دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره بیست و نهم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

mp–مشبکه‌های مانده‌دار

سعید رسولی[۱]، داریوش حیدری[۲*]

(۱) استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر، ایران.
(۲) استادیار، دانشکده علوم، مرکز آموزش عالی محلات. محلات، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۳/۲۷   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۱۱/۲۹

چکیده

در این مقاله، مفهوم mp–مشبکه‌های مانده‌دار، به عنوان مشبکه‌های مانده‌داری که هر پالایه اول در آنها شامل یک پالایه اول کمین منحصر به فرد است، را معرفی می‌کنیم و به مطالعه و بررسی آنها می‌پردازیم. برای مشبکه مانده‌دار A مفهوم ω–پالایه را معرفی کرده و نشان می‌دهیم که $\Omega(A)$، مجموعه تمام ω–پالایه‌های A، تشکیل یک مشبکه پخش‌پذیر کراندار می‌دهند. همچنین، نشان می‌دهیم که $\gamma(A)$، مجموعه هم‌پوچک‌هایA، یک زیرمشبکه‌ی $\Omega(A)$ است. سپس، برای هر پالایه اول مانند P، مفهوم پالایه‌ی بخش‌یاب $D(P)$ را در A به عنوان ابزاری مهم در مطالعه‌ی پالایه‌های اول کمین A معرفی کرده و نشان می‌دهیم که پالایه اول P، اول کمین است اگر و تنها $P=D(P)$. در انتها، با استفاده از مفهوم ω–پالایه‌ها، به عنوان تعمیمی از پالایه‌های بخش‌یاب، یک بازشناسی اساسی از mp–مشبکه‌های مانده‌دار ارائه می‌دهیم و نشان می‌دهیم که یک مشبکه‌مانده‌دار mp است اگر و تنها اگر مشبکه‌ی ω–پالایه‌های آن زیرمشبکه‌ای از مشبکه‌ی پالایه‌های آن مشبکه‌مانده‌دار باشد.

واژه‌های کلیدی: مشبکه مانده‌دار، پالایه، پالایه اول کمین، mp–مشبکه مانده‌دار، ω–پالایه، پالایه بخش‌یاب.
رده بندی ریاضی (۲۰۱۰): 20D06, F0699.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: dheidari82@gmail.com, dheidari@mahallat.ac.ir

۱- مقدمه

مشبکه‌های پخش‌پذیر شبه-مکمل‌دار رده‌ی مهمی از مشبکه‌های پخش‌پذیر را تشکیل می‌دهند. گرت بیرهوف با الهام از ام. اچ. استون پرسشی مطرح کرد([۱]، مسئله ۷۰): «وسیع‌ترین رده از مشبکه‌های پخش‌پذیر شبه-مکمل‌دار که همانی $x^* \vee x^{**} = 1$ را برآورده می‌سازند، کدامند؟» اولین پاسخ به این پرسش متعلق به گراتزر و اشمیت [۲] بود. آنها نام «مشبکه‌های استون» را برای این رده از مشبکه‌ها برگزیدند و نشان دادند که یک مشبکه پخش‌پذیر شبه- مکمل‌دار، استون است اگر وتنها اگر هر جفت از ایده‌آل‌های اول کمین آن هم‌بیشین باشند یا به طور هم‌ارز هر ایده‌آل اول آن شامل یک ایده‌آل اول کمین منحصر به فرد باشد. این بازشناسی انگیزه‌ای شد تا کرنیش مشبکه‌های پخش‌پذیر صفر داری را که در آنها هر ایده‌آل اول شامل یک ایده‌آل اول کمین منحصر به فرد است را تحت نام «مشبکه‌های بهنجار» مورد مطالعه قرار دهد [۳]. او نشان داد که هرگاه $\mathfrak{A}$ یک مشبکه پخش‌پذیر صفر دار باشد، بهنجار است اگر وتنها اگر برای هر $x, y \in A$، $x \wedge y = 0$ بیان کند که $x^{\perp}$ و $y^{\perp}$ هم‌بیشین باشند. کرنیش واژه «بهنجار» را با الهام از والمن [۴]، که نشان داده بود مشبکه‌ی مجموعه‌های بسته‌ی یک فضای T_1 ویژگی پوچسازی فوق را برآورده می‌کند اگر وتنها اگر یک فضای بهنجار باشد، به کار گرفت. مشبکه‌های بهنجار به طور گسترده توسط پژوهشگران زیادی مانند کرنیش [۳]، جانستون [۵]، پاور [۶] و زانن [۷] مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته‌اند.

مفهوم مشبکه‌های مانده‌دار برای اولین بار در [۸] توسط کرول، که بر روی تجزیه‌ی یک حلقه به ایده‌آل‌های مجزا کار می‌کرد، معرفی شد. سپس این مفهوم به عنوان ابزاری مهم در بررسی مشبکه ایده‌آل‌های یک حلقه توسط وارد و دیلورث در یک سری از مقالات [۹،۱۰،۱۱،۱۲،۱۳،۱۴،۱۵] مورد استفاده قرار گرفت. این رده از مشبکه‌ها تحت عناوین مختلفی مانند BCK مشبکه‌ها [۱۶]، BCK جبرهای کامل [۸]، FL_{ew} جبرها [۱۷]، ℓ-تکگون‌های جابه‌جایی مانده‌دار صحیح [۱۸] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. همچنین، مشبکه‌های مانده‌دار ساختار جبری متناظر با منطق‌های بدون قانون انقباض هستند. این جبرهای منطقی دارای ویژگی‌هایی جالب به عنوان یک ساختار جبری هستند.

یکی از ابزارهای اساسی در بررسی ساختار جبرهای منطقی نظریه سامانه‌های قیاسی است. سامانه‌های قیاسی در جبرهای منطقی نقشی بنیادین در مطالعه‌ی این ساختارهای جبری و برهان تمامیت منطق‌های متناظرشان ایفا می‌کنند. از دیدگاه منطق، هر سامانه قیاسی متناظر با یک مجموعه از جملات برهان‌پذیر است. از آن جا که سامانه‌های قیاسی متناظر با مجموعه‌هایی از جملات در منطق هستند که نسبت به قاعده قیاس استثنایی بسته‌اند، گاهی آن‌ها را پالایه‌های (استلزامی) می‌نامیم.

در این کار می‌خواهیم مشبکه‌های مانده‌داری را مورد مطالعه و بازشناسی قرار دهیم که در آنها هر پالایه اول شامل یک پالایه ا.ول کمین منحصر به فرد است. این مشبکه‌های مانده‌دار را «mp-مشبکه‌های مانده‌دار» می‌نامیم و مشاهده می‌کنیم که بسیاری از نتایج [۳] برای آنها برقرار است. این مقاله دارای ۴ بخش به صورت زیر است: در بخش ۲، تعاریف و ویژگی‌های مشبکه‌های مانده‌دار را بیان می‌کنیم و مثال‌هایی برای آنها ارائه می‌دهیم. نشان می‌دهیم مشبکه پالایه‌های اصلی در یک مشبکه مانده‌دار یک زیر مشبکه‌ی پالایه‌های آن است و گزاره‌های مهمی در رابطه با پالایه‌های اصلی بیان و اثبات می‌کنیم. در بخش ۳، مفهوم ω-پالایه‌ها و پالایه‌های بخش‌یاب را معرفی و با استفاده از آنها یکی از بارزترین ویژگی‌های پالایه‌های اول کمین را بررسی کرده و یک بازشناسی اساسی برای پالایه‌های اول کمین ارائه‌می‌دهیم. در بخش ۴، مفهوم mp-مشبکه‌های مانده‌دار را معرفی می‌کنیم و به مطالعه و بررسی آنها می‌پردازیم. در پایان، mp-مشبکه‌های مانده‌دار را با استفاده از ω-پالایه‌ها مورد بازشناسی قرار می‌دهیم.

۲- مشبکه‌های مانده‌دار

در این بخش، برخی از تعاریف و ویژگی‌های مشبکه‌های مانده‌دار را که در بخش‌های قبل مورد استفاده قرار می‌گیرند یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۱: ساختار جبری $\mathfrak{A} = (A;\wedge,\vee,\odot,\to,0,1)$ از نوع $(2,2,2,2,0,0)$ را یک *مشبکه مانده‌دار* می‌نامیم هرگاه بندهای زیر را برآورده سازد:

۱) $\ell(\mathfrak{A}) = (A;\wedge,\vee,0,1)$ یک مشبکه کران‌دار است؛

۲) $(A;\odot,1)$ یک تکگون جابه‌جایی است؛

۳) $(\odot,\to)$ تشکیل یک جفت الحاقی می‌دهند؛ یعنی برای هر $x,y,z \in A$ داریم:

$x \odot y \le z$ اگر و تنها اگر $x \le y \to z$.

عمل «$\to$» را *مانده‌ی* عمل «$\odot$» می‌نامیم. برای هر $x \in A$، $x \to 0$ را با $\neg x$ نشان داده و آن را نقیض x می‌نامیم. همچنین، $x \odot \cdots \odot x$ (n مرتبه) را با x^n نشان می‌دهیم. در ادامه، *رده* مشبکه‌های مانده‌دار را با $\mathcal{RL}$ نشان می‌دهیم. بنابر [۱۹]، $\mathcal{RL}$ یک *رده همانی* و در نتیجه یک *گونه* است. مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}$ را یک MTL جبر می‌نامیم [۲۰] هرگاه ویژگی *پیش-خطی* (که با $prel$ نموده می‌شود) را برآورده سازد: $(prel)$ برای هر $x,y \in A$ داریم $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$.

مشبکه‌های مانده‌دار در [۲۱،۲۲،۲۳،۲۴،۲۵] مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته‌اند. در این مقاله، فرض می‌کنیم خواننده با مقدماتی از مشبکه‌های مانده‌دار آشنا است و به عنوان مرجع از [۲۶] استفاده می‌کنیم.

گزاره ۲ [۲]**:** فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار است. همانی‌های زیر برای هر $x,y,z \in A$ برقرارند:

۱) $x \to x = x \to 1 = 1$ و $1 \to x = x$؛

۲) $(x \to y) \odot (y \to z) \le x \to z$؛

۳) $(x \vee y) \to z = (x \to z) \wedge (y \to z)$ و $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$؛

۴) $(x \odot y) \to z = x \to (y \to z)$؛

۵) $x \odot (y \vee z) = (x \odot y) \vee (x \odot z)$؛

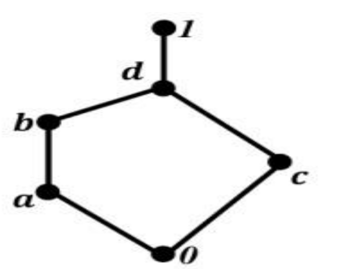
۶) $x \vee (y \odot z) \ge (x \vee y) \odot (x \vee z)$؛

۷) $x \vee y \le ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x)$.

مثال ۳: فرض کنید $A_6 = \{0,a,b,c,d,1\}$ یک مشبکه است که *نمودار* هسته آن در زیر داده شده است (ن.ک. شکل ۱). عمل‌های "$\odot$" و "$\to$" را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\odot$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	0	a	a
b	0	a	a	0	a	b
c	0	0	0	c	c	c
d	0	a	a	c	d	d
1	0	a	b	c	d	1

$\to$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	c	1	1	c	1	1
b	c	d	1	c	1	1
c	b	b	b	1	1	1
d	0	b	b	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1



شکل ۱: نمودار هسته مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}_6$

یک بررسی ساده نشان می‌دهد که $\mathfrak{A}_6 = (A_6;\wedge,\vee,\odot,\to,0,1)$ یک مشبکه مانده‌دار است، اگرچه $\mathfrak{A}_6$ یک MTL جبر نیست؛ زیرا
$(b \to c) \vee (c \to b) = c \vee b = d \neq 1.$

مثال ۴: فرض کنید $A_7 = \{0, a, b, c, d, e, 1\}$ یک مشبکه است که نمودار هسه آن در زیر داده شده است (ن.ک. شکل ۲). عمل‌های "$\odot$" و "$\to$" را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\odot$	0	a	b	c	d	e	1
0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	a	a	a	a
b	0	a	b	a	b	a	b
c	0	a	a	a	a	c	c
d	0	a	b	a	b	c	d
e	0	a	a	c	c	e	e
1	0	a	b	c	d	e	1

یک بررسی ساده نشان می‌دهد که $\mathfrak{A}_7 = (A_7;\wedge,\vee,\odot,\to,0,1)$ یک MTL جبر است.

تعریف ۵: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار است. زیرمجموعه ناتهی F از A را یک *پالایه* در $\mathfrak{A}$ می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in F$ داشته باشیم $x \odot y \in F$ و برای هر $x \in F$ و $y \in A$ داشته باشیم $x \vee y \in F$. مجموعه تمام پالایه‌های $\mathfrak{A}$ را با $\mathcal{F}(\mathfrak{A})$ نشان می‌دهیم. آشکار است که $\{1\}, A \in \mathcal{F}(\mathfrak{A})$. پالایه F را *سره* می‌نامیم هرگاه $F \neq A$. به سادگی می‌توان دید که F یک پالایه سره است اگر و تنها اگر $0 \notin F$. آشکار است که $(A; \mathcal{F}(\mathfrak{A}))$ یک *سامانه بسته جبری* است. عمل‌گر بستار متناظر با این سامانه را با $\mathcal{F}^{\mathfrak{A}}$ (و هرجا نیاز به تاکید نباشد با $\mathcal{F}$) نشان می‌دهیم. برای هر زیرمجموعه X از A، $\mathcal{F}(X)$ را *پالایه تولید شده توسط* X در $\mathfrak{A}$ می‌نامیم. برای هر $x \in A$، $\mathcal{F}(\{x\})$ را با $\mathcal{F}(x)$ نشان می‌دهیم و آن را *پالایه اصلی* تولید شده توسط x می‌نامیم. مجموعه تمام پالایه‌های اصلی $\mathfrak{A}$ را با $\mathcal{FP}(\mathfrak{A})$ نشان می‌دهیم. فرض کنید $\mathfrak{F}$ گردایه‌ای از پالایه‌های $\mathfrak{A}$ است. قرار می‌دهیم $\sqcup \mathfrak{F} = \mathcal{F}(\bigcup \mathfrak{F})$. بنابر [۲۱]، $(\mathcal{F}(\mathfrak{A});\cap,\sqcup,\{1\},A)$ یک *قاب* و در نتیجه یک جبرهیتینگ *کامل* است.

مثال ۶: مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}_6$ از **مثال ۳** را در نظر بگیرید. در این صورت، داریم:
$\{F_1 = \{1\}, F_2 = \{d, 1\}, F_3 = \{a, b, d, 1\}, F_4 = \{c, d, 1\}, F_5 = A_6\}.$

مثال ۷: مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}_7$ از **مثال ۴** را در نظر بگیرید. در این صورت، داریم:
$\mathcal{F}(\mathfrak{A}_7) = \{F_1 = \{1\}, F_2 = \{b, d, 1\}, F_3 = \{e, 1\}, F_4 = \{a, b, c, d, e, 1\}, F_5 = A_7\}.$

گزاره ۸ [۲۶]**:** فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار، F یک پالایه در $\mathfrak{A}$ و X زیرمجموعه‌ای از A است. بندهای زیر برقرارند:

۱) $\mathcal{F}(F, X) := F \sqcup \mathcal{F}(X) = \{a \in A | f \odot x_1 \odot \cdots \odot x_n \leq a, f \in F, x_1, \cdots, x_n \in X, n \geq 1\}$؛

۲) $\mathcal{F}(F, x) \cap \mathcal{F}(F, y) = \mathcal{F}(F, x \vee y)$؛

۳) هرگاه $x \leq y$ آنگاه $\mathcal{F}(y) \subseteq \mathcal{F}(x)$؛

۴) $\mathcal{F}(\mathrm{x}) \sqcup \mathcal{F}(\mathrm{y}) = \mathcal{F}(\mathrm{x} \wedge \mathrm{y}) = \mathcal{F}(\mathrm{x} \odot \mathrm{y}) = \mathcal{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$؛

۵) $(\mathcal{FP}(\mathfrak{A});\cap,\sqcup,\mathcal{F}(1) = \{1\}, \mathcal{F}(0) = A)$ زیرمشبکه $\mathcal{F}(\mathfrak{A})$ است.

یک پالایه سره در مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}$ را *بیشین* می‌نامیم هرگاه در مجموعه تمام پالایه‌های سره $\mathfrak{A}$ بیشین باشد. مجموعه تمام پالایه‌های بیشین $\mathfrak{A}$ را با $Max(\mathfrak{A})$ نشان می‌دهیم. پالایه سره P در $\mathfrak{A}$ را *اول* می‌نامیم هرگاه $x \vee y \in P$ نتیجه دهد $x \in P$ یا $y \in P$، برای هر $x, y \in A$. مجموعه تمام پالایه‌های اول $\mathfrak{A}$ را با $Spec(\mathfrak{A})$ نشان می‌دهیم. از آن جا که $\mathcal{F}(\mathfrak{A})$ یک مشبکه پخش‌پذیر است می‌توان نشان داد که $Max(\mathfrak{A}) \subseteq Spec(\mathfrak{A})$. با استفاده از لم زرن، می‌توان نشان داد که هر پالایه سره در $\mathfrak{A}$، مشمول در یک پالایه بیشین و در نتیجه مشمول در یک پالایه اول است.

مثال ۹: مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}_6$ از **مثال ۳** را در نظر بگیرید. بنابر **مثال ۶** داریم $Max(\mathfrak{A}_6) = \{F_3, F_4\}$ و $Spec(\mathfrak{A}_6) = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$.

مثال ۱۰: مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}_7$ از **مثال ۴** را در نظر بگیرید. بنابر **مثال ۷** داریم $Max(\mathfrak{A}_7) = \{F_4\}$ و $(\mathfrak{A}_7) = \{F_2, F_3, F_4\}$.

فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار است. مجموعه ناتهی C از A را یک مجموعه $\vee$-بسته در $\mathfrak{A}$ می‌نامیم هرگاه تحت عمل « $\vee$ » بسته باشد؛ یعنی $x, y \in C$ نتیجه دهد $x \vee y \in C$.

گزاره ۱۱ [۲۷، گزاره ۳.۱۸]: **(گزاره بنیادین پالایه‌های اول)** فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و F پالایه‌ای در $\mathfrak{A}$ است. هرگاه C یک مجموعه $\vee$-بسته در $\mathfrak{A}$ باشد که F را قطع نکند، آنگاه پالایه‌ای مانند P شامل F وجود دارد که نسبت به ویژگی قطع نکردن C بیشین است. به علاوه، P پالایه‌ای اول است.

نتیجه ۱۲ [۲۷، نتیجه ۳.۱۹]: فرض کنید F پالایه‌ای در مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}$ و X زیرمجموعه‌ای از A است. بندهای زیر برقرارند:

۱) هرگاه $X \nsubseteq F$، آنگاه پالایه اولی مانند P شامل F وجود دارد که $X \nsubseteq P$؛

۲) $\mathcal{F}(X) = \{P \in Spec(\mathfrak{A}) | X \subseteq P\}$

فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار است و X زیرمجموعه‌ای از A. پالایه اول P در $\mathfrak{A}$ را یک *پالایه اول کمین وابسته به* X (به سادگی، *پالایه* X-اول کمین) می‌نامیم، هرگاه P در مجموعه تمام پالایه‌های اولی که شامل X هستند، یک عنصر *کمین* باشد. مجموعه تمام پالایه‌های X-اول کمین در $\mathfrak{A}$ را با $Min_X(\mathfrak{A})$ نشان می‌دهیم. پالایه اول P در $\mathfrak{A}$ را اول کمین می‌نامیم هرگاه $P \in Min_{\{1\}}(\mathfrak{A})$. مجموعه پالایه‌های اول کمین $\mathfrak{A}$ را با $Min(\mathfrak{A})$ نشان می‌دهیم.

گزاره زیر یک بازشناسی اساسی از پالایه‌های اول کمین در مشبکه‌های مانده‌دار ارایه می‌دهد.

گزاره ۱۳ [۲۷، گزاره ۳.۲۴]: **(گزاره بنیادین پالایه‌های اول کمین)** فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و F پالایه‌ای در $\mathfrak{A}$ است. زیرمجموعه P از A یک پالایه F-اول کمین است اگر وتنها اگر P^c یک مجموعه $\vee$-بسته در $\mathfrak{A}$ باشد که نسبت به ویژگی قطع نکردن F بیشین باشد.

نتیجه ۱۴ [۲۷، نتیجه ۳.۲۵]: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار، X یک زیرمجموعه A و P یک پالایه در $\mathfrak{A}$ شامل X است. در این صورت، یک پالایه X-اول کمین مشمول در P وجود دارد.

نتیجه زیر باید با **نتیجه ۱۲** مقایسه شود.

نتیجه ۱۵ [۲۷، نتیجه ۳.۲۶]: فرض کنید F پالایه‌ای در مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}$ و X زیرمجموعه‌ای از A است. بندهای زیر برقرارند:

۱. هرگاه $X \nsubseteq F$، آنگاه پالایه F-اول کمین مانند P وجود دارد که $X \nsubseteq P$؛

۲. $\mathcal{F}(X) = \bigcap Min_X(\mathfrak{A})$.

تعریف ۱۶ [۲۵]: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و F پالایه‌ای در $\mathfrak{A}$ است. برای هر زیرمجموعه X از A *هم‌پوچساز* X وابسته به F (به سادگی؛ F-هم‌پوچساز X) را با $(F{:}X)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(F{:}X) = \{a \in A | a \vee x \in F, \forall x \in X\}.$$

هرگاه $X = \{x\}$، به جای $(F{:}X)$ می‌نویسیم $(F{:}x)$ و آن را *هم‌پوچک* x وابسته به F می‌نامیم. هرگاه $F = \{1\}$، $(F{:}X)$ را با $X^{\perp}$ نشان می‌دهیم و آن را هم‌پوچساز X می‌نامیم. همچنین، $\{x\}^{\perp}$ را هم‌پوچک x می‌نامیم و با $x^{\perp}$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱۷: مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}_6$ از **مثال ۳** را در نظر بگیرید. بنابر نمادهای **مثال ۶** داریم $(F_4{:}\,0) = F_4$، $(F_4{:}\,a) = F_4$، $(F_4{:}\,b) = F_4$، $(F_4{:}\,c) = F_5$، $(F_4{:}\,d) = F_5$ و $(F_4{:}\,1) = F_5$.

گزاره ۱۸ [۲۵، گزاره ۳.۱]**:** فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار است و F پالایه‌ای در $\mathfrak{A}$. بندهای زیر برای هر $X, Y \subseteq A$ برقرارند:

۱. $X \subseteq (F{:}\,Y)$ اگر و تنها اگر $Y \subseteq (F{:}\,X)$؛
۲. $(F{:}\,X) = A$ اگر و تنها اگر $X \subseteq F$.

فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه‌مانده‌دار و F پالایه‌ای در $\mathfrak{A}$ است. قرار می‌دهیم $\Gamma_F(\mathfrak{A}) = \{(F{:}\,X) | X \subseteq A\}$ و عناصر آن را F–هم‌پوچسازهای $\mathfrak{A}$ می‌نامیم. بنابر [۲۵، گزاره ۳.۱۳]، $(\Gamma_F(\mathfrak{A}){:}\cap, \vee^{\Gamma_F}, F, A)$ یک مشبکه بولی کامل است که برای هر $\mathfrak{F} \subseteq \Gamma_F(\mathfrak{A})$ داریم $\vee^{\Gamma_F} \mathfrak{F} := (F{:}\,(F{:}\,\bigcup \mathfrak{F}))$.

گزاره ۱۹ [۲۵، گزاره ۳.۱۵]**:** فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار است و F پالایه‌ای در $\mathfrak{A}$. بندهای زیر برای هر $x, y \in A$ برقرارند:

۱. $x \leq y$ بیان می‌کند $(F{:}\,x) \subseteq (F{:}\,y)$؛
۲. $(F{:}\,x) \cap (F{:}\,y) = (F{:}\,x \odot y)$؛
۳. $(F{:}\,(F{:}\,x)) \cap \big(F{:}\,(F{:}\,y)\big) = (F{:}\,(F{:}\,x \vee y))$؛
۴. $(F{:}\,x) \sqcup (F{:}\,y) \subseteq (F{:}\,x) \vee^{\Gamma_F} (F{:}\,y) = (F{:}\,x \vee y)$.

فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه‌مانده‌دار و F پالایه‌ای در $\mathfrak{A}$ است. قرار می‌دهیم $\gamma_F(\mathfrak{A}) = \{(F{:}\,x) | x \in A\}$ و عناصر آن را F–هم‌پوچک‌های $\mathfrak{A}$ می‌نامیم. بنابر [۲۵، گزاره ۳.۱۶]، $\gamma_F(\mathfrak{A})$ یک زیرمشبکه‌ی $\Gamma_F(\mathfrak{A})$ است.

۳– ω–پالایه‌ها

در این بخش، ω–پالایه‌ها در مشبکه‌های مانده‌دار را معرفی و بررسی می‌کنیم. گونه‌ی ویژه‌ای از این پالایه‌ها، به نام پالایه‌های بخش‌یاب، ابزار مهمی در مطالعه‌ی پالایه‌های اول کمین در مشبکه‌های مانده‌دار هستند.

تعریف ۲۰: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و F پالایه‌ای در $\mathfrak{A}$ است. برای هر زیرمجموعه X از A قرار می‌دهیم:

$$\omega_F(X) = \{a \in A | x \vee a \in F, \exists x \in H\}.$$

در ادامه، $\omega_{\{1\}}(X)$ را با $\omega(X)$ نشان می‌دهیم.

نکته ۲۱: نمادهای $O(P)$ برای یک ایده‌آل اول P و دوگان آن، $\omega(P)$ برای یک پالایه اول P، در مشبکه‌های پخش‌پذیر صفردار در [۳] معرفی شدند. کرنیش در [۳، گزاره ۲.۲] نشان داد که $O(P)$ برابر است با اشتراک تمام ایده‌آل‌های اول کمین مشمول در P.

فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و F پالایه‌ای در $\mathfrak{A}$ است. عنصر x در A را F–*چگال* می‌نامیم هرگاه، داشته باشیم $(F{:}\,x) = F$. مجموعه تمام عناصر F–چگال A را با $\mathfrak{D}_F(\mathfrak{A})$ نشان می‌دهیم. بنابر **گزاره ۱۹** (۱ و ۴) می‌توان نشان داد که $\mathfrak{D}_F(\mathfrak{A})$ ایده‌آلی از $\ell(\mathfrak{A})$ است.

گزاره ۲۲: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار است. بندهای زیر برای هر $F, G \in \mathcal{F}(\mathfrak{A})$ و $X, Y \subseteq A$ برقرارند:

۱. $\omega_F(X) = \bigcup_{x \in X} (F{:}\,x)$؛
۲. $\omega_F(X) = \{a \in A | (F{:}\,a) \cap X \neq \emptyset\}$؛
۳. $F \subseteq \omega_F(X)$؛
۴. هرگاه $X \subseteq Y$، آنگاه $\omega_F(X) \subseteq \omega_F(Y)$؛
۵. هرگاه $F \subseteq G$، آنگاه $\omega_F(X) \subseteq \omega_G(X)$؛
۶. $\omega_F(X) = A$ اگر و تنها اگر $F \cap X \neq \emptyset$؛
۷. $\omega_F(X) = F$ اگر و تنها اگر $X \subseteq \mathfrak{D}_F(\mathfrak{A})$.

برهان. ما تنها بندهای (۶) و (۷) را اثبات می‌کنیم، زیرا اثبات بقیه‌ی بندها سر راست است.

۶. هرگاه $\omega_F(X) = A$، آنگاه $0 \in \omega_F(X)$ و این بیان می‌کند که $0 \in (F{:}\,x)$، به ازای یک $x \in X$. بنابراین، $x \in (F{:}\,0) = F$ و این یعنی این که

$F \cap X \neq \emptyset$. برعکس، هرگاه $x \in F \cap X$، آنگاه داریم $(F:x) = A$ و این نشان می‌دهد که $\omega_F(X) = A$.

۷. فرض کنید $\omega_F(X) = F$ و $x \in X$. بنابراین داریم $F \subseteq (F:x) \subseteq \omega_F(X) = F$ و این نشان می‌دهد که $x \in \mathfrak{D}_F(\mathfrak{A})$. برعکس، هرگاه $X \subseteq \mathfrak{D}_F(\mathfrak{A})$، آنگاه $(F:x) = F$ برای هر $x \in X$ و این بیان می‌کند که $\omega_F(X) = F$.

گزاره ۲۳: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و F پالایه‌ای در $\mathfrak{A}$ و C یک مجموعه $\vee$-بسته در $\mathfrak{A}$ است. در این صورت، $\omega_F(C)$ یک پالایه در $\mathfrak{A}$ است.

برهان. بنابر **گزاره ۲۲(۳)** داریم $1 \in \omega_F(C)$. هرگاه $a \leq b$ و $a \in \omega_F(C)$، آنگاه $a \in (F:c)$، به ازای یک $c \in C$، و بنابراین $c \in (F:a)$. بنابر **گزاره ۱۹(۱)** داریم $c \in (F:b)$ و این بیان می‌کند که $b \in (F:c) \subseteq \omega_F(C)$. هرگاه $a, b \in \omega_F(C)$، آنگاه $c_a, c_b \in C$ چنان وجود دارند که $a \in (F:c_a)$ و $b \in (F:c_b)$. بنابراین داریم $c_a \vee c_b \in (F: a \odot b)$ و این نشان می‌دهد که $a \odot b \in \omega_F(C)$.

فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه است. یاد آوری می‌کنیم که زیرمجموعه I از A را یک *ایده‌آل* می‌نامیم هرگاه I، یک زیرمجموعه $\vee$-بسته از $\mathfrak{A}$ باشد و $x \leq y$ نتیجه دهد $x \in I$، برای هر $x \in A$ و $y \in I$. مجموعه ایده‌آل‌های $\mathfrak{A}$ را با $\mathcal{I}(\mathfrak{A})$ نشان می‌دهیم. برای هر زیرمجموعه X از A، ایده‌آل تولید شده توسط X در $\mathfrak{A}$ را با $\mathcal{I}(X)$ نشان می‌دهیم. همچنین، برای هر $x \in A$، $\mathcal{I}(\{x\})$ با $\mathcal{I}(x)$ نموده خواهد شد. گزاره زیر دارای برهان سرراستی است و بنابراین برهان آن را حذف می‌کنیم.

گزاره ۲۴: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار است. بندهای زیر برقرارند:

۱. $(\mathcal{I}(\ell(\mathfrak{A}));\cap,\curlyvee)$ یک قاب است، جایی که $\curlyvee \mathfrak{I} = \mathcal{I}(\bigcup\mathfrak{I})$، برای هر $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{I}(\ell(\mathfrak{A}))$؛

۲. $\mathcal{I}(x) = \{a \in A | a \leq x\}$ برای هر $x \in A$؛

۳. $\mathcal{I}(x) \cap \mathcal{I}(y) = \mathcal{I}(x \wedge y)$؛

۴. $\mathcal{I}(x) \curlyvee \mathcal{I}(y) = \mathcal{I}(x \vee y)$؛

۵. برای هر پالایه اول P در $\mathfrak{A}$، $P^c \in \mathcal{I}(\ell(\mathfrak{A}))$.

تعریف ۲۵: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و F پالایه‌ای از $\mathfrak{A}$ است. پالایه H از $\mathfrak{A}$ را یک ω_F-پالایه می‌نامیم هرگاه $H = \omega_F(I_H)$، به ازای یک ایده‌آل I_H از $\ell(\mathfrak{A})$. مجموعه تمام ω_F-پالایه‌های $\mathfrak{A}$ را با $\Omega_F(\mathfrak{A})$ نشان می‌دهیم. آشکار است که $F, A \in \Omega_F(\mathfrak{A})$. در ادامه، $\Omega_{\{1\}}(\mathfrak{A})$ با $\Omega(\mathfrak{A})$ می‌نماییم و عناصر آن را ω-پالایه می‌نامیم.

گزاره ۲۶: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و F پالایه‌ای از $\mathfrak{A}$ است. در این صورت، $(\Omega_F(\mathfrak{A});\cap,\vee^{\omega_F},F,A)$ یک مشبکه پخش‌پذیر کراندار است که در آن برای هر $G, H \in \Omega_F(\mathfrak{A})$ داریم $G \vee^{\omega_F} H = \omega_F(I_G \curlyvee I_H)$.

برهان. فرض کنید $G, H \in \Omega_F(\mathfrak{A})$. به سادگی می‌توان نشان داد که $G \cap H = \omega_F(I_G \cap I_H)$ و $G \vee^{\omega_F} H$ کوچک‌ترین کران بالای G و H است. همچنین، پخش‌پذیری مشبکه $\Omega_F(\mathfrak{A})$ نتیجه‌ای ساده از **گزاره ۲۴(۱)** است.

لم ۲۷: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و F پالایه‌ای از $\mathfrak{A}$ است. در این صورت، $\gamma_F(\mathfrak{A})$ زیرمجموعه $\Omega_F(\mathfrak{A})$ است.

برهان. بنابر **گزاره ۱۹(۱)** و **۲۲(۱)** داریم $(F:x) = \omega_F(\mathcal{I}(x))$، برای هر $x \in A$.

گزاره ۲۸: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و F

پالایه‌ای از $\mathfrak{A}$ است. در این صورت، $\gamma_F(\mathfrak{A})$ زیرمشبکه $\Omega_F(\mathfrak{A})$ است.

برهان. بنابر **لم ۲۷**، $\gamma_F(\mathfrak{A})$ زیرمجموعه $\Omega_F(\mathfrak{A})$ است. همچنین، برای هر $x, y \in A$ داریم:

$$\begin{aligned}(F:x) \vee^{\omega_F} (F:y) &= \omega_F(\mathcal{J}(x)) \vee^{\omega_F} \omega_F(\mathcal{J}(y)) \\ &= \omega_F(\mathcal{J}(x) \curlyvee \mathcal{J}(y)) \\ &= \omega_F(\mathcal{J}(x \vee y)) \\ &= (F: x \vee y) \\ &= (F:x) \vee^{\Gamma_F} (F:y).\end{aligned}$$

نتیجه ۲۹: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و F پالایه‌ای از $\mathfrak{A}$ است. هرگاه $x \vee y \in F$، آنگاه $(F:x) \vee^{\omega_F} (F:y) = A$.

برهان. با استفاده از **گزاره ۱۸(۲)** و **۲۸**، برهان سر راست است.

حال مفهوم پالایه‌های بخش‌یاب را به عنوان گونه ویژه‌ای از ω-پالایه‌ها در مشبکه‌های‌مانده‌دار معرفی می‌کنیم. این پالایه‌ها نقش مهمی در بررسی پالایه‌های اول کمین در یک مشبکه‌مانده‌دار ایفا می‌کنند.

تعریف ۳۰: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و F پالایه‌ای در $\mathfrak{A}$ است. برای هر پالایه سره H در $\mathfrak{A}$ قرار می‌دهیم $D_F(H) = \omega_F(H^c)$. عناصر $D_F(H)$ را *بخش‌یاب‌های* F وابسته به H (به سادگی؛ F-بخش‌یاب‌های H) در $\mathfrak{A}$ می‌نامیم. در ادامه، $D_{\{1\}}(H)$ را با $D(H)$ نشان می‌دهیم و عناصر آن را *بخش‌یاب‌های یکه* H در $\mathfrak{A}$ می‌نامیم. همچنین، بخش‌یاب‌های $\{1\}$ را به سادگی بخش‌یاب‌های یکه $\mathfrak{A}$ می‌نامیم.

گزاره ۳۱: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و F پالایه‌ای در $\mathfrak{A}$ است. بندهای زیر برای هر پالایه H و K در $\mathfrak{A}$، برقرارند:

۱. $F \subseteq D_F(H) = \{a \in A | (F:a) \nsubseteq H\} = \bigcup_{x \notin H} (F:x)$؛
۲. هرگاه $H \subseteq K$، آنگاه $D_F(K) \subseteq D_F(H)$؛
۳. هرگاه $F \subseteq G$، آنگاه $D_F(H) \subseteq D_G(H)$؛
۴. $D_F(H) = A$ اگر و تنها اگر $F \nsubseteq H$؛
۵. $D_F(H) = F$ اگر و تنها اگر $H^c \subseteq \mathfrak{D}_F(\mathfrak{A})$.

برهان. بنابر **گزاره ۲۲** و **تعریف ۳۰**، برهان سر راست است.

گزاره ۳۲: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و F پالایه‌ای در $\mathfrak{A}$ است. برای هر پالایه اول P، بندهای زیر برقرارند:

۱. $D_F(P)$ یک ω-پالایه در $\mathfrak{A}$ است؛
۲. هرگاه P شامل F باشد، آنگاه $D_F(P) \subseteq P$.

برهان.

۱. بنابر **گزاره ۲۴(۵)** و **تعریف ۳۰** برهان آشکار است.
۲. فرض کنید P شامل F است. از آن جا که $(F:a) \subseteq P$، برای هر $a \notin P$، بنابر **گزاره ۳۱(۱)** برهان آشکار است.

فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و F پالایه‌ای در $\mathfrak{A}$ است. پالایه G در $\mathfrak{A}$ را یک F-پالایه بخش‌یاب می‌نامیم هرگاه پالایه‌ی اولی مانند P در $\mathfrak{A}$ وجود داشته باشد که $G = D_F(P)$.

در گزاره زیر، یکی از بارزترین ویژگی‌های پالایه‌های اول کمین را بررسی کرده و یک بازشناسی اساسی برای پالایه‌های اول کمین با استفاده از پالایه‌های بخش‌یاب ارائه می‌دهیم.

گزاره ۳۳: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و F پالایه‌ای در $\mathfrak{A}$ است. برای هر پالایه اول P در $\mathfrak{A}$ که شامل F باشد، بندهای زیر هم‌ارزند:

۱. P، F-اول کمین است؛
۲. $P = D_F(P)$؛

۳. برای هر $x \in A$، P شامل یک وتنها یک x یا $(F:x)$ است.

برهان. ۲⇐۱: فرض کنید $x \in P$. به سادگی می‌توان نشان داد که $C = (x \vee P^c) \cup P^c$ یک مجموعه $\vee$-بسته در $\mathfrak{A}$ است. بنابر **گزاره ۱۳** می‌توان نتیجه گرفت که $(x \vee P^c) \cap F = C \cap F \neq \emptyset$.
حال، $a \in (x \vee P^c) \cap F$ را در نظر بگیرید. بنابراین، $y \notin P$ وجود دارد که $x \vee y = a \in F$ و این یعنی $x \in D_F(P)$. شمول وارون با استفاده از **گزاره ۳۲**(۲) بدیهی است.
۳⇐۲: با استفاده از **گزاره ۳۱** (۱) برهان آشکار است.
۱⇐۳: فرض کنید Q یک پالایه اول مشمول در P و شامل F است. $x \in P$ را در نظر بگیرید. بنابراین، $(F:x) \nsubseteq P$ و این بیان می‌کند که $x \in D_F(P) \subseteq D_F(Q) \subseteq Q$ و در نتیجه $P = Q$.

نکته ۳۴: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و F پالایه‌ای در $\mathfrak{A}$ است. بنابر **گزاره ۳۱**(۲) و **۳۳**، هرگاه $\mathfrak{m}$ یک پالایه F-اول کمین باشد، آنگاه $\mathfrak{m} = D_F(\mathfrak{m}) \subseteq D_F(F)$. به ویژه، هرپالایه اول کمین زیرمجموعه‌ای از بخش‌یاب‌های یکه است.
در ادامه، می‌خواهیم پالایه‌های بخش‌یاب را با استفاده از پالایه‌های اول کمین بازشناسی کنیم.

لم ۳۵: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار، F یک پالایه و P پالایه‌ای اول در $\mathfrak{A}$ است. در این صورت، هر پالایه $D_F(P)$-اول کمین مشمول در P است.

برهان. فرض کنید $\mathfrak{m}$ یک پالایه $D_F(P)$-اول کمین در $\mathfrak{A}$ است. فرض کنید $\mathfrak{m} \nsubseteq P$. $x \in \mathfrak{m} \setminus P$ را در نظر بگیرید. بنابر **گزاره ۳۳**، داریم $x \in D_{D_F(P)}(\mathfrak{m})$ و این یعنی یک $y \notin \mathfrak{m}$ وجود دارد که $x \vee y \in D_F(P)$. بنابراین، $z \notin P$ وجود دارد که $x \vee y \in (F:z)$ و این نتیجه می‌دهد که $y \in (F: x \vee z) \subseteq D_F(P) \subseteq \mathfrak{m}$؛ این یک تناقض است.

گزاره ۳۶: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار، F یک پالایه و P پالایه‌ای اول در $\mathfrak{A}$ است. داریم:
$Min_{D_F(P)}(\mathfrak{A}) = \{\mathfrak{m} \in Min_F(\mathfrak{A}) | \mathfrak{m} \subseteq P\}$.

برهان. قرار می‌دهیم $\mu = \{\mathfrak{m} \in Min_F(\mathfrak{A}) | \mathfrak{m} \subseteq P\}$. $\mathfrak{m} \in \mu$ را در نظر بگیرید. بنابر **گزاره ۳۱**(۴) و **۳۳**، داریم $D_F(P) \subseteq D_F(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$. بنابراین، $\mathfrak{m}$ یک پالایه اول شامل $D_F(P)$ است. فرض کنید $\mathfrak{w}$ یک پالایه اول شامل $D_F(P)$ و مشمول در $\mathfrak{m}$ است. داریم $\mathfrak{m} = D_F(\mathfrak{m}) \subseteq D_F(\mathfrak{w}) \subseteq \mathfrak{w}$ و این نشان می‌دهد که $\mathfrak{m} = \mathfrak{w}$. بنابراین، $\mathfrak{m} \in Min_{D_F(P)}(\mathfrak{A})$ و در نتیجه $\mu \subseteq Min_{D_F(P)}(\mathfrak{A})$.
حال، فرض کنید $\mathfrak{m} \in Min_{D_F(P)}(\mathfrak{A})$. بنابر **گزاره ۳۱**(۳) و **لم ۳۵** داریم $F \subseteq \mathfrak{m} \subseteq P$. فرض کنید $\mathfrak{w}$ یک پالایه اول شامل F و مشمول $\mathfrak{m}$ است. داریم $D_F(P) \subseteq D_F(\mathfrak{w}) \subseteq \mathfrak{w}$ و بنابراین، $\mathfrak{w}$ یک پالایه اول شامل $D_F(P)$ است و این نتیجه می‌دهد $\mathfrak{m} = \mathfrak{w}$. این نشان می‌دهد که $\mathfrak{m} \in \mu$ و در نتیجه $Min_{D_F(P)}(\mathfrak{A}) \subseteq \mu$.

نتیجه ۳۷: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار، F یک پالایه و P پالایه‌ای اول در $\mathfrak{A}$ است. داریم:
$D_F(P) = \bigcap\{\mathfrak{m} \in Min_F(\mathfrak{A}) | m \subseteq P\}$.

برهان. بنابر **نتیجه ۱۵**(۲) و **گزاره ۳۶** برهان سر راست است.

۴- mp-مشبکه‌های مانده‌دار

در این بخش، mp-مشبکه‌های مانده‌دار را معرفی می‌کنیم و آنها را مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف ۳۸: مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}$ را mp می‌نامیم هرگاه هر پالایه اول در $\mathfrak{A}$ شامل یک پالایه اول کمین منحصر به فرد باشد.

گزاره ۳۹: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه‌مانده‌دار است. بندهای زیر هم‌ارزند:

۱. برای هر دو پالایه اول کمین متمایز $\mathfrak{m}_1$ و $\mathfrak{m}_2$ در $\mathfrak{A}$، داریم $\mathfrak{m}_1 \sqcup \mathfrak{m}_2 = A$ ($\mathfrak{m}_1$ و $\mathfrak{m}_2$ هم‌بیشین هستند)؛

۲. $\mathfrak{A}$، mp است؛

۳. برای هر پالایه اول P در $\mathfrak{A}$، $D(P)$ اول است؛

۴. برای هر $x, y \in A$ هرگاه $x \vee y = 1$ آنگاه $x^\perp \sqcup y^\perp = A$؛

۵. برای هر $x, y \in A$ هرگاه $x \vee y = 1$ آنگاه $u \in x^\perp$ و $v \in y^\perp$ چنان وجود دارند که $u \odot v = 0$؛

۶. برای هر $x, y \in A$، $(x \vee y)^\perp = x^\perp \sqcup y^\perp$؛

۷. برای هر $x, y \in A$، هرگاه $(x \vee y)^\perp = A$، آنگاه $x^\perp \sqcup y^\perp = A$

برهان. ۲⇐۱: آشکار است.

۳⇐۲: بنابر **نتیجه ۳۷**، بدیهی است.

۴⇐۳: $x, y \in A$ را چنان در نظر بگیرید که $x \vee y = 1$. فرض کنید $x^\perp \sqcup y^\perp \neq A$. بنابراین، پالایه اولی مانند P وجود دارد که شامل $x^\perp \sqcup y^\perp$ است. بنابر **گزاره ۳۱(۱)**، $x, y \notin D_F(P)$ و این تناقض با اول بودن $D_F(P)$ دارد.

۵⇐۴: $x, y \in A$ را چنان در نظر بگیرید که $x \vee y = 1$. بنابراین، $x^\perp \sqcup y^\perp = A$. بنابر **گزاره ۸(۱)**، $u \in x^\perp$ و $v \in y^\perp$ چنان وجود دارند که $u \odot v = 0$.

۶⇐۵: $x, y \in A$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $a \in (x \vee y)^\perp$. بنابراین، $b \in (a \vee x)^\perp$ و $c \in y^\perp$ چنان وجود دارند که $b \odot c = 0$. بنابر **گزاره ۲(۶)**، داریم $a = a \vee (b \odot c) \geq (a \vee b) \odot (a \vee c)$. از طرفی، داریم $a \vee b \in x^\perp$ و $a \vee c \in y^\perp$. پس، بنابر **گزاره ۸(۱)** داریم $a \in x^\perp \sqcup y^\perp$. شمول عکس بنابر **گزاره ۱۹(۴)** برقرار است.

۷⇐۶: بدیهی است.

۱⇐۷: فرض کنید $\mathfrak{m}_1$ و $\mathfrak{m}_2$ دو پالایه اول کمین متمایز در $\mathfrak{A}$ هستند. $x_1 \in \mathfrak{m}_2 \setminus \mathfrak{m}_1$ و $x_2 \in \mathfrak{m}_1 \setminus \mathfrak{m}_2$ را در نظر بگیرید. بنابر **گزاره ۳۳(۳)**، $y_2 \notin \mathfrak{m}_1$ چنان وجود دارد که $x_2 \vee y_2 = 1$ قرار می‌دهیم $a_1 = x_1 \vee y_2$ و $a_2 = x_2$. بنابراین، $a_1 \notin \mathfrak{m}_1$، $a_2 \notin \mathfrak{m}_2$ و $a_1 \vee a_2 = 1$. این بیان می‌کند که $(a_1 \vee a_2)^\perp = A$ و بنابراین $A = a_1^\perp \sqcup a_2^\perp = \mathfrak{m}_1 \sqcup \mathfrak{m}_2$.

گزاره ۴۰: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه‌مانده‌دار است. بندهای زیر هم‌ارزند:

۱. برای هر $F, G \in \Omega(\mathfrak{A})$، هرگاه $F \vee^\omega G = A$، آنگاه $F \sqcup G = A$؛

۲. $\mathfrak{A}$، mp است؛

۳. برای هر $\mathfrak{F} \subseteq \Omega(\mathfrak{A})$، داریم $\sqcup \mathfrak{F} \in \Omega(\mathfrak{A})$؛

۴. $\Omega(\mathfrak{A})$ زیرمشبکه $\mathcal{F}(\mathfrak{A})$ است؛

۵. $\gamma(\mathfrak{A})$ زیرمشبکه $\mathcal{F}(\mathfrak{A})$ است.

برهان. ۲⇐۱: $x, y \in A$ را چنان در نظر بگیرید که $x \vee y = 1$ از آن جا که $\gamma(\mathfrak{A})$ زیرمشبکه $\Omega(\mathfrak{A})$ است بنابراین داریم

$$x^\perp \vee^\omega y^\perp = x^\perp \vee^\Gamma y^\perp = (x \vee y)^\perp = A\,.$$

پس، بنابر **گزاره ۳۹(۴)**، $\mathfrak{A}$ mp است.

۳⇐۲: فرض کنید $\{F_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از ω-پالایه‌ها است و برای هر $i \in I$، فرض کنید I_i ایده‌آلی از $\ell(\mathfrak{A})$ است که $F_i = \omega(I_i)$. بنابر **گزاره ۳۲(۴)**، برای هر $i \in I$ داریم $F_i \subseteq \omega(\curlyvee_{i \in I} I_i)$ و از آن جا که $\omega(\curlyvee_{i \in I} I_i)$ یک پالایه است داریم $\sqcup_{i \in I} F_i \subseteq \omega(\curlyvee_{i \in I} I_i)$. فرض کنید $a \in \omega(\curlyvee_{i \in I} I_i)$. بنابراین، $x \in \curlyvee_{i \in I} I_i$ چنان وجود دارد که $a \in x^\perp$. بنابراین، $x \leq x_{i_1} \vee \cdots \vee x_{i_n}$، به ازای یک عدد

صحیح مثبت مانند n و $x_{i_j} \in I_{i_j}$ بنابر **گزاره ۱۹(۱)** و **گزاره ۳۹(۶)** داریم:

$$\begin{aligned} x^{\perp} &\subseteq \left(x_{i_1} \vee \cdots \vee x_{i_n}\right)^{\perp} \\ &= x_{i_1}^{\perp} \sqcup \cdots \sqcup x_{i_n}^{\perp} \\ &\subseteq F_{i_1} \sqcup \cdots \sqcup F_{i_n} \\ &\subseteq \sqcup_{i \in I} F_i. \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که $\sqcup_{i\in I} F_i = \omega(\curlyvee_{i\in I} I_i)$.

۳⇐۴: فرض کنید $F, G \in \Omega(\mathfrak{A})$. بنابر **گزاره ۲۶**، داریم $F \sqcup G \subseteq F \vee^{\omega} G$ و بنابر بند (۳) داریم $F \vee^{\omega} G \subseteq F \sqcup G$. این نتیجه را اثبات می‌کند.

۴⇐۵: بدیهی است.

۵⇐۱: $F, G \in \Omega(\mathfrak{A})$ را چنان در نظر بگیرید که $F \vee^{\omega} G = A$. از آن جا که $\omega(I_F \curlyvee I_G) = A$ بنابراین $1 \in I_F \curlyvee I_G$ و این بیان می‌کند که $f \vee g = 1$، به ازای یک $f \in I_F$ و $g \in I_G$. بنابراین داریم:

$$A = (f \vee g)^{\perp} = f^{\perp} \vee^{\Gamma} g^{\perp} = f^{\perp} \sqcup g^{\perp} \subseteq F \sqcup G.$$

این نتیجه را اثبات می‌کند.

فهرست منابع

1. Birkhoff, G. (1940), Lattice theory, Vol. 25, American Mathematical Soc.

2. Grätzer, G. and E. T. Schmidt. 1957. On a problem of M. H. Stone. Acta Mathematica Hungarica 8(3-4): 455–460.

3. Cornish, W. H. 1972. Normal lattices. J. Austral. Math. Soc. 14(2): 200–215.

4. Wallman, H. 1938. Lattices and topological spaces. Ann. Math. 39(2): 112–126.

5. Johnstone, P. T. 1982. Stone Spaces. Cambridge Stud. Adv. Math., 3, Cambridge University Press, Cambridge.

6. Pawar, Y. S. 1993. Characterizations of normal lattices. Indian J. Pure Appl.Math. 24(11):651–656.

7. Zaanen, A.C. 1983. Riesz spaces II (Vol. 30). Elsevier.

8. Krull W.,” Axiomatische Begründung der allgemeinen Ideal theorie”, Sitzungsberichte der physikalisch medizinischen Societad der Erlangen, 56 (1924) 47-63.

9. Dilworth R. P, “Abstract residuation over lattices”, Bull. Amer. Math. Soc, 44 (1938) 262-268.

10.Dilworth R. P, “Non-commutative residuated lattices”, Trans. Amer. Math. Soc,. 46 (1939) 426-444.

11.Ward M., “Residuation in structures over which a multiplication is defined”, Duke Math. Journal, 3 (1937) 627-636.

12.Ward M., “Structure Residuation”, Annals of Mathematics, 2nd Ser., 39(3) (1938) 558-568.

13.Ward M., “Residuated distributive lattices”, Duke Math. J., 6 (1940) 641-651.

14.Ward M., Dilworth R. P, “Residuated Lattices”, Proceedings of the National Academy of Sciences, 24 (1938) 162-164.

15.Ward M., Dilworth R. P, “Residuated lattices”, Transactions of the American Mathematical Society, 45 (1939) 335-354.

16.Höhle U., “Commutative residuated monoids”, in: U. Höhle, P. Klement (Eds.), Non-classical Logics and Their Aplications to Fuzzy Subsets, Kluwer Academic Publishers, (1995).

17.Okada M., Terui K., “The finite model property for various fragments of intuitionistic linear logic”, Journal of Symbolic Logic, 64 (1999) 790-802.

18.Blok W. J., Pigozzi D., “Algebraizable Logics”, Mem. Am. Math. Soc., vol. 396, Amer. Math. Soc., Providence, (1989).

19.Idziak P. M., “Lattice operations in BCK-algebras”, Mathematica Japonica, 29 (1984) 839-846.

20.Flondor P., Georgescu G., Iorgulescu A., “Pseudo-t-norms and pseudo-BL algebras”, Soft Computing, 5(2001) 355-371.

21.Galatos N., Jipsen P., Kowalski T., Ono H., “Residuated lattices: an algebraic glimpse at substructural logics”, Elsevier (2007).

22.Rasouli S., Davvaz B., “An investigation on Boolean prime filters in BL-algebras”, Soft Computing, 19(2015) 2743–2750.

23.Rasouli S., Radfar A., “PMTL filters, Rℓ filters and PBL filters in residuated lattices”, Journal of Multiple Valued Logic and Soft Computing, 29(6) (2017) 551–576.

24.Rasouli S., “Heyting, Boolean and pseudo-MV filters in residuated lattices”, Journal of Multiple Valued Logic and Soft Computing 31(4) (2018) 287–322.

25.Rasouli S., “Generalized co-annihilators in residuated lattices”, Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series, 45(2) (2018) 1–18.

26.Jipsen P., Tsinakis C., “A survey of residuated lattices”, Ordered Algebraic Structures, 7 (2002) 19-56.

27.Rasouli, S. 2019. The going up and going down theorems in residuated lattices. Soft computing DOI: 10.1007/s00500-019-03780-3.

28. rätzer G., “Lattice theory” San Francisco: W. H. Freeman and Company, (1979).