\frac12}\le$$
$$\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\,|||(A_t)|||\ \ |||(B_t)|||<\infty.$$

سادگی می‌توان نشان داد که $\langle\cdot,\cdot\rangle$ یک نیم‌-ضرب داخلی روی $L^2_\alpha\left(\Omega,L^2(H)\right)$ است. بنابراین نامساوی شوارتز زیر نتیجه می‌شود:

$$\left|\langle(A_t),(B_t)\rangle\right|\le\langle(A_t),(A_t)\rangle\langle(B_t),(B_t)\rangle \quad (۶.۲)$$

از طرف دیگر

$$\langle(A_t),(A_t)\rangle=\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\times$$
$$\int_\Omega \alpha(t)\,\mathrm{tr}(A_t\circ A_t^*)d\mu(t)-$$
$$\mathrm{tr}\left(\int_\Omega \alpha(t)A_t\,d\mu(t)\circ\int_\Omega \alpha(t)A_t^*d\mu(t)\right)=$$
$$\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\int_\Omega \alpha(t)\left\|1_H\circ A_t\right\|_2^{\,2}\,d\mu(t)- \quad (۷.۲)$$
$$\left\|1_H\circ\int_\Omega \alpha(t)A_t\,d\mu(t)\right\|_2^{\,2}\le$$
$$\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\,|||(A_t)|||^2-$$
$$\left\|1_H\circ\int_\Omega \alpha(t)A_{td\mu(t)}\right\|_2^{\,2}.$$

به طور مشابه

$$\langle(B_t),(B_t)\rangle\le\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\,|||(B_t)|||^2 \quad (۸.۲)$$
$$-\left\|1_H\circ\int_\Omega \alpha(t)B_t\,d\mu(t)\right\|_2^{\,2}.$$

با استفاده از نامساوی‌های (۷.۲)، (۸.۲) و (۶.۲) و نامساوی مقدماتی زیر برای اعداد حقیقی

$$(m^2-n^2)(p^2-q^2)\le(mp-nq)^2$$

نامساوی مورد نظر در (۴.۲) حاصل می‌شود.

(ii) فرض کنید $(A_t),(B_t)\in L^2_\alpha\left(\Omega,L^2(H)\right)$ و $A,B\in L^2(H)$. در این صورت:

$$\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\times\int_\Omega \alpha(t)(A_t-A)\circ(B_t-B)^*d\mu(t)-$$
$$\int_\Omega \alpha(t)(A_t-A)d\mu(t)\circ\int_\Omega \alpha(t)(B_t-B)^*d\mu(t)=$$
$$\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\int_\Omega \alpha(t)\left(A_t\circ B_t^*-A_t\circ B^*\right.$$
$$\left.-A\circ B_t^*+A\circ B^*\right)d\mu(t)-$$
$$\left(\int_\Omega \alpha(t)A_t\,d\mu(t)-A\int_\Omega \alpha(t)d\mu(t)\right)\circ$$
$$\left(\int_\Omega \alpha(t)B_t^*d\mu(t)-B^*\int_\Omega \alpha(t)d\mu(t)\right)=$$
$$\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\int_\Omega \alpha(t)A_t\circ B_t^*d\mu(t)-$$
$$\int_\Omega \alpha(t)A_t\,d\mu(t)\circ\int_\Omega \alpha(t)B_t^*d\mu(t).$$

قضیه ۳. اگر $(A_t),(B_t)\in L^2_\alpha\left(\Omega,L^2(H)\right)$ و بردارهای $A,A',B,B'\in L^2(H)$ وجود داشته باشند به طوری که

$$|||(A_t)-\frac{A'+A}{2}|||=|||(A_t-\frac{A'+A}{2})|||\le\frac12|||A'-A|||, \quad (۹.۲)$$
$$|||(B_t)-\frac{B'+B}{2}|||=|||(B_t-\frac{B'+B}{2})|||\le\frac12|||B'-B|||.$$

در این صورت نامساوی زیر برقرار است

$$\left|\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\int_\Omega \alpha(t)\,\mathrm{tr}\left(A_t\circ B_t\right)d\mu(t)-\right.$$
$$\left.\mathrm{tr}\left(\int_\Omega \alpha(t)A_t\,d\mu(t)\circ\int_T \alpha(t)B_t\,d\mu(t)\right)\right|\le \quad (۱۰.۲)$$
$$\frac14\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\,|||A'-A|||\ \ |||B'-B|||-$$
$$\left\|\int_\Omega \alpha(t)\,1_H\circ(A_t-\frac{A'+A}{2})\circ(B_t-\frac{B'+B}{2})d\mu(t)\right\|_2$$

ضریب $\frac{1}{4}$ در نامساوی (۱۰.۲) ظریف[1] است؛ یعنی نمی‌توان آن را با مقدار کوچک‌تری جایگزین نمود.

اثبات: با استفاده از رابطه‌ی (۵.۲) اگر $A_t=B_t$ و به جای A و B قرار دهیم $\frac{A'+A}{2}$، آن‌گاه:

1. Sharp

$$\begin{aligned}
\langle (A_t),(A_t)\rangle &= \int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\int_\Omega \alpha(t)\,\mathrm{tr}\left(A_t\circ A_t^*\right)d\mu(t) - \\
&\mathrm{tr}\left(\int_\Omega \alpha(t)A_t d\mu(t)\circ \int_\Omega \alpha(t)A_t^* d\mu(t)\right) = \\
&\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\times \int_\Omega \alpha(t)\,\mathrm{tr}\left((A_t-\frac{A'+A}{2})\circ\right. \\
&\left.(A_t-\frac{A'+A}{2})^*\right)d\mu(t) - \mathrm{tr}\left(\int_\Omega \alpha(t)(A_t-\frac{A'+A}{2})d\mu(t)\circ\right. \\
&\left.\int_\Omega \alpha(t)(A_t-\frac{A'+A}{2})^* d\mu(t)\right) = \\
&\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\times\int_\Omega \alpha(t)\left\|1_{\mathrm{H}}\circ(A_t-\frac{A'+A}{2})\right\|_2^2 d\mu(t) - \\
&\left\|1_{\mathrm{H}}\circ\int_\Omega \alpha(s)(A_t-\frac{A'+A}{2})d\mu(t)\right\|_2^2 \le \\
&\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\,|||\,(A_t)-\frac{A'+A}{2}\,|||^2 - \\
&\left\|1_{\mathrm{H}}\circ\int_\Omega \alpha(s)(A_t-\frac{A'+A}{2})d\mu(t)\right\|_2^2
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\langle (A_t),(A_t)\rangle &\le \frac{1}{4}|||A'-A|||^2\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s) - \\
&\left\|\int_\Omega \alpha(s)1_{\mathrm{H}}\circ(A_t-\frac{A'+A}{2})d\mu(t)\right\|_2^2 .
\end{aligned} \tag{۱۱.۲}$$

به طور مشابه

$$\begin{aligned}
\langle (B_t),(B_t)\rangle &\le \frac{1}{4}|||B'-B|||^2\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s) - \\
&\left\|\int_\Omega \alpha(s)1_{\mathrm{H}}\circ(B_t-\frac{B'+B}{2})d\mu(t)\right\|_2^2 .
\end{aligned} \tag{۱۲.۲}$$

با توجه به نامساوی شوارتز در رابطه‌ی (۶.۲) و نامساوی‌های (۱۱.۲) و (۱۲.۲)، نامساوی (۱۰.۲) به دست می‌آید. حال فرض‌کنید که نامساوی (۱۰.۲) با ثابت $C>0$ حاصل شود؛ یعنی

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s)\int_\Omega \alpha(t)\,\mathrm{tr}\left(A_t\circ B_t^*\right)d\mu(t) - \right. \\
&\left.\mathrm{tr}\left(\int_\Omega \alpha(t)A_t d\mu(t)\circ\int_\Omega \alpha(t)B_t^* d\mu(t)\right)\right| \le \\
&C\,|||A'-A|||\ \ |||B'-B|||\int_\Omega \alpha(s)d\mu(s).
\end{aligned} \tag{۱۳.۲}$$

حال فرض کنید $\{e_j\}$ یک پایه متعامد برای فضای هیلبرت H و $P_{\mathrm{H}_1}:\mathrm{H}\to\mathrm{H}_1$ یک تصویر متعامد با رتبه یک به روی زیرفضای H_1 تولید شده توسط $\{e_{j_1}\}$ باشد. روشن است که $\mathrm{tr}(P_{\mathrm{H}_1})=1$ و $P_{\mathrm{H}_1}\circ P_{\mathrm{H}_1}=P_{\mathrm{H}_1}$. اگر قرار دهیم $\alpha:\Omega=[0,1]\to\mathbb{R}$، $\alpha(t)=1$ و

$$A_t=B_t=\begin{cases}-P_{\mathrm{H}_1} & 0\le t\le 0/5\\ P_{\mathrm{H}_1} & 0/5<t\le 1\end{cases} \tag{۱۴.۲}$$

آن‌گاه روشن است که $(A_t)\in \mathrm{L}_\alpha^2\left(\Omega,\mathrm{L}^2(\mathrm{H})\right)$ اما پیوسته نیست؛ زیرا اگر برای tهایی که به اندازه‌ی کافی به t_0 نزدیک‌اند $\sup_{t\in\Omega}\left\|A_t-A_{t_0}\right\|<\varepsilon$، آن‌گاه:

$$\left\|P_{H_1}+A_{t_0}\right\|\le \sup_{t\in\Omega}\left\|A_t-A_{t_0}\right\|<\varepsilon \quad ,$$
$$\left\|P_{H_1}-A_{t_0}\right\|\le \sup_{t\in\Omega}\left\|A_t-A_{t_0}\right\|<\varepsilon .$$

بنابراین

$$\left\|A_{t_0}\right\|\le\frac{1}{2}\left\|P_{H_1}+A_{t_0}\right\|+\frac{1}{2}\left\|P_{H_1}-A_{t_0}\right\|<\varepsilon .$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $A_{t_0}=0$ و این با $|||(A_t)|||=\sup_{t\in\Omega}\|A_t\|=1$ در تناقض است. با انتخاب $A=B=-P_{H_1}$ و $A'=B'=P_{H_1}$ و اندازه لبگ μ روی Ω شرایط (۱۱.۲) حاصل می‌شود. حال از (۱۳.۲) نتیجه می‌شود $C\ge\frac{1}{4}$ و بدین ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

نتیجه ۲. اگر $A_1,A_2,\cdots,A_n$ و $B_1,B_2,\cdots,B_n$ عملگرهایی در $\mathrm{L}^2(\mathrm{H})$ و $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ اعداد حقیقی مثبتی باشند. آن‌گاه:

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^n\omega_i\sum_{i=1}^n\omega_i\,\mathrm{tr}(A_i\circ B_i)-\mathrm{tr}(\sum_{i=1}^n\omega_iA_i\circ\sum_{i=1}^n\omega_iB_i)\right|\le \\
&\sum_{i=1}^n\omega_i\sum_{i=1}^n\omega_i\left\|A_i\right\|_2\left\|B_i\right\|_2-\left\|1_{\mathrm{H}}\circ\sum_{i=1}^n\omega_iA_i\circ\sum_{i=1}^n\omega_iB\right\|_2 .
\end{aligned}$$

اثبات:

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^n\omega_i\sum_{i=1}^n\omega_i\,\mathrm{tr}(A_i\circ B_i)-\mathrm{tr}\left(\sum_{i=1}^n\omega_iA_i\circ\sum_{i=1}^n\omega_iB_i\right)\right|\le \\
&\sum_{i=1}^n\omega_i\sum_{i=1}^n\omega_i\left\|1_{\mathrm{H}}\circ A_i\right\|_2\left\|1_{\mathrm{H}}\circ B_i\right\|_2 - \\
&\left\|1_{\mathrm{H}}\circ\sum_{i=1}^n\omega_iA_i\right\|_2\left\|1_{\mathrm{H}}\circ\sum_{i=1}^n\omega_iB_i\right\|_2 \\
&\le\sum_{i=1}^n\omega_i\sum_{i=1}^n\omega_i\left\|A_i\right\|_2\left\|B_i\right\|_2-\left\|1_{\mathrm{H}}\circ\sum_{i=1}^n\omega_iA_i\circ\sum_{i=1}^n\omega_iB_i\right\|_2 .
\end{aligned}$$

مثال ۱. فرض‌کنید $\left\{e_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه برای فضای هیلبرت جدایی‌پذیر H و H_n زیرفضایی از H باشد که توسط بردارهای $e_1, e_2, \cdots, e_n$ تولید می‌شود. همچنین فرض‌کنید $P_{\mathrm{H}_n}:\mathrm{H}\to\mathrm{H}_n$ تصویر متعامد به روی H_n و

$$\alpha:\Omega=[0,1]\to \mathbb{R}\ ,\ \alpha(t)=1.$$

روشن است که $\mathrm{tr}(P_{H_n})=\mathrm{rank}(\mathrm{H}_n)=n$ و $P_{\mathrm{H}_n}\circ P_{\mathrm{H}_m}=P_{\mathrm{H}_{n\wedge m}}$ که در آن $n\wedge m=\min\{m,n\}$.

اگر $m\geq 1$ و $(A_t)\in \mathrm{L}_{\alpha}^2\left(\Omega,\mathrm{L}^2(\mathrm{H})\right)$، آن‌گاه:

$$\left|\int_0^1 t^{m-1}\,\mathrm{tr}\left(P_{\mathrm{H}_n}\circ A_t\right)dt-\frac{1}{m}\mathrm{tr}\left(P_{\mathrm{H}_n}\circ\int_0^1 A_t dt\right)\right| \leq\sqrt{\frac{n}{2m-1}-\frac{n}{m^2}}\,|||\,(A_t)\,|||,$$

و

$$\left|\int_0^1 e^t\,\mathrm{tr}\left(P_{\mathrm{H}_n}\circ A_t\right)dt-(e-1)\,\mathrm{tr}\left(P_{\mathrm{H}_n}\circ\int_0^1 A_t dt\right)\right|\leq \sqrt{\frac{n(e-1)(3-e)}{2}}\,|||\,(A_t)\,|||.$$

از نامساوی (۶.۲)، برای $B_t=t^{m-1}P_{\mathrm{H}_n}$، داریم:

$$\left|\int_0^1 t^{m-1}\,\mathrm{tr}\left(P_{\mathrm{H}_n}\circ A_t\right)dt-\mathrm{tr}\left(\int_0^1 t^{m-1}P_{\mathrm{H}_n}dt\circ\int_0^1 A_t dt\right)\right|^2\leq$$
$$\left(\int_0^1\mathrm{tr}\left(t^{2m-2}P_{\mathrm{H}_n}\right)dt-\mathrm{tr}\left(\int_0^1 t^{m-1}P_{\mathrm{H}_n}dt\circ\int_0^1 t^{m-1}P_{\mathrm{H}_n}dt\right)\right)\times$$
$$\left(\int_0^1\mathrm{tr}(A_t^*\circ A_t)dt-\mathrm{tr}\left(\int_0^1 A_t^* dt\circ\int_0^1 A_t dt\right)\right)\leq$$
$$\left(\frac{n}{2m-1}-\frac{n}{m^2}\right)\int_0^1\mathrm{tr}(A_t^*\circ A_t)dt.$$

بنابراین

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\int_0^1 t^{m-1}\,\mathrm{tr}\left(P_{\mathrm{H}_n}\circ A_t\right)dt-\frac{1}{m}\mathrm{tr}\left(P_{\mathrm{H}_n}\circ\int_0^1 A_t dt\right)\right|\leq\sqrt{\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{m^2}}\,|||\,(A_t)\,|||,$$

و درنتیجه

$$\left|\int_0^1 t^{m-1}\,\mathrm{tr}\left(P_{\mathrm{H}_n}\circ A_t\right)dt-\frac{1}{m}\mathrm{tr}\left(P_{\mathrm{H}_n}\circ\int_0^1 A_t dt\right)\right|=o(\sqrt{n}).$$

حال برای $B_t=e^t P_{\mathrm{H}_n}$ از نامساوی (۶.۲) داریم:

$$\left|\int_0^1 e^t\,\mathrm{tr}(P_{\mathrm{H}_n}\circ A_t)dt-\mathrm{tr}(\int_0^1 e^t P_{\mathrm{H}_n}dt\circ\int_0^1 A_t dt)\right|^2\leq$$
$$\left[\int_0^1\mathrm{tr}\left(e^{2t}P_{\mathrm{H}_n}\right)dt-\mathrm{tr}\left(\int_0^1 e^t P_{\mathrm{H}_n}dt\circ\int_0^1 e^t P_{\mathrm{H}_n}dt\right)\right]\times$$
$$\left[\int_0^1\mathrm{tr}\left(A_t^*\circ A_t\right)dt-\mathrm{tr}\left(\int_0^1 A_t^* dt\circ\int_0^1 A_t dt\right)\right]\leq$$
$$\frac{n(e-1)(3-e)}{2}\int_0^1\mathrm{tr}\left(A_t^*\circ A_t\right)dt.$$

بنابراین

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\int_0^1 e^t\,\mathrm{tr}\left(P_{\mathrm{H}_n}\circ A_t\right)dt-(e-1)\,\mathrm{tr}\left(P_{\mathrm{H}_n}\circ\int_0^1 A_t dt\right)\right|\leq\sqrt{\frac{(e-1)(3-e)}{2}}\,|||\,(A_t)\,|||,$$

و درنتیجه

$$\left|\int_0^1 e^t\,\mathrm{tr}\left(P_{\mathrm{H}_n}\circ A_t\right)dt-(e-1)\,\mathrm{tr}\left(P_{\mathrm{H}_n}\circ\int_0^1 A_t dt\right)\right|=o(\sqrt{n}).$$

فهرست منابع

[1] T. Furuta, J. Mićić Hot, J. J. Pečarić and Y. Seo, *Mond-J. Pečarić Method in Operator Inequalities. Inequalities for Bounded Selfadjoint Operators on a Hilbert Space*, Element, Zagreb, 2005.

[2] G.P.H. Styan, *Hadamard product and multivariate statistical analysis*, Linear Algebra Appl. **6** (1973), 217-240.

[3] P.L. Chebyshev, *O približennyh vyraženijah odnih integralov čerez drugie,* in: Soobŝćenija i protokoly zasedanĭ Matemmati-českogo občestva pri Imperatorskom Har'kovskom Universitete, No. 2, 1882, pp. 93-98; Polnoe sobranie sočinenĭ P.L. Chebyshev, MoskvaLeningrad, 1948, pp. 128-131.

[4] G. *Grüss*, *Über das Maximum des absoluten Betrages von* $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx$, Math. Z. **39** (1934), 215-226.

[5] S. S. Dragomir, *Operators inequalities of the Jensen, Čebyŝev and Grüss type*, SpringerBriefs in Mathematics, Springer, New York, 2012. MR2866026.

[6] M.S. Moslehian and R. Rajić, *Grüss inequality for n-positive linear maps*, Linear Algebra Appl. **433** (2010), 1555-1560.

[7] S. Barza, L.-E. Persson and J. Soria, *Sharp weighted multidimensional integral inequalities of Chebyshev type*, J. Math. Anal. Appl. **236**(2) (1999) 243-253.

[8] M. W. Alomari, Pompeiu –Čebyŝev *type inequalities for selfadjoint operators in Hilbert spaces*, Adv. Oper. Theory 3 (2018), no 3, 459-472. MR3795049.

[9] R. Drnovšck, A. Peperko, *Inequalitieson the spectral radius and the operator norm of Hadamard products of positive operators on sequence*, Banach J. Math. Anal. 10(2016), no. 4, 800-814. Mr3548627.

[10] M.S. Moslehian and M. Bakharad, *Chebyshev type inequality for Hilbert space operators*, J. Math. Anal. Appl. **420** (2014), 737-749.

[11] J. Diestel and JR. J. J. Uhl, *Vector measures, with a foreword by B. J. Pettis, Mathematical Surveys,* No. 15, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1977.

[12] J. Mikusiński, *The Bochner Integral*, Birkhauser Verlag Basel, 1978.

[13] F. Bahrami, A. Bayati Eshkaftaki and S. M. Manjegani, *Operator-valued Bochner integrable functions and Jensen's inequality*, Georgian Math. J.**20**, (2013), 625-640.

[14] X. Li and W. Wu, *Operator Jensen's inequality on C*-algebras*, Acta Mathematica Sinica, English Series Jan. **30**(1) (2014), 35-50.

[15] J. G. Murphy, *C*-algebras and operator theory*, Academic Press, Boston, 1990.