دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره بیست و نهم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

K–قاب از ضربگرها در فضاهای C*-pro-مدول هیلبرتی

مونا نارویی ایرانی[۱]، اکبر نظری[۲*]

(۱) گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرمان، کرمان، ایران.
(۲) گروه ریاضی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۰۶/۰۹   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۱۲/۰۵

چکیده

گاوارتا برای مطالعه‌ی سیستم‌های اتمی که اولین بار توسط فیشتینگر و همکارانش معرفی شده بود، K–قاب‌ها روی فضاهای هیلبرت را ارائه کرد. K–قاب‌ها نوعی از قاب‌ها هستند، که کران پایین آنها فقط برای عناصر برد عملگر خطی کراندار K در فضای هیلبرت برقرار است. C* جبری که توپولوژی آن به جای یک C*–نرم توسط خانواده‌ای از C*–نیم‌نرم‌های پیوسته القا شود C*-pro-جبر می‌نامند. فضاهای C*-pro–مدول هیلبرتی تعمیمی از فضاهای هیلبرت است، هرگاه ضرب داخلی مقادیر بیشتری را از اعداد مختلط، یعنی مقادیری از C*-pro–جبر اختیار کند. در این مقاله دنباله‌ای که عناصر آن عملگرهای الحاق‌پذیر از C*-pro-جبر به فضای C*-pro–مدول هیلبرتی است، را دنباله ضربگرها می‌نامیم. مفهوم سیستم‌های اتمی و K–قاب از ضربگرها در فضاهای C*-pro–مدول هیلبرتی را معرفی می‌کنیم و برای تفهیم بیشتر مثالی از K–قاب‌ها را ارائه می‌دهیم. شرطی که دنباله‌ای از ضربگرها قاب باشد، را به‌دست می‌آوریم و ارتباط سیستم‌های اتمی و K–قاب‌ها با یکدیگر و قاب از ضربگرها را بررسی می‌کنیم. اگر K عملگری کراندار با شرایطی خاص باشد هر K–قاب یک قاب از ضربگرها در فضای C*-pro–مدول هیلبرتی است. همچنین برخی خواص این مفاهیم مانند ترکیب عملگرها با K–قاب‌ها در فضای C*-pro–مدول هیلبرتی را تحقیق می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: C*-pro–مدول هیلبرتی، سیستم های اتمی، قاب از ضربگرها، K–قاب از ضربگرها.

* عهده دار مکاتبات: Email: nazari@uk.ac.ir

۱. مقدمه

قاب‌ها تعمیمی از پایه‌های متعامد در فضاهای هیلبرت هستند. مفهوم قاب برای فضای هیلبرت در سال ۱۹۵۲ توسط دافین و شیفر [۱]، برای مطالعه‌ی مسائل مربوط به سری‌های فوریه‌ی ناهمساز مطرح شد. این مفهوم تا سال ۱۹۸۶ چندان مورد توجه ریاضیدانان نبود در این سال مقاله‌ی تاثیرگذاری توسط دابیچیز و همکارانش [۲] به چاپ رسید. مفهوم g-قاب‌ها توسط سان [۳] و مفهوم قاب‌های زیر فضایی توسط کاسازا و کاتینوک در [۴] ارائه گردیده است. در سال ۲۰۱۹ رشیدی بر روی g-قاب‌های کنترل شده و قاب‌های زیرفضایی کنترل شده در فضاهای C*-مدول هیلبرتی مطالعاتی انجام داد و نتایج مفیدی در این زمینه مطرح کرد [۵].

در سال ۲۰۰۲ با در نظر گرفتن حاصل‌ضرب‌های داخلی با مقادیر در C^*-جبرها مفهوم قاب‌ها در فضای هیلبرت مدول توسط فرانک و لارسن [۶] معرفی شد. در سال‌های اخیر دهقان و همکارانش g-قاب‌ها، دوگان آنها و برخی خواص این قاب‌های خاص را در فضای C^*–مدول هیلبرتی بررسی کردند. در نهایت آنها g-قاب‌های پیوسته را پیشنهاد دادند [۷ و ۸ و ۹].

در سال ۲۰۰۳ رابرن و تامسون [۱۰] نکات بیشتری از فضاهای C^*–مدول هیلبرتی شمارا تولید شده را در نظر گرفتند که منجر به تولید مدول ضربگر شد. در نتیجه قاب‌های استاندارد از ضربگرها[1] را در فضاهای C^* – مدول معرفی و خواص اساسی آن‌ها را اثبات کردند. در سال ۲۰۱۹ نارویی و نظری [۱۱]،*-قاب‌های استاندارد از ضربگرها را در فضاهای هیلبرت مدولی روی C*-pro–جبرها پیشنهاد دادند. و اخیراً در [۱۲] قاب‌های بافته[2] شده از ضربگرها در فضاهای C*- مدول هیلبرتی توسط نارویی معرفی شده‌اند.

سیستم‌های اتمی برای اولین بار توسط فیشتینگر و وردر [۱۳] بررسی شدند. در سال ۲۰۱۱ گاوارتا [۱۴] تعمیمی از قاب‌ها را برای مطالعه تجزیه سیستم‌های اتمی و بحث بر روی برخی خواص آنها معرفی کرد که در آنها کران‌های پایین قاب فقط برای عناصر برد عملگرهای کراندار برقرار بود و این مفهوم را K–قاب نامید.

در این مقاله ما K -قاب از ضربگرها در فضاهای C*-pro– مدول هیلبرتی را معرفی و برخی خواص آنها را بررسی می‌کنیم.

۲. مقدمات و پیش‌نیازها

در این بخش تعاریف و خواصی از C*-pro–جبرها و فضای هیلبرت مدول روی C*-pro- جبرها را یادآوری می‌کنیم. برای مطالعه بیشتر خواننده را به منبع [۱۵] ارجاع می‌دهیم.

تعریف ۱.۲. C*-pro–جبر $\mathcal{A}$ یک توپولوژیکال *–جبر هاسدورف کامل مختلط است، که توپولوژی آن القا شده به وسیله C*- نیم‌نرم‌های پیوسته به‌طوری که در آن خانواده $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ همگرا به صفر است اگر و تنها اگر $\rho(a_\lambda)$ همگرا به صفر باشد. همچنین برای هر C*-نیم‌نرم ρ روی $\mathcal{A}$ و برای هر $a,b\in\mathcal{A}$ داشته باشیم:

1. $\rho(ab)\le\rho(a)\rho(b)$,
2. $\rho(aa^*)=\rho(a)^2$

نکته ۲.۲. مجموعه همه نیم‌نرم‌های پیوسته ρ روی $\mathcal{A}$ را با نماد $S(\mathcal{A})$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۲. هرگاه $\mathcal{A}$ یک C*-pro – جبر و E یک $\mathcal{A}$– مدول (راست) و ساختار خطی داده شده روی $\mathcal{A}$ و E با هم سازگار باشد، یعنی به‌ازای هر $a\in\mathcal{A}$، $\lambda\in\mathbb{C}$ و $x\in E$ داشته باشیم $(xa)\lambda=(x\lambda)a$. همچنین فرض کنید نگاشت $\langle .,.\rangle:\ \mathbb{E}\times\mathbb{E}\to\mathcal{A}$ با ویژگی زیر موجود باشد:

۱) به‌ازای هر $x\in\mathbb{E}$، $\langle x,x\rangle\ge 0$؛
۲) به‌ازای هر $x,y\in\mathbb{E}$، $\langle x,y\rangle^*=\langle y,x\rangle$؛
۳) $\langle x,x\rangle=0$ اگر و تنها اگر $x=0$.

در این صورت فضای برداری E را $\mathcal{A}$–مدول هیلبرتی

1. Multipliers
2. Woven frame of multipliers

یا (C*-pro – مدول هیلبرتی روی جبر $\mathcal{A}$) می‌نامیم، اگر E نسبت به توپولوژی القا شده از خانواده نیم‌نرم‌های $\bar{\rho}_E(x)=\sqrt{\rho(\langle x,x\rangle)}\quad x\in E,\ \rho\in S(\mathcal{A}),$ کامل باشد.

فرض کنید E و F دو فضای $\mathcal{A}$– مدول هیلبرتی باشند. یک نگاشت $T:E\to F$ پیوسته است، اگر به‌ازای هر $\rho\in S(\mathcal{A})$ وجود داشته باشد $C_\rho>0$ به‌طوری که به‌ازای هر $x\in E$

$$\bar{\rho}_F(Tx)\le C_\rho\bar{\rho}_E(x).$$

به‌ازای هر $x,y\in E$ نامساوی کشی– شوارتز از منبع [۱۵] یادآوری می‌شود.

$$\rho(\langle x,y\rangle)^2\le\rho(\langle x,x\rangle)\rho(\langle y,y\rangle).$$

عملگر T از E به F الحاق‌پذیر است اگر یک نگاشت $T^*:F\to E$ موجود باشد، به‌طوری که برای هر $x\in E$ و $y\in F$ داشته باشیم

$$\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle.$$

مجموعه همه عملگرهای الحاق‌پذیر از E به F را با نماد L(E,F) نشان می‌دهیم اگر E=F در این صورت از نماد L(E) استفاده می‌شود.

تعریف ۴.۲.[۱۶] عملگر T از E به F را یکنواخت کراندار (پایین) می‌نامیم هرگاه وجود داشته باشد C >۰ به‌طوری که برای هر $\rho\in S(\mathcal{A})$، داشته باشیم:

$$\bar{\rho}_F(Tx)\le C\,\bar{\rho}_E(x),\quad\forall x\in E,\qquad(1.2)$$

$$(\bar{\rho}_F(Tx)\ge C\,\bar{\rho}_E(x),\quad\forall x\in E.)\qquad(2.2)$$

و همچنین

$$\hat{\rho}_F(T):=\sup\{\bar{\rho}_F(T(x)):x\in E,\ \bar{\rho}_E(x)\le 1\}.$$

تعریف ۵.۲. عملگر T یک عضو کراندار در L(E,F) است هرگاه $sup\{\hat{\rho}_{L(E,F)}(T):\rho\in S(A)\}<\infty$. مجموعه همه عناصر کراندار در L(E,F) را با نماد b(L(E,F)) نشان می‌دهیم.

گزاره ۶.۲. [۱۶] فرض کنید T عملگری از پایین یکنواخت کراندار در b(E,F) باشد، سپس T بسته و یک‌به‌یک است.

گزاره ۷.۲. [۱۷] فرض کنید E فضای C*-pro-مدول هیلبرتی روی جبر $\mathcal{A}$ باشد و T عملگر وارون‌پذیر یکنواخت کراندار در L(E). سپس برای هر $x\in E$.

$$\|T^{-1}\|_\infty^{-2}\langle x,x\rangle_E\le\langle Tx,Tx\rangle_E\le\|T\|_\infty^2\langle x,x\rangle_E.$$

نکته ۸.۲. عملگر الحاق‌پذیر h از $\mathcal{A}$ به E را یک ضربگر می‌گوییم و L($\mathcal{A}$,E) یک فضای M($\mathcal{A}$)–مدول هیلبرتی است که مدول ضربگر از E نامیده می‌شود و با نماد M(E) نشان داده‌ایم. برای هر $x\in E$ و $h\in M(E)$ تعریف می‌کنیم

$$\langle h,x\rangle_{M(E)}=h^*(x).$$

نکته ۹.۲. مجموعه دنباله‌های همگرا از عناصر جبر $\mathcal{A}$ را با نماد $H_{\mathcal{A}}$ نشان می‌دهیم. $H_{\mathcal{A}}$ فضای $\mathcal{A}$ _مدول هیلبرتی است.

تعریف ۱۰.۲. [۱۸] دنباله‌ی $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ در M(E) را یک قاب استاندارد از ضربگرها در E می‌نامیم، هرگاه برای هر $x\in E$ سری $\sum_n\langle x,h_n\rangle_{M(E)}\langle h_n,x\rangle_{M(E)}$ همگرا در $\mathcal{A}$ باشد و وجود داشته باشد اعداد $0<C\le D$ به‌طوری که به‌ازای هر $x\in E$ داشته باشیم:

$$C\langle x,x\rangle_E\le\sum_n\langle x,h_n\rangle_{M(E)}\langle h_n,x\rangle_{M(E)}\le D\langle x,x\rangle_E.$$

اعداد C,D کران‌های قاب نامیده می‌شوند و یکتا نیستند. اگر $C=D$، $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ را قاب کیپ و اگر $C=D=1$، $\{h_n\}_{n=1}^\infty$قاب نرمال نامیده می‌شود.

در حالت خاص اگر

$$\sum_n\langle x,h_n\rangle_{M(E)}\langle h_n,x\rangle_{M(E)}\le D\langle x,x\rangle_E$$

به‌ازای هر $x \in E$ برقرار باشد، آنگاه $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله بسل نامیده می‌شود.

فرض کنید $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله بسل باشد، سپس عملگر $T : E \to H_{\mathcal{A}}$ که به صورت

$$T(x) = \{\langle h_n , x \rangle_{M(E)}\}_n$$

تعریف می‌شود، کراندار است.

T را عملگر پیش‌قاب یا ترکیب می‌نامند و عملگری الحاق‌پذیر است. از ترکیب T با T* عملگر قاب به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$S : E \to E, \quad Sx = \sum_{n \in N} h_n \langle h_n , x \rangle_{M(E)}.$$

عملگر قاب یکتا و یک عضو مثبت وارون‌پذیر در b(L(E)) است. همچنین T یک عضو مثبت وارون‌پذیر از $b(L(E, H_{\mathcal{A}}))$ است.

در این مقاله $\mathcal{A}$ را یک pro-C*-جبر یکدار نسبت به خانواده‌ای از C* نیم‌نرم‌های پیوسته $\rho = \{\rho_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ و E,F فضاهای $\mathcal{A}$-مدول هیلبرتی متناهی یا شمارا تولید شده در نظر می‌گیریم. اندیس‌های متناهی یا شمارا را با I,J نشان می‌دهیم.

۳. سیستم‌های اتمی[3]

در این بخش سیستم‌های اتمی و اتمهای موضعی[4] را معرفی می‌کنیم و برخی خواص آنها و قاب از ضربگرها را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱.۳. دنباله $\{h_i\}_{i \in I}$ در $M(E)$ یک قاب استاندارد از ضربگرها است اگر و تنها اگر دو مقدار مثبت A و B موجود باشند به‌طوری که برای هر $x \in E$، داشته باشیم:

$$A(\bar{\rho}_E(x))^2 \le \rho\Big(\sum_{i \in I} \langle x , h_i \rangle_{M(E)} \langle h_i , x \rangle_{M(E)}\Big) \le B(\bar{\rho}_E(x))^2. \qquad (1.3)$$

اثبات: اگر دنباله $\{h_i\}_{i \in I}$ قاب استاندارد از ضربگرها باشد، آنگاه رابطه (1.3) به‌دست می‌آید. به‌عکس عملگر $U : E \to H_{\mathcal{A}}$ را به صورت $U(x) = \{\langle h_i , x \rangle_{M(E)}\}_{i \in I}$ تعریف می‌کنیم. داریم:

$$\langle U(x), U(x) \rangle_{H_{\mathcal{A}}} = \left\langle \{\langle h_i , x \rangle_{M(E)}\}_{i \in I}, \{\langle h_i , x \rangle_{M(E)}\}_{i \in I} \right\rangle = \sum_{i \in I} \langle x , h_i \rangle_{M(E)} \langle h_i , x \rangle_{M(E)},$$

و $\bar{\rho}_{H_{\mathcal{A}}}(Ux) \le B\,\bar{\rho}_E(x)$ در نتیجه عملگر U خوش‌تعریف است. فرض کنید $\{a_i\}_{i \in I}$ دنباله‌ای دلخواه در $H_{\mathcal{A}}$ باشد. در این صورت

$$\langle \{a_i\}_{i \in I}, U(x) \rangle_{H_{\mathcal{A}}} = \left\langle \{a_i\}_{i \in I}, \{\langle h_i , x \rangle_{M(E)}\}_{i \in I} \right\rangle_{H_{\mathcal{A}}} = \sum_{i \in I} \overline{a_i} \langle h_i , x \rangle_{M(E)} = \langle U^*(\{a_i\}_{i \in I}), x \rangle_E .$$

بنابراین عملگر U الحاق‌پذیر است و الحاق آن برابر است با $U^*(\{a_i\}_{i \in I}) = \sum_{i \in I} h_i a_i$. قرار می‌دهیم $U^* U = K$ از آنجا که عملگر K مثبت و خود الحاق است عملگر $K^{\frac{1}{2}}$ نیز مثبت و خود الحاق می‌باشد. از طرفی

$$\left\langle K^{\frac{1}{2}} x , K^{\frac{1}{2}} x \right\rangle_E = \langle Kx , x \rangle_E = \sum_{i \in I} \langle x , h_i \rangle_{M(E)} \langle h_i , x \rangle_{M(E)},$$

و با توجه به رابطه (1.3)، $K^{\frac{1}{2}}$ یک عملگر یکنواخت از پایین کراندار است، که در گزاره ۶.۲ صدق می‌کند $K^{\frac{1}{2}}$ عملگری وارون‌پذیر و یکنواخت کراندار است با استفاده از گزاره ۷.۲ رابطه زیر برقرار است.

3. Atomic systems
4. Local atoms

$$\left\|K^{-\frac{1}{2}}\right\|_{\infty}^{-2}\langle x,x\rangle_E \le \left\langle K^{\frac{1}{2}}x, K^{\frac{1}{2}}x\right\rangle_E$$
$$\le \left\|K^{\frac{1}{2}}\right\|_{\infty}^{2}\langle x,x\rangle_E .$$

تعریف ۲.۳. فرض کنید دنباله $\{h_i\}_{i\in I}$ در $M(E)$ یک دنباله بسل از ضربگرها برای E و E_0 یک زیر مدول بسته از E باشد. دنباله $\{h_i\}_{i\in I}$ را یک خانواده اتم‌های موضعی از ضربگرها برای E_0 می‌نامیم، هرگاه یک دنباله $\{c_i\}_{i\in I}$ از عملگرهای الحاق‌پذیر $c_i : E_0 \to \mathcal{A}$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $x\in E_0$.

۱. وجود داشته باشد $C>0$ به‌طوری که
$$\sum_{i\in I}\langle c_i(x),c_i(x)\rangle_{M(E_0)} \le C\langle x,x\rangle_{E_0}$$

۲. $x=\sum_{i\in I}h_ic_i(x)$.

زوج $\{h_i,c_i\}_{i\in I}$ را به عنوان تجزیه اتمی از ضربگرها می‌نامیم.

گزاره ۳.۳. فرض کنید E_0 یک زیر مدول بسته از E باشد. اگر $\{h_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ی اتم‌های موضعی از ضربگرها باشد، آنگاه وجود دارد $A>0$ که به‌ازای هر $x\in E_0$،
$$A(\bar{\rho}_{E_0}(x))^2 \le \rho(\sum_{i\in I}\langle x,h_i\rangle_{M(E)}\langle h_i,x\rangle_{M(E)}).$$

اثبات: با توجه به تعریف می‌دانیم که $\{c_i(x)\}_{i\in I}$ و $\{\langle h_i,x\rangle_{M(E)}\}_{i\in I}$دنباله‌های در $H_{\mathcal{A}}$ هستند. با استفاده از نامساوی کشی- شوارتز به‌ازای هر $x\in E_0$ داریم:

$$(\bar{\rho}_{E_0}(x))^4 = (\rho(\langle x,x\rangle_{E_0}))^2$$
$$=(\rho(\left\langle \sum_{i\in I}h_ic_i(x),x\right\rangle))^2$$
$$=(\rho(\sum_{i\in I}c_i(x)\langle h_i,x\rangle))^2$$
$$\le \rho(\sum_{i\in I}\overline{c_i(x)}c_i(x))\rho(\sum_{i\in I}\langle x,h_i\rangle_{M(E)}\langle h_i,x\rangle_{M(E)})$$
$$\le C(\bar{\rho}_{E_0}(x))^2\rho(\sum_{i\in I}\langle x,h_i\rangle_{M(E)}\langle h_i,x\rangle_{M(E)}).$$

بنابراین
$$C^{-1}(\bar{\rho}_{E_0}(x))^2 \le \rho(\sum_{i\in I}\langle x,h_i\rangle_{M(E)}\langle h_i,x\rangle_{M(E)}).$$

با در نظر گرفتن $A=C^{-1}$ اثبات کامل می‌شود.

نتیجه ۴.۳. فرض کنید E_0 یک زیر مدول بسته از E باشد. اگر $\{h_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ی اتم‌های موضعی از ضربگرها باشد، آنگاه $\{h_i|E_0\}_{i\in I}$ یک قاب استاندارد از ضربگرها برای E_0 است.

اثبات: از آنجاکه $\{h_i\}_{i\in I}$ یک دنباله بسل از ضربگرها برای Eاست برای هر x در E_0 داریم:
$$\rho(\sum_{i\in I}\langle x,h_i\rangle_{M(E_0)}\langle h_i,x\rangle_{M(E_0)}) \le D(\bar{\rho}_{E_0}(x))^2,$$

با استفاده از گزاره ۳.۳ و قضیه ۱.۳ نتیجه حاصل می‌شود.

گزاره ۵.۳. فرض کنید E_0 یک زیر مدول متمم متعامد از E باشد. اگر $\{h_i\}_{i\in I}$ در M(E) خانواده‌ی اتم‌های موضعی از ضربگرها باشد، آنگاه $\{\pi_{E_0}h_i\}_{i\in I}$ یک قاب استاندارد از ضربگرها برای E_0 است. که π_{E_0} تصویر متعامد از E بروی E_0 می‌باشد.

اثبات: دنباله $\{c_i\}_{i\in I}$ در $L(E_0,\mathcal{A})$ وجود دارد به‌طوری که $x=\sum_{i\in I}h_ic_i(x)$. با استفاده از گزاره ۳.۳ به‌ازای هر $x\in E$ داریم:
$$A(\bar{\rho}_{E_0}(x))^2 \le \rho(\sum_{i\in I}\langle x,h_i\rangle_{M(E)}\langle h_i,x\rangle_{M(E)}),$$

بنابراین
$$A\rho(\langle x,x\rangle_{E_0}) = A\rho(\langle \pi_{E_0}x,\pi_{E_0}x\rangle_{E_0})$$

$$\le \rho\Big(\sum_{i\in I}\langle x,\pi_{E_0}h_i\rangle_{M(E_0)}\langle \pi_{E_0}h_i,x\rangle_{M(E_0)}\Big).$$

از آنجاکه $\{h_i\}_{i\in I}$ یک دنباله بسل از ضربگرها برای E است برای هر x در E_0 داریم:

$$\rho\Big(\sum_{i\in I}\langle x,\pi_{E_0}h_i\rangle_{M(E_0)}\langle \pi_{E_0}h_i,x\rangle_{M(E_0)}\Big)$$
$$\le D\,\rho(\langle \pi_{E_0}x,\pi_{E_0}x\rangle_{E_0})$$
$$= D\,\rho(\langle x,x\rangle_{E_0}).$$

سپس با استفاده از قضیه ۱.۳ اثبات کامل می‌شود.

تعریف ۶.۳. فرض کنید E فضای $\mathcal{A}$_مدول هیلبرتی متناهی یا شمارا تولید شده روی C*-pro-جبر یکدار $\mathcal{A}$ و $K\in L(E)$ باشد. دنباله $\{h_i\}_{i\in I}$ در $M(E)$ سیستم اتمی از ضربگرها برای K نامیده می‌شود، هرگاه $\{h_i\}_{i\in I}$ یک دنباله بسل از ضربگرها برای E و شرایط زیر برقرار باشد:

۱. به‌ازای هر $a_x=\{a_i\}_{i\in I}\in H_{\mathcal{A}}$، سری $\sum_{i\in I}h_ia_i$ همگرا باشد؛

۲. برای هر $x\in E$ وجود داشته باشد $C>0$ و $a_x=\{a_i\}_{i\in I}\in H_{\mathcal{A}}$، به‌طوری که $\langle a_x,a_x\rangle_{H_{\mathcal{A}}}\le C\,\langle x,x\rangle_E$ و به‌ازای هر $x\in E$، $Kx=\sum_{i\in I}h_ia_i$.

قضیه ۷.۳. اگر دنباله $\{h_i\}_{i\in I}$ در $M(E)$ سیستم اتمی از ضربگرها برای K در E باشد، آنگاه دو مقدار مثبت C و D وجود دارند به‌طوری که به‌ازای هر $x\in E$ داشته باشیم:

$$C^{-1}(\bar{\rho}_E(K^*x))^2 \le \rho\Big(\sum_{i\in I}\langle x,h_i\rangle_{M(E)}\langle h_i,x\rangle_{M(E)}\Big)$$
$$\le D(\bar{\rho}_E(x))^2.$$

اثبات: برای هر $x\in E$، از $(\bar{\rho}_E(K^*x))^2=(\sup\{\rho(\langle x,Ky\rangle):\bar{\rho}_E(y)\le 1\})^2$ آنجاکه $Ky=\sum_{i\in I}h_ia_i$، آنگاه

$$(\bar{\rho}_E(K^*x))^2 =(\sup\{\rho(\langle x,\sum_{i\in I}h_ia_i\rangle):\bar{\rho}_E(y)\le 1\})^2$$
$$=(\sup\{\rho(\sum_{i\in I}a_i^*\langle h_i,x\rangle_{M(E)}):\bar{\rho}_E(y)\le 1\})^2$$
$$\le \sup_{\bar{\rho}_E(y)\le 1}\{\rho(\sum_{i\in I}a_i^*a_i)\rho(\sum_{i\in I}\langle x,h_i\rangle_{M(E)}\langle h_i,x\rangle_{M(E)})\}$$
$$\le C\,\rho\Big(\sum_{i\in I}\langle x,h_i\rangle_{M(E)}\langle h_i,x\rangle_{M(E)}\Big).$$

بنابراین

$$C^{-1}(\bar{\rho}_E(K^*x))^2\le \rho\Big(\sum_{i\in I}\langle x,h_i\rangle_{M(E)}\langle h_i,x\rangle_{M(E)}\Big)$$

از طرفی $\{h_i\}_{i\in I}$ یک دنباله بسل از ضربگرها برای E است در نتیجه وجود دارد $D>0$ به‌طوری که

$$\sum_{i\in I}\langle x,h_i\rangle_{M(E)}\langle h_i,x\rangle_{M(E)}\le D\,\langle x,x\rangle_E$$

در این صورت داریم:

$$C^{-1}(\bar{\rho}_E(K^*x))^2\le \rho\Big(\sum_{i\in I}\langle x,h_i\rangle_{M(E)}\langle h_i,x\rangle_{M(E)}\Big)$$
$$\le D(\bar{\rho}_E(x))^2.$$

نکته ۸.۳. اگر $K=I_E$، آنگاه دنباله سیستم اتمی از ضربگرها برای K در E یک قاب استاندارد از ضربگرها در E است.

۴. K- قاب‌ها

در این بخش K-قاب استاندارد از ضربگرها در فضای $\mathcal{A}$-مدول هیلبرتی E را معرفی و روابط بین K-قاب‌ها، سیستم‌های اتمی و خانواده اتم‌های موضعی را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.٤. فرض کنید E فضای $\mathcal{A}$–مدول هیلبرتی متناهی یا شمارا تولید شده روی C*-pro-جبر یکدار $\mathcal{A}$ و $K\in L(E)$ باشد. دنباله $\{h_i\}_{i\in I}$ در $M(E)$ را K–قاب استاندارد از ضربگرها برای E می‌نامیم، هرگاه سری

$\sum_{i\in I}\langle x,h_i\rangle_{M(E)}\langle x,h_i\rangle_{M(E)}$ در جبر $\mathcal{A}$ همگرا و برای هر $x\in E$ وجود داشته باشد $0<A\le B<\infty$ به‌طوری که:

$$A\langle K^*x,K^*x\rangle_E \le \sum_{i\in I}\langle x,h_i\rangle_{M(E)}\langle x,h_i\rangle_{M(E)}$$
$$\le B\langle x,x\rangle_E .$$

نکته ۲.۴. اگر $K=I_E$، آنگاه هر $K-$ قاب استاندارد از ضربگرها در E یک قاب استاندارد از ضربگرها در E است.

مثال ۳.۴. فضای $\mathcal{A}$-مدول هیلبرتی $H_{\mathcal{A}}$ که به‌ازای هر $x=\{x_i\}_{i\in N}$ و $y=\{y_i\}_{i\in N}$ در $H_{\mathcal{A}}$ دارای خواص زیر است.

$$xy:=\{x_iy_i\}_{i\in N},\quad x^*:=\{\bar{x}_i\}_{i\in N},$$
$$\langle\{x_i\},\{y_i\}\rangle:=\sum_{i\in N}x_iy_i^*,$$

و نیم‌نرم $\bar{\rho}_{H_{\mathcal{A}}}(x)=(\rho(\langle x,x\rangle_{H_{\mathcal{A}}}))^{\frac{1}{2}}$. برای $J=N$ و هر ثابت C دنباله $h_j=\{h_i^j\}_{i\in N}$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$h_i^j(a)=\begin{cases}\langle a,C\rangle & i=j\\ 0 & i\neq j.\end{cases}$$

با توجه به اینکه

$$\rho(\sum_j h_i^j(a)\overline{h_i^j(a)})=\rho(h_i^i(a)\overline{h_i^i(a)})$$
$$=\rho(\langle a,C\rangle\overline{\langle a,C\rangle})=\rho(\langle a,C\rangle)^2<\infty,$$

بنابراین برای هر j عملگر h_j خوش‌تعریف است و الحاق آن را با نماد $h_j^*=\{h_i^{j^*}\}_{i\in N}$ نشان می‌دهیم که برابر است با $h_i^{j^*}(\{x_i\}_{i\in N})=Cx_j$. در نتیجه $h_j\in L(\mathcal{A},H_{\mathcal{A}})$ برای هر $x=\{x_i\}_{i\in N}$ در $H_{\mathcal{A}}$ داریم:

$$\langle\{x_i\},h_j\rangle_{M(H_{\mathcal{A}})}\langle h_j,\{x_i\}\rangle_{M(H_{\mathcal{A}})}=$$
$$\overline{h_j^*(\{x_i\})}h_j^*(\{x_i\})=C\bar{x}_jCx_j .$$

سپس

$$\sum_{j\in J}\langle x,h_j\rangle_{M(H_{\mathcal{A}})}\langle h_j,x\rangle_{M(H_{\mathcal{A}})}=$$
$$\sum_{j\in J}\langle\{x_i\}_{i\in N},h_j\rangle_{M(H_{\mathcal{A}})}\langle h_j,\{x_i\}_{i\in N}\rangle_{M(H_{\mathcal{A}})}=$$
$$\sum_{j\in J}C\bar{x}_jx_jC=C\sum_{j\in J}\bar{x}_jx_jC$$
$$=C^2\langle x,x\rangle_{H_{\mathcal{A}}} .$$

برای هر عدد $L\in N$ و مقدار ثابت $0<D<C$ عملگر $K:H_{\mathcal{A}}\to H_{\mathcal{A}}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$K(\{x_j\}_j)=\begin{cases}D^{-1}x_j & if\ \ j\le L,\\ 0 & if\ \ j>L.\end{cases}$$

که الحاق آن برابر است با

$$K^*(\{x_j\}_j)=\begin{cases}D^{-1}x_j & if\ \ j\le L,\\ 0 & if\ \ j>L.\end{cases}$$

برای هر $x\in H_{\mathcal{A}}$ داریم:

$$\langle K^*(x),K^*(x)\rangle_{H_{\mathcal{A}}}$$
$$=\left\langle K^*(\{x_j\}_{j=1}^{\infty}),K^*(\{x_j\}_{j=1}^{\infty})\right\rangle_{H_{\mathcal{A}}}$$
$$=\left\langle\{D^{-1}x_j\}_{j=1}^{L},\{D^{-1}x_j\}_{j=1}^{L}\right\rangle_{H_{\mathcal{A}}}$$
$$=D^{-1}\left\langle\{x_j\}_{j=1}^{L},\{x_j\}_{j=1}^{L}\right\rangle_{H_{\mathcal{A}}}D^{-1}$$
$$=D^{-2}\sum_{j=1}^{L}x_j\overline{x_j}$$
$$\le D^{-2}\sum_{j=1}^{\infty}x_j\overline{x_j}$$
$$=D^{-2}\sum_{j=1}^{\infty}\langle x,h_j\rangle_{M(H_{\mathcal{A}})}\langle h_j,x\rangle_{M(H_{\mathcal{A}})},$$

بنابراین برای هر $x\in H_{\mathcal{A}}$ داریم:

$$C^2\langle x,x\rangle_{H_{\mathcal{A}}}=\sum_{j=1}^{\infty}\langle x,h_j\rangle_{M(H_{\mathcal{A}})}\langle h_j,x\rangle_{M(H_{\mathcal{A}})}$$
$$\ge D^2\langle K^*(x),K^*(x)\rangle_{H_{\mathcal{A}}} .$$

در نتیجه برای هر L، $\{h_i\}_{i\in I}$خانواده‌ای از $K-$قاب‌های استاندارد از ضربگرها با کران‌های C^2 و D^2 است.

نکته ۴.۴. اگر $\{h_i\}_{i\in I}$ یک قاب استاندارد از ضربگرها برای E و $K\in b(L(E))$، آنگاه $\{Kh_i\}_{i\in I}$ یک K-قاب استاندارد از ضربگرها برای E است.

قضیه ۵.۴. فرض کنید K یک عضو وارون‌پذیر $b(L(E))$ باشد. آنگاه جملات زیر معادلند:

۱. دنباله $\{h_i\}_{i\in I}$ در $M(E)$ یک K -قاب استاندارد از ضربگرها برای E است؛

۲. برای هر $x\in E$ وجود دارد $0<C\le D<\infty$ به‌طوری

$$C(\bar{\rho}_E(K^*x))^2\le \rho(\sum_{i\in I}\langle x,h_i\rangle_{M(E)}\langle h_i,x\rangle_{M(E)})$$
$$\le D(\bar{\rho}_E(x))^2, \qquad (1.4)$$

۳. دنباله $\{h_i\}_{i\in I}$ در $M(E)$ یک قاب استاندارد از ضربگرها برای E است.

اثبات: $1\Rightarrow 2$ اثبات واضح است.

$2\Rightarrow 3$ از آنجاکه K^* یک عضو وارون‌پذیر در $b(L(E))$ است لذا با توجّه به [18] داریم:

$$\left\|K^{*^{-1}}\right\|_\infty^{-2}\rho(\langle x,x\rangle_E)\le \rho(\langle K^*x,K^*x\rangle_E).$$

بنابراین به کمک (1.4)،

$$C\left\|K^{*^{-1}}\right\|_\infty^{-2}\rho(\langle x,x\rangle_E)\le \rho(\sum_{i\in I}\langle x,h_i\rangle_{M(E)}\langle h_i,x\rangle_{M(E)})$$
$$\le D\rho(\langle x,x\rangle_E).$$

قضیه ۱.۳ نشان می‌دهد دنباله $\{h_i\}_{i\in I}$ در $M(E)$ یک قاب استاندارد از ضربگرها برای E است.

$3\Rightarrow 1$ دو مقدار مثبت A و B وجود دارند به‌طوری که به‌ازای هر $x\in E$، رابطه زیر برقرار است

$$C\langle x,x\rangle_E\le\sum_{i\in I}\langle x,h_i\rangle_{M(E)}\langle h_i,x\rangle_{M(E)}$$
$$\le D\langle x,x\rangle_E. \qquad (2.4)$$

از طرفی چون K^* یک عضو وارون‌پذیر در $b(L(E))$ است لذا داریم:

$$\left\|K^{*^{-1}}\right\|_\infty^{-2}\langle x,x\rangle_E\le\langle K^*x,K^*x\rangle_E$$
$$\le\left\|K^*\right\|_\infty^{2}\langle x,x\rangle_E.$$

بنابراین

$$\left\|K^*\right\|_\infty^{-2}C\langle K^*x,K^*x\rangle_E\le C\langle x,x\rangle_E, \qquad (3.4)$$

حال با توجّه به (2.4) و (3.4) اثبات کامل می‌شود.

نتیجه ۶.۴. هرگاه دنباله $\{h_i\}_{i\in I}$ در $M(E)$ سیستم اتمی از ضربگرها برای K در E باشد. اگر K یک عضو وارون‌پذیر در $b(L(E))$ باشد، آنگاه $\{h_i\}_{i\in I}$ یک قاب استاندارد از ضربگرها در E است.

اثبات: با توجّه به قضیه‌های ۷.۳ و ۵.۴ نتیجه به‌دست می‌آید.

نتیجه ۷.۴. فرض کنید K یک عضو وارون‌پذیر در $b(L(E_0))$ باشد. اگر $\{h_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ی اتم‌های موضعی از ضربگرها باشد، آنگاه $\{h_i|E_0\}_{i\in I}$ یک K–قاب استاندارد از ضربگرها برای E_0 است.

اثبات: با توجّه به قضیه ۵.۴ و نتیجه ۴.۳ حکم برقرار است.

گزاره ۸.۴. فرض کنید دنباله $\{h_i\}_{i\in I}$ در $M(E)$ یک قاب استاندارد از ضربگرها در E باشد. اگر $T:E\to F$ عملگر هم‌طولپا و K یک عضو وارون‌پذیر در $b(L(F))$ باشد، آنگاه $\{Th_i\}_{i\in I}$ یک K–قاب استاندارد از ضربگرها در F است.

اثبات: برای هر $x \in E$ و هر $y \in F$ داریم:

$$\sum_{i \in I} \left\langle y, Th_i \right\rangle_{M(F)} \left\langle Th_i, y \right\rangle_{M(F)} = \sum_{i \in I} \left\langle T^* y, h_i \right\rangle_{M(E)} \left\langle h_i, T^* y \right\rangle_{M(E)}.$$

فرض کنید که C و D کران‌های قاب استاندارد $\{h_i\}_{i \in I}$ از ضربگرها باشند. در این صورت

$$\begin{aligned} C \left\langle y, y \right\rangle_F &= C \left\langle T^* y, T^* y \right\rangle_E \\ &\leq \sum_{i \in I} \left\langle y, Th_i \right\rangle_{M(F)} \left\langle Th_i, y \right\rangle_{M(F)} \\ &\leq D \left\langle T^* y, T^* y \right\rangle_E \\ &= D \left\langle y, y \right\rangle_F . \end{aligned}$$

رابطه فوق نشان می‌دهد $\{h_i\}_{i \in I}$ قاب استاندارد از ضربگرها در فضای F است. حال با استفاده از قضیه ۵.۴ اثبات کامل می‌شود.

فهرست منابع

[1] R. J. Duffin and A. C. Schaeffer, A class of nonharmonic Fourier series, Transactions of the American Mathematical Society, 72, 341-366, (1952).

[2] I. Daubechies, A. Grossmann and Y. Meyer, Painless nonorthogonal expansions, Journal of Mathematical Physics, 27, 1271-1283, (1986).

[3] W. Sun, G-frames and g-Riesz bases, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 322, 437-452, (2006).

[4] P. G. Casazza and G. Kutyniok, Frames of subspaces, Wavelets, Contemporary Mathematics American Mathematical Society, 345, 87-113, (2004).

[5] M. Rashidi-kouchi, The study on controlled g-frames and controlled fusion frames in Hilbert C*-modules, Journal of New Researches in Mathematics, 5, 105-114, (2019).

[6] M. Frank and D. R. Larson, Frame in Hilbert C*-modules and C*-algebras, Journal of Operator Theory, 48, 273-314, (2002).

[7] A. Alijani and M.A. Dehghan, G-frames and their duals for Hilbert C*-modules, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 38, 3, 567-580, (2012).

[8] M. A. Dehghan and M. A. Hasankhani Fard, G-continuous frames and coorbit spaces, Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis, 24, 373-383, (2008).

[9] M. A. Dehghan and M. Radjabalipour, Relation between generalized frames, Matematicheskoe Modelirovanie, 14 (5), 31-34, (2002).

[10] I. Raeburn and S.J. Thompson, countably generated Hilbert modules, the Kasparov stabilisation theorem, and frames with Hilbert modules, Proceedings of the American Mathematical Society, 131 (5), 1557-1564, (2003).

[11] M. Naroei Irani and A. Nazari, Some properties of *-frames in Hilbert modules over pro-C*-algebras, 16 (1), 105-117, (2019).

[12] M. Naroei Irani and A. Nazari, The woven frame of multipliers in Hilbert C*-modules, Communications of the Korean Mathematical Society, accepted.

[13] H. G. Feichtinger and T. Werther, Atomic systems for subspaces, Proceedings of the International Conference on Sampling Theory and Applications, Orlando, 163-165, (2001).

[14] L. Gavruta, Frames for operators, Applied and Computational Harmonic Analysis, 32, 139-144, (2012).

[15] M. Joita, Hilbert Modules Over Locally C*-Algebras, University of Bucharest Press, (2006).

[16] N. Haddadzadeh, G-frames in Hilbert pro-C*-modules, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 105, 273-314, (2015).

[17] M. Azhini and N. Haddadzadeh, Fusion frames in Hilbert modules over pro-C*-algebras, International Journal of Industrial Mathematics, 5, 109-118, (2013).

[18] M. Joita, On frames in Hilbert modules over pro-C*-algebras, Topology and its Applications, 156 (1), 83-92, (2008).