



یک روش عددی براساس چندجمله‌ای‌های چلیشکوف برای حل معادلات دیفرانسیل - انتگرال از مرتبه کسری

رضا دهقان*

استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مسجد سلیمان، گروه ریاضی، مسجد سلیمان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۰۵/۱۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۱۰/۲۹

چکیده

در این مقاله، بسط تقریبی چلیشکوف برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرال ولترای از مرتبه‌ی کسری که مشتق کسری آن از نوع کپوتو است، ارائه شده است. با استفاده از خواص چندجمله‌ای‌های چلیشکوف و فرمول انتگرال‌گیری عددی، حل معادلات دیفرانسیل-انتگرال کسری به حل دستگاه معادلات جبری تقلیل یافته است. سپس با حل دستگاه معادلات جبری، جواب معادله دیفرانسیل-انتگرال کسری به صورت تابعی برحسب چندجمله‌ای‌های چلیشکوف نمایش داده می‌شود. همچنین، نتایج روش حاضر را با نتایج برخی از روش‌های موجود به جهت اعتبار، دقت و کارایی تکنیک مورد بررسی و مقایسه قرار داده‌ایم.

واژه‌های کلیدی: حسابان کسری، مشتق کسری کپوتو، معادلات دیفرانسیل-انتگرال ولترای چندجمله‌ای‌های متعامد.

۱- مقدمه

حسابان کسری، به عنوان تعمیمی برای حسابان کلاسیک، از آن دسته مباحث در ریاضیات است که کاربرد گسترده‌ای از آن در سال‌های اخیر در علوم و مهندسی مشاهده شده است. مهمترین شاخصه حسابان کسری، وجود مشتق و انتگرال توابع از هر مرتبه دلخواه است. همانطور که می‌دانیم، برای مشتق و انتگرال از مرتبه صحیح در حسابان کلاسیک تفاسیر فیزیکی و هندسی روشنی وجود دارد. اما درباره‌ی مشتق و انتگرال از مرتبه‌ی کسری تفسیری فیزیکی یا هندسی که به طور کامل مورد قبول همه باشد وجود ندارد [۱]. ولی با این وجود در مدل‌سازی بسیاری از مسایل مهم، مشتق و انتگرال از مرتبه کسری کارایی خوبی از خود نشان داده‌اند. از جمله می‌توان از کاربرد حسابان کسری در اقتصاد [۲]، نظریه کنترل [۳]، رباتیک [۴]، کوانتوم و مکانیک آماری [۵]، بیولوژی [۶] نام برد. از آنجا که مدل‌سازی مسایل نام برده شده در نهایت ختم به معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری و معادلات دیرانسیل-انتگرال از مرتبه کسری می‌شود لذا آنچه در بین این مسایل نظر پژوهشگر در زمینه ریاضیات را جلب می‌کند چگونگی حل معادلات دیفرانسیل و معادلات دیرانسیل - انتگرال از مرتبه کسری است. اما چون اکثر این نوع معادلات به طور تحلیلی قابل حل نیستند استفاده از روش‌های عددی و بدست آوردن جواب تقریبی از اهمیت بسزایی برخوردار است. با کمی جستجو مشاهده می‌شود که روش‌های عددی متنوعی در حل معادلات دیفرانسیل-انتگرال کسری ارائه شده‌اند که از جمله آنها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

روش گردایه‌ای لژاندر [۱]، استفاده از روش تجزیه آدومین [۸و۷]، روش مبتنی بر هموتوبی [۹]، روش عملگری تقریب [۱۰-Tau]، روش تکرار تغییرات [۱۱]، روش ترکیب تفاضلات پیشرو و پسرو [۱۲]، روش تبدیل دیفرانسیل کسری [۱۳] و بالاخره روش گردایه‌ای اسپلین [۱۴].

استفاده از چند جمله‌ای‌های متعامد یکی از تکنیک‌های رایج در حل تقریبی برخی مسایل مطرح در آنالیز عددی

نظیر معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال است. یک دسته از چند جمله‌ای‌های متعامد که قدمت کمتری در میان چند جمله‌ای‌های متعامد دارد، چند جمله‌ای‌های چلیشکوف است.

در این مقاله، می‌خواهیم معادلات دیفرانسیل - انتگرال کسری به صورت

$$D^q u(x) = G\left(x, u(x), \int_0^x K(x, t, u(t)) dt\right), \quad (1)$$

$$0 < x < 1, q > 0$$

با شرایط اولیه یا مرزی را با یک روش عددی مبتنی چند جمله‌ای‌های چلیشکوف حل کنیم. لذا یکی از اهداف ما در این پژوهش معرفی چند جمله‌ای‌های چلیشکوف و نشان دادن کارایی آنها در حل عددی مسایل آنالیز عددی یا به طور کلی مسایل مطرح در ریاضیات کاربردی است. ایده اصلی حل مسأله (۱)، به این صورت است که ابتدا تقریبی از تابع $u(x)$ را برحسب یک تعداد متناهی (مثلاً n تا) از چند جمله‌ای‌های چلیشکوف با ضرایب مجهول در نظر می‌گیریم. سپس با انتخاب یک تعداد مشخص از نقاط از $[0, 1]$ و اعمال شرایط اولیه یا مرزی یک دستگاه معادلات جبری به دست می‌آید و با حل دستگاه جبری ضرایب مجهول در تقریب تابع $u(x)$ محاسبه می‌شوند. سپس با محاسبه میزان خطا تصمیم می‌گیریم که آیا $u(x)$ بدست آمده تقریب خوبی برای جواب مسأله هست یا نه؟

ساختار مقاله به این شرح است که در ادامه بیان می‌گردد. در بخش دوم، معرفی مختصری از مشتق مرتبه‌ی کسری صورت گرفته است. معرفی چند جمله‌ای‌های چلیشکوف و خواص آنها در بخش سوم آمده است. تقریب تابع توسط چند جمله‌ای‌های چلیشکوف و اثر مشتق کسری روی چند جمله‌ای‌های چلیشکوف به ترتیب در بخش‌های چهارم و پنجم بیان شده است. در بخش ششم، روش یافتن جواب شرح داده شده است. در بخش هفتم، بحث مختصری درباره‌ی دقت جواب و تحلیل خطا صورت گرفته است. نتایج عددی در بخش هشتم و بالاخره نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادات در بخش نهم آمده‌اند.

چلیشکوف در [۱۷] معرفی شده است. هدف ما در این بخش معرفی مختصر این نوع از چند جمله‌ای‌های متعامد است.

چند جمله‌ای‌های چلیشکوف نسبت به تابع وزنی $w(x) = 1$ روی فاصله $[0,1]$ متعامد هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$P_m(x) = \sum_{j=m}^M a_{j,m} x^j, \quad (2)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, M$$

که در آن

$$a_{j,m} = (-1)^{j-m} \binom{M-m}{j-m} \binom{M+j+1}{M-m}$$

همچنین، نمایش ماتریسی چندجمله‌ای‌های چلیشکوف بصورت زیر است.

$$\begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_M(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{1,0} & a_{2,0} & \dots & a_{M,0} \\ 0 & a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{M,1} \\ 0 & 0 & a_{2,2} & \dots & a_{M,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{M,M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^M \end{pmatrix}$$

یا بطور ساده تر می‌توان نوشت $P = A_{j,M} X$ و شرایط تعامد آنها عبارت است از

$$\int_0^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{1}{m+n+1} & m = n \end{cases}$$

برای مثال به ازای $M = 4$ چندجمله‌ای‌های چلیشکوف عبارتند از:

$$P_0(x) = 5 - 60x + 210x^2 - 280x^3 + 126x^4,$$

$$P_1(x) = 20x - 105x^2 + 168x^3 - 84x^4,$$

$$P_2(x) = 21x^2 - 56x^3 + 64x^4,$$

$$P_3(x) = 8x^3 - 9x^4,$$

$$P_4(x) = x^4,$$

بنابراین این چند جمله‌ای‌ها دارای نمایش ماتریسی به صورت زیر می‌باشند.

۲- مشتق از مرتبه‌ی کسری

برای مشتق از مرتبه کسری تعاریف مختلفی وجود دارد که از جمله‌ی آنها می‌توان به مشتقات از مرتبه کسری ریمان - لیوویل، گرانوالد-لتنیکوف و کپوتو اشاره کرد. اما از بین مشتق‌های مرتبه کسری، مشتق کپوتو بیشتر مورد استفاده قرار گرفته است. یکی از دلایل استفاده گسترده مشتق کپوتو این است که شرایط اولیه و مرزی در معادلات دیفرانسیل با مشتق کسری کپوتو شبیه شرایط موجود در معادلات دیفرانسیل با مشتق غیر کسری هستند. لذا در این مقاله از مشتق کسری کپوتو استفاده شده است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱- مشتق کسری کپوتو از مرتبه q عبارت است از [۱۵]

$$D^q y(x) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_0^x \frac{y^{(n)}(t)}{(x-t)^{q+1-n}} dt, \quad n-1 < q \leq n, n \in \mathbb{N}$$

که در آن n کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از q است. برای مشتق کپوتو خاصیت‌های زیر را می‌توان ثابت کرد [۱۶].

(۱) اگر C عددی ثابت باشد آنگاه

$$D^q C = 0 \quad (2)$$

$$D^q x^\alpha = \begin{cases} 0 & \alpha \in \mathbb{N}_0 \text{ and } \alpha < [q] \\ \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-q)} x^{\alpha-q} & (\alpha \in \mathbb{N}_0 \text{ and } \alpha \geq [q]) \text{ or } (\alpha \notin \mathbb{N} \text{ and } \alpha > [q]) \end{cases}$$

که در آن $[q]$ یعنی کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی با q و $[q]$ یعنی بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی با q . همچنین $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ و $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

(۳) مشتق گیری کسری کپوتو یک عملگر خطی است یعنی $D^q(\lambda f + \mu g) = \lambda D^q f + \mu D^q g$ که در آن λ, μ ثابت هستند.

۳- چند جمله‌ای‌های چلیشکوف

چند جمله‌ای‌های متعامد چلیشکوف برای اولین بار توسط

$$c_j = (2j + 1) \int_0^1 u(x) P_j(x) dx, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

همانطور که می‌دانیم در محاسبات عددی فقط یک تعداد متناهی از جملات سری (۳) را در نظر می‌گیریم. بنابراین اگر سری (۳) $(n + 1)$ جمله‌ی اول را نگه داریم، خواهیم داشت

$$u_n(x) = \sum_{j=0}^n c_j P_j(x) = C^T P, \quad (۴)$$

که در آن P, C بردارهای $(n + 1)$ تایی بصورت زیر هستند.

$$C = [c_0, c_1, \dots, c_n], \quad P = [P_0, P_1, \dots, P_n].$$

تذکره ۱: با در نظر گرفتن روابط (۲) و (۴) بدیهی است که برای جایگذاری چندجمله‌ای‌های چلیشکوف در رابطه (۴) باید $M = n$ باشد.

۵- اثر مشتق کسری بر روی چندجمله‌ای‌های چلیشکوف

در این بخش می‌خواهیم طرز محاسبه مشتق کسری کیوتو را برای تابع $u(x)$ که بصورت بسطی متناهی از چندجمله‌ای‌های چلیشکوف است، را در قالب قضیه‌ای بیان کنیم.

$$\begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ P_2(x) \\ P_3(x) \\ P_4(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -60 & 210 & -280 & 126 \\ 0 & 20 & -105 & 168 & -84 \\ 0 & 0 & 21 & -56 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix}$$

و همچنین برای $i, j = 0, 1, 2, 3, 4$ داریم

$$\int_0^1 P_i(x) P_j(x) dx = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

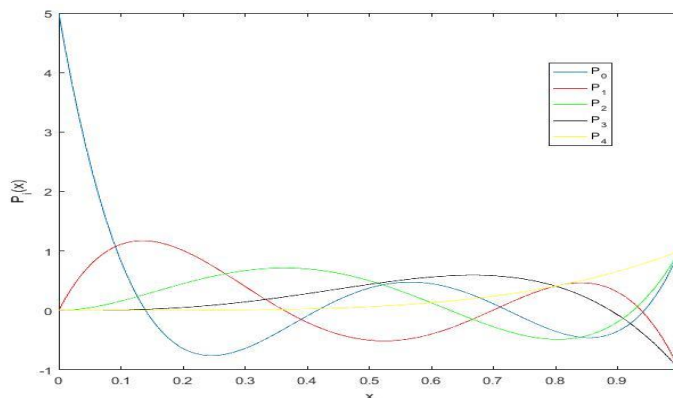
در شکل ۱ می‌توان رفتار چندجمله‌ای‌های چلیشکوف را در بازه $[0, 1]$ مشاهده کرد.

۴- تقریب تابع

فرض کنیم که $u(x)$ تابعی باشد که بطور مطلق در $[0, 1]$ انتگرال‌پذیر باشد آنگاه می‌توان توسط چندجمله‌ای‌های چلیشکوف تابع $u(x)$ را به صورت زیر بسط داد

$$u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j P_j(x), \quad (۳)$$

که در آن ضرایب c_j توسط رابطه‌ی زیر بدست می‌آیند.



شکل ۱: رفتار چندجمله‌ای‌های چلیشکوف

۶- روش یافتن جواب

در این بخش برای بدست آوردن تقریبی از جواب (۱) از قضیه ۱ و رابطه (۴) استفاده می‌کنیم. برای انجام این کار، (۴) و (۵) را در (۱) جایگذاری می‌کنیم و بنابراین داریم

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=[q]}^n c_i a_{j,i} x^{j-q} - G(x, \sum_{i=0}^n c_i P_i(x), \int_0^x K(x, t, \sum_{i=0}^n c_i P_i(t)) dt) = 0, \quad (8)$$

سپس با انتخاب $(n+1 - [q])$ نقطه $x_k \in [0, 1]$ و جایگذاری آنها در (۸) دستگاه معادلات جبری زیر را بدست می‌آوریم.

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=[q]}^n c_i a_{j,i} x_k^{j-q} - G\left(x_k, \sum_{i=0}^n c_i P_i(x_k), \int_0^{x_k} K(x_k, t, \sum_{i=0}^n c_i P_i(t)) dt\right) = 0 \quad (9)$$

تذکره ۲: برای انتخاب x_k ها می‌توان از ریشه‌های چند جمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته به $[0, 1]$ استفاده کرد. همچنین باید از فرمول انتگرال‌گیری عددی بجای انتگرال‌های موجود در (۹) استفاده کرد. لازم بذکر است که با استفاده از نرم افزار متلب نیازی به برنامه نویسی جداگانه برای فرمول انتگرال‌گیری عددی نیست.

در آخر با اضافه کردن $[q]$ شرایط اولیه یا مرزی به (۹)، به یک دستگاه $(n+1)$ معادله و $(n+1)$ مجهولی که لزوماً خطی نیستند، دست پیدا می‌کنیم و سپس با حل دستگاه بدست آمده c_i ها بدست آمده و با جایگذاری آنها در (۴)، تقریبی از جواب مسأله یعنی $u(x)$ محاسبه می‌شود.

۷- دقت جواب و تحلیل خطا

دقت روش پیشنهادی را می‌توان به آسانی مورد بررسی قرار داد. با توجه به اینکه سری قطع شده چلیشکوف (۴)، تقریبی از جواب مسأله‌ی (۱) است. لذا وقتی جواب تقریبی بدست آمده $u_n(x)$ را در معادله‌ی (۱)

قضیه ۱- فرض کنیم $u(x)$ تابعی باشد که توسط چند جمله‌ای‌های چلیشکوف به صورت $u_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i P_i(x)$ تقریب‌زده شده باشد و همچنین فرض کنیم که $q > 0$ آنگاه داریم

$$D^q(u_n(x)) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=[q]}^n c_i a_{j,i} \frac{j!}{\Gamma(j-q+1)} x^{j-q} \quad (5)$$

که در آن $a_{j,i} = (-1)^{j-i} \binom{n-i}{j-i} \binom{n+j+1}{n-i}$ و D^q یعنی مشتق کسری کپوتو از مرتبه‌ی q .

اثبات: با توجه به خطی بودن مشتق کپوتو داریم

$$D^q(u_n(x)) = \sum_{i=0}^n c_i D^q(P_i(x)), \quad (6)$$

و با توجه به خواص مشتق کسری کپوتو واضح است که $D^q x^j = 0, j = 0, 1, \dots, [q]-1$ بنابراین برای $j = [q], \dots, n$ داریم،

$$D^q P_i(x) = \sum_{j=[q]}^n a_{j,i} D^q x^j = \sum_{j=[q]}^n a_{j,i} \frac{j!}{\Gamma(j-q+1)} x^{j-q}, \quad (7)$$

بنابراین با جایگذاری (۷) در (۶) حکم ثابت می‌شود.

مثال: فرض کنیم $u(x) = 1 + x + x^2$ در این صورت با انتخاب $M = 2$ داریم

$$1 + x + x^2 = \frac{1}{3} P_0(x) + \frac{5}{4} P_1(x) + \frac{47}{12} P_2(x),$$

بنابراین با توجه به قضیه ۱ می‌توان نوشت

$$D^{\frac{1}{3}}(1 + x + x^2) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=1}^2 c_i a_{j,i} \frac{j!}{\Gamma(j-\frac{1}{3}+1)} x^{j-\frac{1}{3}}$$

و سپس با جایگذاری $c_i, a_{j,i}$ حاصل مجموع‌های فوق عبارتند از:

$$D^{\frac{1}{3}}(1 + x + x^2) = \frac{1}{\Gamma(\frac{5}{3})} x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{\Gamma(\frac{8}{3})} x^{\frac{5}{3}}.$$

مقایسه‌ای بین نتایج بدست آمده از روش تقریب چلیشکوف با بعضی از روش‌های دیگر مثل، روش تکراری هموتویی [۹]، روش گردایه‌ای مبتنی بر چند جمله‌ای‌های لژاندر [۱]، روش [۱۴] و روش عملگری تقریب [۱۰-Tau]، صورت گرفته است.

تمامی محاسبات به کمک نرم افزار MATLAB2016 انجام شده است. تخمین میزان خطای مطلق در جدول‌های مختلف در نقاط انتخابی با استفاده از رابطه‌ی زیر می‌باشد.

$$E_n(x) = |u(x) - u_n(x)|.$$

مثال ۱- معادله دیفرانسیل - انتگرال ولترای زیر

$$D^q u(x) = 1 - \int_0^x u(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq q \leq 1$$

با شرط اولیه $u(0) = 0$ را در نظر بگیرید [۹].

جواب دقیق به ازای $q = 1$ برابر است با $u(x) = \sin(x)$.

برای مقایسه با جواب دقیق ابتدا این مثال را با انتخاب $q = 1, n = 10$ حل کردیم و جواب تقریبی بدست آمده عبارت است از:

$$u_{10}(x) = 0.0045P_1(x) + 0.0227P_2(x) + 0.0636P_3(x) + 0.1359P_4(x) + 0.2479P_5(x) + 0.4061P_6(x) + 0.6146P_7(x) + 0.8736P_8(x) + 1.1769P_9(x) + 1.5107P_{10}(x).$$

در جدول ۱ مقایسه بین جواب تقریبی و جواب دقیق نشان داده شده است. در جدول ۲ مقایسه بین میزان خطای مطلق روش این مقاله و روش مطرح شده در [۹] صورت گرفته است. در شکل ۲ نتایج بدست به ازای q های مختلف نشان داده شده است.

جایگذاری می‌کنیم باید به طور تقریبی در (۱) صدق کند. یعنی برای هر انتخاب دلخواه $x_p \in [0,1]$ خواهیم داشت

$$E(x_p) = \left| D^q u_n(x_p) - G\left(x_p, u_n(x_p), \int_0^{x_p} K(x_p, t, u_n(t)) dt \right) \right| \cong 0$$

و این یعنی $E(x_p) \leq 10^{-\varepsilon}$. عبارت دیگر با افزایش مقدار n به اندازه‌ی کافی می‌توانیم به دقت مورد نظر $\varepsilon > 0$ دست یابیم.

به طور خلاصه می‌توان مراحل حل معادله دیفرانسیل - انتگرال کسری را با الگوریتم زیر بیان کنید.

الگوریتم: مراحل حل معادلات دیفرانسیل - انتگرال با تقریب چلیشکوف

۱. ابتدا مقدار ε دقت مورد نیاز را تعیین می‌کنیم.
۲. سپس مقدار n را مشخص کرده و سری (۴) را مشخص می‌کنیم.
۳. با انتخاب $(n+1 - [q])$ نقطه در $[0,1]$ ، روابط (۹) را تشکیل می‌دهیم.
۴. با اعمال شرایط اولیه یا مرزی در کنار روابط بدست آمده در مرحله‌ی قبل دستگاه معادلات جبری را بدست می‌آوریم.
۵. با حل دستگاه بدست آمده در مرحله ۳، ضرایب مجهول در (۴) محاسبه می‌شوند.
۶. اگر $E(x_p) \leq 10^{-\varepsilon}$ برقرار بود به جواب رسیدیم و گرنه به مرحله ۲ می‌رویم و مقدار n را افزایش می‌دهیم.

۸- مثال‌های عددی و نتایج محاسباتی

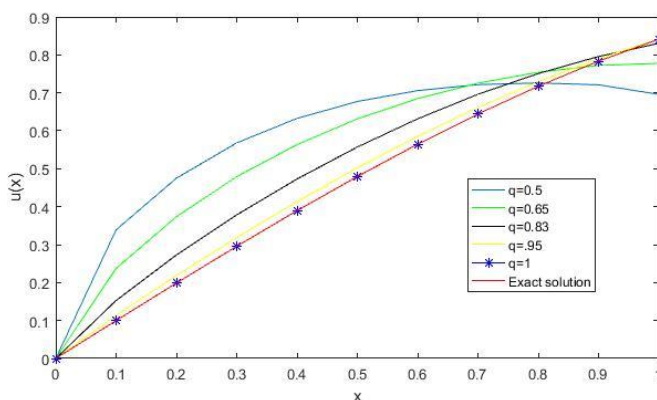
در این بخش، چند مثال عددی برای نشان دادن کارایی روش مطرح شده در این مقاله ارائه شده است. همچنین

جدول ۱: مقایسه بین جواب‌های تقریبی و دقیق به ازای $q = 1$ و $n = 10$ برای مثال ۱.

x	جواب تقریبی	جواب دقیق
0	0	0
0.2	0.1986693307953	0.1986693307951
0.4	0.3894183423088	0.3894183423086
0.6	0.5646424733950	0.5646424733952
0.8	0.7173560908995	0.7173560908997
1	0.8414709848078	0.8414709848808

جدول ۲: مقایسه بین خطای مطلق بین روش تقریب چلیشکوف و روش در [۹]، برای مثال ۱.

x	خطای مطلق تقریب چلیشکوف	خطای مطلق روش [۹]
0	0	0
0.2	2.4946×10^{-13}	2.6000×10^{-9}
0.4	2.2271×10^{-13}	3.2420×10^{-7}
0.6	2.1406×10^{-13}	5.5266×10^{-6}
0.8	1.8216×10^{-13}	4.124×10^{-5}
1	1.4431×10^{-13}	1.9568×10^{-4}



شکل ۲: نتایج بدست آمده برای $u(x)$ به ازای مقادیر مختلف q برای مثال ۱.

مقاله و روش [۹] به ترتیب در جدول‌های ۳ و ۴ آمده است. همچنین نتایج بدست آمده به ازای مقادیر مختلف q در شکل ۳ نشان داده شده است.

مثال ۳- سومین معادله که در [۱۴و۱] آمده است عبارت است از

$$D^q u(x) = x(1 + e^x) + 3e^x + u(x) - \int_0^x u(x) dx, 0 < x < 1, 3 < q \leq 4$$

با شرایط مرزی

$$u(0) = 1, \quad u''(0) = 2, \\ u(1) = 1 + e, \quad u''(1) = 3e.$$

جواب دقیق برای این مثال به ازای $q = 4$ برابر است با $u(x) = 1 + xe^{-x}$

در این مثال جواب بدست آمده بر اساس چندجمله‌ای‌های چلیشکوف به ازای $n = 13$ و $q = 4$ عبارت است از:

مثال ۲- معادله دیفرانسیل - انتگرال ولترای دیگری که برای نشان دادن کارایی روش مطرح شده در این مقاله انتخاب کردیم، عبارت است از

$$D^q u(x) = 1 + \int_0^x (x-t)u(t) dt, \\ 0 \leq x \leq 1, 1 \leq q \leq 2$$

با شرایط اولیه $u(0) = 1, u'(0) = 0$ [۹].

جواب دقیق به ازای $q = 2$ برابر است با $u(x) = \cosh(x)$

به ازای $n = 10$ و $q = 2$ جواب بدست آمده برحسب چندجمله‌ای‌های چلیشکوف به صورت زیر است.

$$u_{10}(x) = 0.0909P_0(x) + 0.2727P_1(x) + \\ 0.4549P_2(x) + 0.6390P_3(x) + 0.8286P_4(x) + \\ 1.0300P_5(x) + 1.2530P_6(x) + 1.5127P_7(x) + \\ 1.8306P_8(x) + 2.2374P_9(x) + 2.7768P_{10}(x).$$

مقایسه بین جواب تقریبی بدست آمده و جواب دقیق و همچنین مقایسه میزان خطای مطلق بین روش این

دقیق و روش ارائه شده در [۱۴] را نشان می‌دهند. شکل ۴ هم $u(x)$ را به ازای q های مختلف نشان می‌دهد. از آنجا که این مثال در [۱] نیز آمده است و با توجه به این که دقت روش این مقاله با دقت روش در [۱] تقریباً یکسان بوده است لذا از آوردن جدول محاسبات خودداری کرده‌ایم.

$$u_{10}(x) = 0.0714P_0(x) + 0.2164P_1(x) + 0.3683P_2(x) + 0.5323P_3(x) + 0.7152P_4(x) + 0.9253P_5(x) + 1.1744P_6(x) + 1.4782P_7(x) + 1.8584P_8(x) + 2.3454P_9(x) + 2.9819P_{10}(x) + 3.8285P_{11}(x) + 4.9709P_{12}(x) + 6.5327P_{13}(x).$$

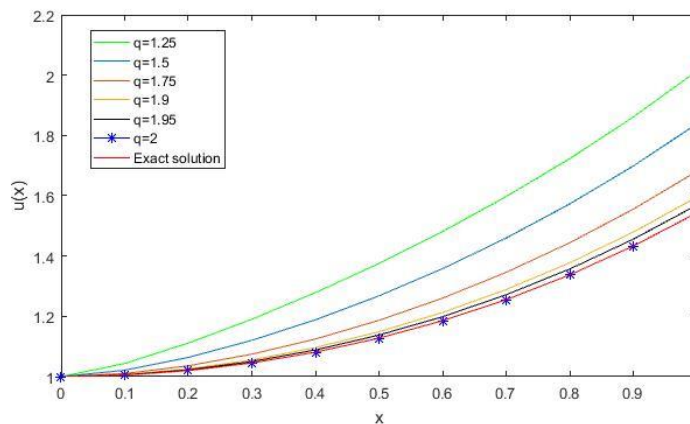
مشابه مثال‌های قبل جدول‌های ۵ و ۶ مقایسه با جواب

جدول ۳: مقایسه بین جواب‌های تقریبی و دقیق به ازای $q = 2$ و $n = 10$ برای مثال ۲.

x	جواب تقریبی	جواب دقیق
0	1	1
0.2	1.0200667556191	1.0200667556190
0.4	1.08107237183844	1.08107237183845
0.6	1.1854652182423	1.1854652182422
0.8	1.337434946305	1.337434946304
1	1.5430806348155	1.5430806348152

جدول ۴: مقایسه بین خطای مطلق بین روش تقریبی چلیشکوف و روش در [۹]، برای مثال ۲.

x	خطای مطلق تقریب چلیشکوف	خطای مطلق روش [۹]
0	0	0
0.2	2.8662×10^{-14}	1.8500×10^{-7}
0.4	8.7813×10^{-15}	1.3230×10^{-5}
0.6	5.1235×10^{-13}	1.7709×10^{-4}
0.8	3.8683×10^{-13}	0.0012
1	3.3936×10^{-13}	0.0056



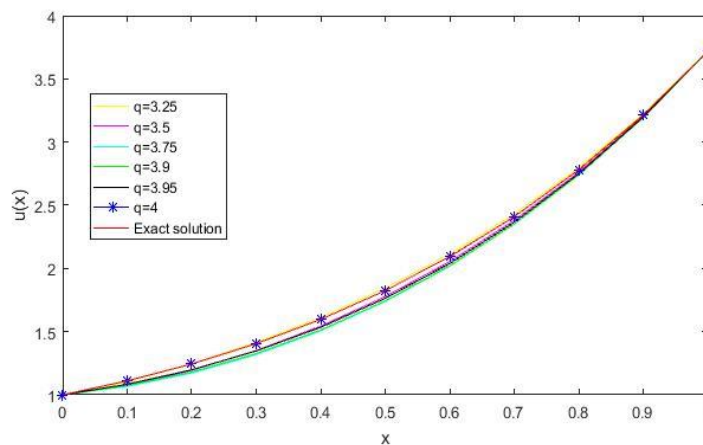
شکل ۳: نتایج بدست آمده برای $u(x)$ به ازای مقادیر مختلف q برای مثال ۲.

جدول ۵: مقایسه بین جواب های تقریبی و دقیق به ازای $q = 4$ و $n = 13$ برای مثال ۳.

x	جواب تقریبی	جواب دقیق
0	1	1
0.1	1.11051709182	1.11051709180
0.2	1.24428055167	1.24428055163
0.3	1.40495764233	1.40495764227
0.4	1.59672987913	1.59672987905
0.5	1.82436063543	1.82436063535
0.6	2.09327128032	2.09327128023
0.7	2.40962689531	2.40962689522
0.8	2.78043274285	2.78043274279
0.9	3.21364280007	3.21364280004
1	3.71828182845	3.71828182845

جدول ۶: مقایسه بین خطای مطلق بین روش تقریبی چلیشکوف و روش در [۱۴]، برای مثال ۳.

x	خطای مطلق تقریب چلیشکوف	خطای مطلق روش [۱۴]
0	0	0
0.1	1.9735×10^{-12}	1.0783×10^{-4}
0.2	4.0438×10^{-12}	2.0835×10^{-4}
0.3	5.9287×10^{-11}	2.9428×10^{-4}
0.4	7.4524×10^{-11}	3.5837×10^{-4}
0.5	8.4451×10^{-11}	3.9363×10^{-4}
0.6	8.7309×10^{-11}	3.9361×10^{-4}
0.7	8.1282×10^{-11}	3.5327×10^{-4}
0.8	6.4453×10^{-11}	2.7047×10^{-4}
0.9	3.6116×10^{-11}	1.4845×10^{-4}
1	3.8371×10^{-33}	1.5409×10^{-9}



شکل ۴: نتایج بدست آمده برای $u(x)$ به ازای مقادیر مختلف q برای مثال ۳.

با انتخاب $n=10$ و $q=2$ جواب تقریبی به صورت تابع زیر زیر است.

$$u_{10}(x) = 0.0045P_1(x) + 0.0227P_2(x) + 0.0636P_3(x) + 0.1359P_4(x) + 0.2479P_5(x) + 0.4061P_6(x) + 0.6146P_7(x) + 0.8736P_8(x) + 1.1769P_9(x) + 1.5107P_{10}(x).$$

همچنین جدول‌های ۷ و ۸ نتایج عددی بدست آمده را ارائه می‌کنند. شکل ۵ هم نتایج بدست با تغییر مقدار q را نشان می‌دهد.

مثال ۴- در این مثال یک معادله دیفرانسیل-انتگرال غیرخطی را در نظر می‌گیریم.

$$D^q u(x) = x^3(-1 + e^{\sin(x)}) - \sin(x) - \int_0^x x^3 \cos(t) e^{u(t)} dt, x > 0, 1 < q \leq 2,$$

که شرایط اولیه برای آن عبارت است از $[10]u'(0) = 1, u(0) = 0$.

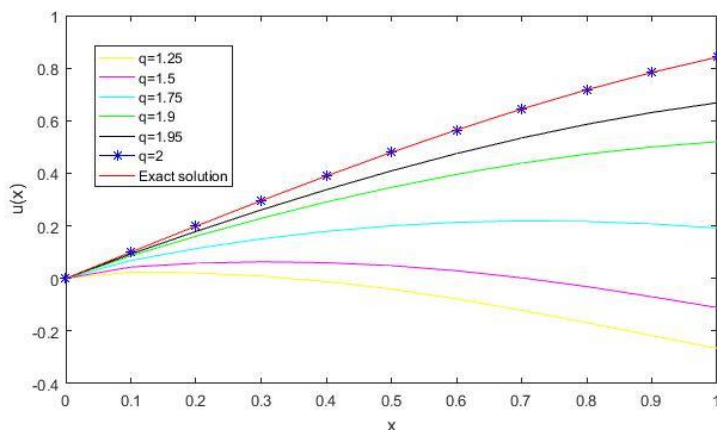
جواب دقیق برای این مثال به ازای $q=2$ برابر است با $u(x) = \sin(x)$.

جدول ۷: مقایسه بین جواب‌های تقریبی و دقیق به ازای $q=2$ و $n=10$ برای مثال ۴.

x	جواب تقریبی	جواب دقیق
0	0	0
0.1	0.099833416646	0.099833416646
0.2	0.198669330794	0.198669330795
0.3	0.295520206660	0.295520206661
0.4	0.389418342307	0.389418342308
0.5	0.479425538602	0.479425538604
0.6	0.564642473393	0.564642473395
0.7	0.644217687235	0.644217687237
0.8	0.717356090897	0.717356090899
0.9	0.783326909625	0.783326909627
1	0.841470984805	0.841470984807

جدول ۸: مقایسه بین خطای مطلق بین روش تقریبی چلیشکوف و روش در $[10]$ برای مثال ۴.

x	خطای مطلق تقریب چلیشکوف	خطای مطلق روش $[10]$
0	0	0
0.1	2.8394×10^{-13}	1.9838×10^{-11}
0.2	5.5662×10^{-13}	2.5382×10^{-9}
0.3	8.5420×10^{-13}	4.3338×10^{-8}
0.4	1.1165×10^{-13}	3.2435×10^{-7}
0.5	1.3791×10^{-13}	1.5447×10^{-6}
0.6	1.6094×10^{-12}	5.5266×10^{-6}
0.7	1.7939×10^{-12}	1.6229×10^{-5}
0.8	1.9885×10^{-12}	4.1242×10^{-5}
0.9	2.1965×10^{-12}	9.3840×10^{-5}
1	2.4416×10^{-12}	1.9568×10^{-4}



شکل ۵: نتایج بدست آمده برای $u(x)$ به ازای مقادیر مختلف q برای مثال ۴.

نتیجه‌گیری و ارایه پیشنهادات

با استفاده از خواص چندجمله‌ای‌های چلیشکوف و فرمول‌های انتگرال‌گیری عددی، حل معادلات دیفرانسیل-انتگرال ولترای از مرتبه‌ی کسری به حل دستگاه معادلات جبری کاهش یافته است. مشتق کسری ظاهر شده در معادلات دیفرانسیل - انتگرال از نوع کپوتو بوده است. نشان داده شده است که در دو حالت مسائل با شرایط اولیه و مرزی روش مطرح شده قابل استفاده است. جواب بدست آمده با روش مطرح شده در این مقاله نسبت به بعضی از روش‌های دیگر از دقت خوبی برخوردار است. موضوعی که برای پژوهش‌های بعدی می‌توان در نظر گرفت حل عددی معادلات دیفرانسیل-انتگرال از مرتبه کسری متغیر می‌باشد که کمتر به آن پرداخته شده است.

[9] Neamaty, A., Agheli, B., Darzi, R., Numerical solution of high-order fractional Volterra integro-differential equations by variational homotopy perturbation iteration method, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, (2015) doi:10.1115/1.4030062

[10] S. Karimi Vanani, A. Aminataei., Operational Tau approximation for a general class of fractional integro-differential equations, *Computational & Applied Mathematics*, **30** (3) (2011) 655-674.

[11] Inc, M., The approximate and exact solutions of the space- and time-fractional Burgers equations with initial conditions by variational iteration method, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **345** (2008) 476–484.

[12] Al-Jamal, M.F., Rawashde, E.A., The Approximate Solution of Fractional Integro- Differential Equations. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, **4** (2009) 1067–1078.

[13] Nazari, D., Shahmorad, S., Application of the fractional differential transform method to fractional-order integro-differential equations with nonlocal boundary conditions., *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **234** (2010) 883–891.

[14] Pedas, A., Tamme, E., Spline collocation method for integro-differential equations with weakly singular kernels. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **197** (2006) 253–269.

[15] Podlubny, I., *Fractional differential equations*. Academic Press, San Diego., (1999)

[16] Diethelm, K., Ford, N.J., Freed, A.D., Luchko, Y., Algorithms for the

فهرست منابع

[1] Saadatmandi, A., and Dehghan, M., A Legendre collocation method for fractional integro-differential equations, *Journal of Vibration and Control*, **17(13)** (2011) 2050–2058.

[2] Baillie, R.T., Long memory processes and fractional integration in econometrics. *Journal of Econometrics*, **73** (1996) 5–59.

[3] Bohannan, G.W., Analog fractional order controller in temperature and motor control applications. *Journal of Vibration and Control*, **14** (2008) 1487–1498.

[4] Debnath, L., Recent applications of fractional calculus to science and engineering. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, (2003) 3413–3442.

[5] Mainardi, F., Fractional calculus: Some basic problems in continuum and statistical mechanics. In: Carpinteri A and Mainardi F (eds) *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*. New York: Springer-Verlag., (1997) 291–348.

[6] Mohammadi, F., Moradi, L., Numerical treatment of fractional-order nonlinear system of delay integro-differential equations arising in biology., *Asian-European Journal of Mathematics*, **12(1)** (2019) DOI: 10.1142/S1793557119500682

[7] Momani, S., Noor, M.A., Numerical methods for fourth order fractional integro-differential equations, *Appl. Math. Comput.*, **182** (2006) 754-760.

[8] Hashim, I., Adomian decomposition method for solving BVPs for fourth-order integro-differential equations, *J. Comput. Appl. Math.*, **193** (2006) 658-664.

fractional calculus: A selection of numerical methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.*, **194** (2005) 743–773.

[17] Chelyshkov, V.S., Alternative orthogonal polynomials and quadratures., *Electron. Trans. Numer. Anal.* **25** (7) (2006) 17–26.

