دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره بیست و نهم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

JNRM

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

برآورد پارامترهای توزیع رایلی دوپارامتری تحت سانسور فزاینده با حذف‌های دوجمله‌ای

نیلوفر اصل فلاح[۱]، اکرم کهن‌سال[۲]، رامین کاظمی[۳*]

(۱) گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران
(۲) استادیار، گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران
(۳) دانشیار، گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۸/۲۹   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۱/۳۱

چکیده

در این مقاله، برآورد پارامترهای نامعلوم توزیع رایلی دوپارامتری بر اساس سانسور فزاینده نوع ۲ با حذف دوجمله‌ای، مورد بررسی قرار گرفته است. برای این هدف، برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی پارامترها و بازه اطمینان مرتبط با آنها به‌دست می‌آید. همچنین، با استفاده از روش مونت کارلو زنجیر مارکوفی (MCMC)، برآوردگرهای بیز وبازه‌های اطمینان HPD پارامترها به‌دست می‌آیند. علاوه بر این، زمان مورد انتظار برای تکمیل آزمایش طول عمر تحت این طرح سانسور، بررسی شده است. برای مقایسه عملکرد روش‌های مختلف، شبیه‌سازی مونت کارلو انجام گرفته و یک مجموعه داده واقعی تحلیل می‌شود.

واژه‌های کلیدی: توزیع رایلی دوپارامتری، سانسور فزاینده نوع ۲، برآوردگر ماکسیمم درستنمایی، برآوردگر بیز، حذف دوجمله‌ای، زمان مورد انتظار آزمایش.

*. عهده‌دار مکاتبات:
Email: r.kazemi@sci.ikiu.ac.ir

۱- مقدمه

توزیع رایلی حالت خاصی از توزیع وایبول دوپارامتری است. همچنین، این توزیع یک مدل مناسب برای مطالعات آزمایش طول عمر است. چون تابع نرخ شکست توزیع رایلی یک تابع خطی نسبت به زمان است، این توزیع به‌طور گسترده‌ای در نظریه قابلیت اعتماد و تحلیل بقا مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین هنگامی که زمان خرابی واحدها دارای این توزیع است، تابع قابلیت اعتماد آنها با سرعت بسیار بالاتری نسبت به تابع قابلیت اعتماد توزیع نمایی کاهش می‌یابد. توزیع رایلی ارتباط خوبی با توزیع‌های دیگر مانند توزیع خی‌دو و توزیع مقادیر کرانگین دارد. این توزیع توسط [۱] و قبل از توزیع وایبول، به‌عنوان راه‌حلی برای مساله صوت معرفی شده است. توزیع رایلی دوپارامتری با پارامترهای مثبت مکان و مقیاس، μ و λ دارای تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی زیر است:

$$f(x) = 2\lambda(x-\mu)e^{-\lambda(x-\mu)^2},$$
$$F(x) = 1 - e^{-\lambda(x-\mu)^2}, x > \mu. \qquad (۱)$$

با توجه به وجود پارامتر مکان، می‌توان از توزیع رایلی دوپارامتری به طور مؤثرتری برای تحلیل داده‌های طول عمر، نسبت به توزیع رایلی یک‌پارامتری استفاده کرد. استنباط آماری در مورد این توزیع در [۲] انجام شده است. همچنین، در [۳] برآورد پارامتر تنش–مقاومت برای این توزیع تحت سانسور فزاینده نوع ۲ مطالعه شده است.
در میان طرح‌های مختلف سانسور، طرح سانسور فزاینده نوع ۲، در نظریه قابلیت اعتماد و تحلیل بقا، بیشتر از سایر طرح‌ها مورد استفاده قرار گرفته است. سانسور فزاینده در آزمایش‌های طول عمر و در تحلیل‌های بالینی بسیار مفید است و باعث می‌شود واحدهای آزمایش قبل از پایان آزمایش به‌طور راژمند از آزمایش حذف شوند. طرح سانسور فزاینده را می‌توان به‌صورت زیر توصیف کرد. طبق این طرح سانسور، تعداد n واحد در آزمون طول عمر وارد می‌شوند. هنگامی‌که اولین شکست مشاهده شد، r_1 تا از واحدهای آزمایش به‌طور تصادفی انتخاب و حذف می‌شود. هنگامی که دومین شکست مشاهده شد، r_2 تا از واحدهای باقیمانده به‌طور تصادفی انتخاب و حذف می‌شود. این آزمایش تا زمانی که m امین شکست مشاهده شود ادامه یافته و در این زمان
$$r_m = n - \sum_{i=1}^{m-1} r_i - m - 1$$
واحد باقیمانده همگی حذف می‌شوند. توجه داشته باشید که در این طرح $r_1, r_2, \dots, r_m$ تعیینی هستند. با این وجود، در برخی شرایط عملی، این مقادیر ممکن است به‌طور تصادفی انتخاب شوند.
استنباط آماری طرح سانسور فزاینده با حذف تصادفی، در مقالات مختلفی مورد بررسی قرار گرفته است که از آن جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد: در [۴] توزیع وایبول تحت سانسور فزاینده نوع ۲ برای داده‌های رقابتی مخاطره با حذف‌های دوجمله‌ای مطالعه شده است. در [۵] توزیع فرشه تحت سانسور فزاینده نوع ۲ با حذف تصادفی بررسی شده و در [۶] برآورد بیزی براساس طرح سانسور فزاینده نوع ۲ با حذف دوجمله‌ای، برای داده‌های رایلی مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین، در [۷] استنباط آماری توزیع وانی شکل تحت سانسور فزاینده نوع ۲ با حذف دوجمله‌ای بررسی شده است.
طرح کلی این مقاله به‌شرح زیر است: در بخش ۲، برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای نامعلوم مورد بررسی قرار گرفته است. همان‌طور که در این بخش مشاهده می‌شود MLE پارامترها را نمی‌توان به شکل بسته ارائه کرد و لذا از یک روش تکرار عددی برای محاسبه آنها استفاده می‌کنیم. بازه‌های اطمینان دقیق و مجانبی را در بخش ۳ بیان کرده و برآورد بیز و بازه اطمینان مرتبط با آن را در بخش ۴ مورد بحث قرار می‌دهیم. زمان مورد انتظار برای تکمیل آزمایش طول عمر تحت این طرح سانسور در بخش ۵ بررسی شده و نتایج شبیه‌سازی و تحلیل داده‌های واقعی در بخش ۶ آمده است. در پایان، نتیجه‌گیری مقاله در بخش ۷ ارائه می‌شود.

۲- برآورد ماکسیمم درستنمایی

فرض کنید $X = (X_1, \dots, X_m)$ نمونه سانسور شده‌ای از طرح سانسور فزاینده نوع ۲ باشد، به‌طوری‌که $X_1 < \dots < X_m$، m زمان شکست باقیمانده از n زمان وارد شده به آزمایش باشند. می‌دانیم که در زمان i

امین شکست، R_i واحد به‌طور تصادفی از آزمایش حذف می‌شوند. تابع درستنمایی نمونه سانسور شده m تایی، به‌شرط تعداد حذف‌های از پیش تعیین‌شده

$$R=(R_1=r_1,\dots,R_m=r_m)$$

را می‌توان به‌صورت

$$\begin{aligned} L(x;\mu,\lambda|R=r) &= c \\ &\times \prod_{i=1}^{m} f(x_i)[1-F(x_i)]^{r_i} \\ &= c(2\lambda)^m\left(\prod_{i=1}^{m} (x_i-\mu)\right) \\ &\times e^{-\lambda\sum_{i=1}^{m}(r_i+1)(x_i-\mu)^2}, \end{aligned} \qquad (۲)$$

نوشت که در آن

$$c = n(n-r_1-1) \times \cdots \times \left(n-\sum_{i=1}^{m} r_i - m + 1\right).$$

معادله (۲) با شرطی کردن روی r_i به‌دست آمده است. هر r_i می‌تواند یک عدد صحیح بین مقادیر 0 و $n-m-\sum_{j=1}^{i-1} r_j$ باشد. واضح است که این حالت متفاوت از سانسور فزاینده با حذف ثابت است. در این حالت فرض می‌شود که r_i ها دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامتر p هستند و بنابراین هر واحد با احتمال برابر p آزمایش را ترک می‌کند و لذا احتمال ترک r_i واحد، بعد از i امین شکست برابر با

$$P(R_1=r_1)=\binom{n-m}{r_1}p^{r_1} \times (1-p)^{n-m-r_1}, \quad 0 \le r_1 \le n \qquad (۳)$$

است و

$$\begin{aligned} P(R_i=r_i|R_{i-1}=r_{i-1},\dots,R_1=r_1) &= \binom{n-m-\sum_{j=1}^{i-1} r_j}{r_i} p^{r_i} \\ &\times (1-p)^{n-m-\sum_{j=1}^{i-1} r_j}, \end{aligned} \qquad (۴)$$

که در آن برای مقادیر $i=2,3,\dots,m-1$، داریم:

$$0 \le r_i \le n-m-\sum_{k=1}^{i-1} r_k.$$

همچنین، فرض می‌شود که R_i برای هر i مستقل از X_i است. بنابراین، تابع درستنمایی نمونه‌های $X=(X_1,\dots,X_m)$ و نیز $R=(R_1,\dots,R_m)$ می‌تواند به‌صورت

$$L(x,r;\mu,\lambda,p) = L(x;\mu,\lambda|R=r) \times P(R=r) \qquad (۵)$$

بیان شود که در آن

$$\begin{aligned} P(R=r) &= \\ P(R_{m-1}&=r_{m-1}|R_{m-2}=r_{m-2}, \dots, R_1=r_1) \times \dots \times \\ P(R_2&=r_2|R_1=r_1)P(R_1=r_1). \end{aligned} \qquad (۶)$$

با جایگزینی (۳) و (۴) در رابطه (۶)، داریم:

$$P(R=r)=Bp^D(1-p)^E, \qquad (۷)$$

که در آن

$$\begin{aligned} B &= \frac{(n-m)!}{\prod_{i=1}^{m-1} r_i!\left(n-m-\sum_{i=1}^{m-1} r_i\right)!}, \\ D &= \sum_{j=1}^{m-1} r_j, \\ E &= (m-1)(n-m) \\ &- \sum_{i=1}^{m-1} (m-i)r_i. \end{aligned}$$

اکنون با جایگزینی (۲) و (۷) در رابطه (۵)، می‌توان تابع درستنمایی را به‌صورت

$$\begin{aligned} L(x,r;\mu,\lambda,p) &= \\ Bc2^m\lambda^m&\left(\prod_{i=1}^{m} (x_i-\mu)\right) \\ \times e^{-\lambda\sum_{i=1}^{m}(r_i+1)(x_i-\mu)^2}&p^D(1-p)^E \end{aligned} \qquad (۸)$$

نوشت. حال، MLE پارامترهای p، λ و μ که به‌ترتیب با نمادهای $\hat{p}$، $\hat{\lambda}$ و $\hat{\mu}$ نشان داده می‌شوند، از روابط

$$\frac{\partial \log L}{\partial p} = \frac{D}{p} - \frac{E}{1-p} = 0, \qquad (۹)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L}{\partial \lambda} &= \frac{m}{\lambda} \\ &- \sum_{i=1}^{m} (r_i+1)(x_i-\mu)^2 = 0, \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L}{\partial \mu} &= 2\lambda\sum_{i=1}^{m} (r_i+1)(x_i-\mu) \\ &- \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{x_i-\mu} = 0, \end{aligned}$$

به‌دست می‌آیند. از (۹) و (۱۰) داریم:

$$\hat{p} = \frac{D}{D+E},$$

$$\hat{\lambda}(\mu) = \frac{m}{\sum_{i=1}^{m}(r_i+1)(x_i-\mu)^2},$$

و $\hat{\mu}$ حل معادله غیرخطی $k(\mu)=\mu$ است، که در آن

$$k(\mu) = \frac{2m\sum_{i=1}^{m}(r_i+1)(x_i-\mu)}{\sum_{i=1}^{m}(r_i+1)(x_i-\mu)^2}$$

$$-\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{x_i-\mu} + \mu.$$

چون $\hat{\mu}$ حل نقطه ثابت معادله غیر خطی فوق است، بنابراین می‌تواند با استفاده از یک طرح تکرار مانند $k(\mu_{(j)}) = \mu_{(j+1)}$ به‌دست آید که در آن $\mu_{(j)}$ مقدار μ در j امین تکرار می‌باشد. این روش تکراری هنگامی متوقف می‌شود که $|\mu_{(j)} - \mu_{(j+1)}|$ به اندازه کافی کوچک شود. در این گام $\hat{\mu}$ به‌دست آمده و پس از آن مقدار $\hat{\lambda}$ حاصل می‌شود.

۳- بازه اطمینان

۳-۱- بازه اطمینان دقیق

فرض کنید $X_1 < X_2 < \cdots < X_m$ نمونه‌ای از توزیع رایلی دوپارامتری تحت سانسور فزاینده نوع ۲ است و قرار دهید.

$$Y_i = \lambda(X_i - \mu)^2 : i = 1, \dots, m.$$

حال، می‌توان نشان داد که،

$$\begin{aligned}P[Y_i \le y] &= P[\lambda(X_i - \mu)^2 \le y]\\ &= P\left[X_i \le \sqrt{y/\lambda} + \mu\right]\\ &= 1 - e^{-y}.\end{aligned}$$

بنابراین، $Y_1, \dots, Y_m$ نمونه‌ای از توزیع نمایی استاندارد تحت سانسور فزاینده نوع ۲ است. حال، برای بردار $R = (R_1 = r_1, \dots, R_m = r_m)$، تبدیلات زیر را در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned}Z_1 &= nY_1\\ Z_2 &= (n - r_1 - 1)(Y_2 - Y_1)\\ &\vdots\\ Z_m &= \left(n - \textstyle\sum_{i=1}^{m-1} r_i - m + 1\right)\\ &\times (Y_m - Y_{m-1}).\end{aligned}$$

از مقاله [۸] نتیجه می‌شود که $Z_1, \dots, Z_m$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع، با توزیع نمایی استاندارد هستند. اگر قرار دهیم

$$\begin{aligned}V &= 2Z_1 = 2nY_1,\\ U &= 2\textstyle\sum_{i=2}^{m} Z_i\\ &= 2[\textstyle\sum_{i=1}^{m} (r_i + 1)Y_i - nY_1],\end{aligned}$$

آنگاه V و U متغیرهای تصادفی مستقل هستند که دارای توزیع خی‌دو با درجه‌های آزادی به‌ترتیب 2 و $2m - 2$ می‌باشند.

لم ۳-۱-۱: قرار دهید:

$$\begin{aligned}T_1(\mu) &= \frac{U}{(m-1)V},\\ &= \frac{\sum_{i=1}^{m} (r_i+1)Y_i - nY_1}{n(m-1)Y_1}\\ T_2 &= U + V = 2\textstyle\sum_{i=1}^{m} (r_i + 1)Y_i.\end{aligned}$$

دراینصورت، $T_1(\mu) \sim F(2m-2,2)$ و $T_2 \sim \chi^2(2m)$ و $T_1(\mu)$ و T_2 مستقل هستند.

اثبات: به [۹] مراجعه کنید.

لم ۳-۱-۲: $T_1(\mu)$ نسبت به μ صعودی اکید است.

اثبات: برای $i = 2, \dots, m$، قرار دهید:

$$\xi(\mu) = \left(\frac{a_i-\mu}{a_1-\mu}\right)^2 : \mu < a_1 < a_i.$$

این تابع نسبت به μ صعودی اکید است زیرا $\frac{d\xi(\mu)}{d\mu} = 2.\frac{(a_i-\mu)(a_i-a_1)}{(a_1-\mu)^3} > 0$. علاوه بر این، پس از ساده کردن $T_1(\mu)$، این عبارت را می‌توان به‌صورت عبارت ساده شده‌ای به فرم

$$\begin{aligned}T_1(\mu) &= \frac{1}{n(m-1)}\\ &\times \textstyle\sum_{i=1}^{m} (r_i + 1)\left(\frac{X_i-\mu}{X_1-\mu}\right)^2 - \frac{1}{m-1}\end{aligned}$$

نوشت. ازاین‌رو، به راحتی می‌توان نشان داد که $T_1(\mu)$ نسبت به μ یک تابع صعودی است.

قضیه ۳-۱-۳: فرض کنید $X_1 < \cdots < X_m$ نمونه‌ای از توزیع رایلی دوپارامتری تحت سانسور فزاینده نوع ۲ باشد. در این‌صورت،

الف) برای هر $0 < \eta < 1$، بازه‌ای به‌صورت بازه زیر یک بازه اطمینان $100(1-\eta)\%$ برای μ است:

$$\begin{aligned}&(T_1^{-1}(F_{1-\eta/2}(2m-2,2)),\\ &T_1^{-1}(F_{\eta/2}(2m-2,2))).\end{aligned}$$

ب) برای هر $0 < \eta < 1$، نامساوی‌های زیر یک ناحیه اطمینان توام $100(1-\eta)\%$ را برای (μ, λ) تعیین می‌کند:

$$\begin{cases} T_1^{-1}(F_{(1+\sqrt{1-\eta})/2}(2m-2,2)) < \mu \\ \quad < T_1^{-1}(F_{(1-\sqrt{1-\eta})/2}(2m-2,2)), \\ \dfrac{\chi^2_{(1+\sqrt{1-\eta})/2}(2m)}{2\sum_{i=1}^{m}(r_i+1)(X_i-\mu)^2} < \lambda \\ \quad < \dfrac{\chi^2_{(1-\sqrt{1-\eta})/2}(2m)}{2\sum_{i=1}^{m}(r_i+1)(X_i-\mu)^2}. \end{cases}$$

اثبات:

الف) از لم ۱ داریم $T_1(\mu) \sim F(2m-2,2)$. بنابراین،

$$P[F_{1-\frac{\eta}{2}}(2m-2,2) \le T_1(\mu)$$
$$\le F_{\frac{\eta}{2}}(2m-2,2)] = 1-\eta \Rightarrow$$
$$P[T_1^{-1}(F_{1-\eta/2}(2m-2,2)) \le \mu$$
$$\le T_1^{-1}(F_{\frac{\eta}{2}}(2m-2,2))] = 1-\eta.$$

ب) از لم ۱، می‌دانیم که $T_1(\mu)$ و T_2 مستقل هستند و

$$T_1(\mu) \sim F(2m-2,2),$$
$$T_2 = 2\sum_{i=1}^{m}(r_i+1)Y_i$$
$$= 2\lambda\sum_{i=1}^{m}(r_i+1)(x_i-\mu)^2 \sim \chi^2(2m).$$

در نتیجه،

$$P[T_1^{-1}(F_{(1+\sqrt{1-\eta})/2}(2m-2,2)) \le \mu$$
$$\le T_1^{-1}(F_{(1-\sqrt{1-\eta})/2}(2m-2,2)),$$
$$\frac{\chi^2_{(1+\sqrt{1-\eta})/2}(2m)}{2\sum_{i=1}^{m}(r_i+1)(X_i-\mu)^2} \le \lambda$$
$$\le \frac{\chi^2_{(1-\sqrt{1-\eta})/2}(2m)}{2\sum_{i=1}^{m}(r_i+1)(X_i-\mu)^2}]$$
$$= P[F_{(1+\sqrt{1-\eta})/2}(2m-2,2) \le T_1(\mu)$$
$$\le F_{(1-\sqrt{1-\eta})/2}(2m-2,2),$$
$$\chi^2_{(1+\sqrt{1-\eta})/2}(2m) \le T_2$$
$$\le \chi^2_{(1-\sqrt{1-\eta})/2}(2m)]$$
$$= P[F_{(1+\sqrt{1-\eta})/2}(2m-2,2) \le T_1(\mu)$$
$$\le F_{(1-\sqrt{1-\eta})/2}(2m-2,2)]$$
$$\times P[\chi^2_{(1+\sqrt{1-\eta})/2}(2m) \le T_2$$
$$\le \chi^2_{\frac{1-\sqrt{1-\eta}}{2}}(2m)]$$
$$= \sqrt{1-\eta} \times \sqrt{1-\eta} = 1-\eta.$$

۲-۳- بازه اطمینان مجانبی

واریانس و کواریانس مجانبی برآوردگرهای MLE پارامترهای μ، λ و p بوسیله درایه‌های معکوس ماتریس اطلاع فیشر

$$J_{ij} = E\left\{-\frac{\partial^2 \ell(\Theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right\}, i,j = 1,2,3$$

به‌دست می‌آیند که در این ماتریس داریم $\Theta = (\theta_1,\theta_2,\theta_3) = (\mu,\lambda,p)$. در مقاله [۲] نشان داده است که اگر متغیر تصادفی X از توزیع رایلی دوپارامتری با تابع چگالی (۱) باشد، حتی در حالت نمونه کامل، تمام درایه‌های ماتریس اطلاع فیشر موجود نیستند. بنابراین، از ماتریس اطلاع فیشر مشاهده شده $I_{ij} = \left\{-\frac{\partial^2 \ell(\Theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right\}_{\Theta=\hat{\Theta}}$، که با حذف عملگر امید ریاضی به‌دست می‌آید، استفاده می‌شود. ماتریس اطلاع فیشر مشاهده شده، دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم از لگاریتم تابع درستنمایی است که به شرح زیر به‌دست می‌آیند:

$$I_{11} = 2\lambda\sum_{i=1}^{m}(r_i+1) + \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{(x_i-\mu)^2},$$
$$I_{22} = \frac{m}{\lambda^2},$$
$$I_{12} = -2\sum_{i=1}^{m}(r_i+1)(x_i-\mu) = I_{21},$$
$$I_{13} = 0 = I_{31},$$
$$I_{23} = 0 = I_{32},$$
$$I_{33} = \frac{D}{p^2} + \frac{E}{(1-p)^2}.$$

طبق قضیه حد مرکزی چند متغیره توزیع مجانبی برآوردگرهای MLE پارامترهای μ، λ و p برابر با

$$[(\hat{\mu}-\mu),(\hat{\lambda}-\lambda),(\hat{p}-p)]$$
$$\xrightarrow{D} N_3(0, I^{-1}(\mu,\lambda,p)),$$

است که $I^{-1}(\mu,\lambda,p)$ معکوس ماتریس اطلاع فیشر مشاهده شده است و می‌تواند به‌صورت زیر بیان شود:

$$I^{-1}(\mu,\lambda,p) =$$

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}^{-1}_{(\mu,\lambda,p)=(\hat{\mu},\hat{\lambda},\hat{p})} = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\hat{\mu}} & \sigma_{\hat{\mu},\hat{\lambda}} & 0 \\ \sigma_{\hat{\lambda},\hat{\mu}} & \sigma^2_{\hat{\lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2_{\hat{p}} \end{pmatrix}.$$

لذا، می‌توان بازه اطمینان $100(1-\eta)\%$ برای پارامترهای μ، λ و p را به‌صورت

$$\left(\hat{\mu} - z_{\frac{\eta}{2}}\sqrt{\sigma^2_{\hat{\mu}}}, \hat{\mu} - z_{\frac{\eta}{2}}\sqrt{\sigma^2_{\hat{\mu}}}\right),$$
$$\left(\hat{\lambda} - z_{\frac{\eta}{2}}\sqrt{\sigma^2_{\hat{\lambda}}}, \hat{\lambda} + z_{\frac{\eta}{2}}\sqrt{\sigma^2_{\hat{\lambda}}}\right),$$
$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\eta}{2}}\sqrt{\sigma^2_{\hat{p}}}, \hat{p} + z_{\frac{\eta}{2}}\sqrt{\sigma^2_{\hat{p}}}\right),$$

به‌دست آورد که در آن $z_{\frac{\eta}{2}}$ صدک بالایی $\frac{\eta}{2}$ از توزیع نرمال استاندارد است.

۴- برآوردگر بیز

در این بخش، استنباط بیزی پارامترهای نامعلوم، بر اساس داده‌های سانسور فزاینده نوع ۲ با حذف دوجمله‌ای را بررسی می‌کنیم. در این راستا برآوردها و بازه‌های اطمینان بیزی پارامترهای نامعلوم محاسبه شده‌اند. در تحلیل بیزی انجام شده توابع زیان را توابع زیان توان دوم خطا در نظر گرفته‌ایم. باید دقت کرد که اگر هر سه پارامتر نامعلوم باشد، توابع پیشین مزدوج توام وجود ندارد. در این حالت از روش‌های مختلفی برای انتخاب پیشین‌ها استفاده می‌کنند که یک روش، بررسی توابع پیشین مستقل قطعه‌ای است. در این مقاله، با حفظ کلیت مسئله، توابع پیشین زیر را برای μ، λ و p در نظرگرفته‌ایم:

$$\pi_1(\mu) \propto 1, \qquad 0 < \mu < t_1,$$
$$\pi_2(\lambda) \propto \lambda^{a-1}e^{-\lambda b}, \qquad \lambda > 0,$$
$$\pi_3(p) \propto p^{c-1}(1-p)^{d-1}, 0 < p < 1.$$

توجه می‌کنیم که پارامترهای توابع چگالی پیشین همگی مثبت هستند ($a, b, c, d > 0$). علاوه بر این، فرض می‌کنیم که توابع چگالی پیشین مستقل هستند. باید توجه کرد که چون μ یک پارامتر مکانی با مقادیر مثبت است لذا مناسب‌ترین گزینه برای تابع چگالی پیشین آن، توزیع $U(0, t_1)$ است. همچنین، از آنجائیکه، پارامتر λ یک مقدار مثبت را اختیار می‌کند، مناسب‌ترین توزیع برای توصیف چگالی پیشین آن، توزیع گاما است که انتخاب این توزیع پیشین منجر به تابع چگالی پسین مزدوج می‌شود و این امر باعث راحت شدن محاسبات است. علاوه بر این، پارامتر p مقدار یک احتمال است، لذا در بین توزیع‌های پیوسته مناسب‌ترین گزینه برای تابع چگالی پیشین آن، توزیع بتا می‌باشد که انتخاب این توزیع پیشین منجر به تابع چگالی پسین مزدوج می‌شود و این امر باعث راحت شدن محاسبات است. همواره باید دقت کرد که با نامعلوم بودن هر سه پارامتر، توزیع‌های پیشین مزدوج وجود ندارند و در این چنین مواقعی حتی برای نمونه‌های کامل نیز همه درایه‌های ماتریس اطلاع فیشر مورد انتظار متناهی نیستند. بنابراین حتی پیشین جفری برای این حالت وجود ندارد. بر اساس نمونه مشاهده شده، تابع چگالی پسین توام μ، λ و p برابر است با:

$$\pi(\mu, \lambda, p | x, r) \propto L(x, r; \mu, \lambda, p)\pi_1(\mu)\pi_2(\lambda)\pi_3(p). \qquad (۱۱)$$

از رابطه (۱۱)، بدیهی است که نمی‌توان برآوردهای بیز را به‌صورت تحلیلی محاسبه کرد. لذا از فن‌های نمونه‌گیری گیبز برای محاسبه برآوردهای بیز و بازه‌های اطمینان مربوطه استفاده شده است. از رابطه (۱۱) توابع چگالی احتمال پسین μ، λ و p به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\pi_1(\mu|\lambda, x, r) \propto \prod_{i=1}^{m} (x_i - \mu) \times e^{-\lambda\left[b+\sum_{i=1}^{m}(r_i+1)(x_i-\mu)^2\right]},$$
$$\pi_2(\lambda|\mu, x, r) \propto \lambda^{m+a-1}e^{-\lambda\left[b+\sum_{i=1}^{m}(r_i+1)(x_i-\mu)^2\right]},$$
$$\pi_3(p|x, r) \propto p^{D+c-1}(1-p)^{E+d-1}.$$

قضیه ۴-۴: لگاریتم تابع $\pi_1(\mu|\lambda, x, r)$ مقعر است.

اثبات: با توجه به تابع چگالی پسین μ داریم:

$$\frac{\partial^2 \log \pi_1(\mu|\lambda, x, r)}{\partial \mu^2} = -1 \times \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(x_i-\mu)^2} + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} (r_i+1)\right] < 0.$$

مقاله [۱۰] روشی را برای تولید نمونه تصادفی از یک تابع

چگالی که لگاریتم آن مقعر است، ارائه می‌کند. بنابراین، با استفاده از قضیه ۴-۴ و با به‌کارگیری ایده مقاله [۱۰]، الگوریتم زیر برای پیدا کردن برآوردگرهای بیز و بازه‌های اطمینان مرتبط با آنها ارائه می‌شود:

۱- با مقادیر اولیه μ_0 و λ_0 شروع کنید.

۲- $t = 1$ قرار دهید.

۳- μ_t را از $\pi_1(\mu|\lambda_{t-1}, x, r)$ تولید کنید.

۴- λ_t را از $\pi_2(\lambda|\mu_{t-1}, x, r)$ تولید کنید.

۵- $t = t + 1$ قرار دهید.

۶- گام‌های ۲ تا ۵ را به تعداد T مرتبه تکرار کنید.

۷- برآوردگرهای بیز μ و λ را به‌صورت زیر به‌دست آورید:

$$\hat{\mu}_B = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \mu_t \quad \text{و} \quad \hat{\lambda}_B = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \lambda_t$$

۸- بازه اطمینان HPD برای پارامتر μ را به‌دست آورید: مقادیر مرتب شده $\mu_1, \dots, \mu_T$ را به‌صورت $\mu_{(1)}, \dots, \mu_{(T)}$ قرار داده و تمامی بازه‌های اطمینان $100(1-\eta)\%$ پارامتر μ را که به‌صورت زیر هستند به‌دست آورید:

$$\left(\mu_{(1)}, \mu_{([T(1-\gamma)])}\right), \dots, \left(\mu_{([T\gamma])}, \mu_{(T)}\right)$$

نماد $[M]$ بزرگترین عدد صحیح کمتر یا برابر با M است. بازه اطمینان HPD پارامتر μ کوتاه‌ترین بازه در بین بازه‌های اطمینان فوق است. به‌طور مشابه، می‌توان برای λ یک بازه اطمینان $100(1-\eta)\%$ به‌دست آورد.

لازم به ذکر است که مقدار T در این الگوریتم تعداد دفعات تکرار می‌باشد و معمولاً در قسمت پیاده‌سازی الگوریتم، برای شبیه‌سازی مقدار آن را برابر حداقل ۱۰۰۰ در نظر می‌گیرند.

حال، با توجه به تابع زیان توان دوم خطا، برآورد بیز پارامتر p به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\hat{p}_B = \int_0^1 p\pi_3(p|x,r)dp = \frac{D+c}{D+E+c+d}.$$

همچنین، برای به‌دست آوردن بازه اطمینان HPD برای پارامتر p، چون $\pi_3(p|x,r)$ یک تابع تک مُدی است، یک بازه اطمینان $100(1-\eta)\%$ می‌تواند به‌صورت (H_L^p, H_U^p) باشد که در آن مقادیر H_L^p و H_U^p در معادله زیر صدق می‌کنند:

$$[H_L^p < p < H_U^p] = \int_{H_L^p}^{H_U^p} \pi_3(p|x,r)dp = 1 - \gamma\pi_3\left(H_L^p|x,r\right) = \pi_3\left(H_U^p|x,r\right).$$

۵- زمان مورد انتظار آزمایش

در موقعیت‌های کاربردی، یک آزمایشگر ممکن است علاقه‌مند باشد بداند که آیا این آزمایش می‌تواند در یک زمان مشخص انجام شود یا خیر. این اطلاعات به جهت انتخاب طرح نمونه‌گیری مناسب مهم است، زیرا زمان لازم برای انجام یک آزمایش ارتباط مستقیمی با هزینه‌ها دارد. براساس یک طرح سانسور فزاینده نوع ۲ با حذف دوجمله‌ای، زمان مورد انتظار برای پایان دادن آزمایش برابر با امید ریاضی m-امین آماره مرتب، X_m است. بر طبق [۱۱]، امید ریاضی شرطی X_m، به شرط یک بردار ثابت مانند بردار $R = (R_1 = r_1, \dots, R_{m-1} = r_{m-1})$ برابر با

$$E[X_m|R=r] = C(r) \times \sum_{l_1=0}^{r_1} \dots \sum_{l_m=0}^{r_m} (-1)^A \frac{\binom{r_1}{l_1}\dots\binom{r_m}{l_m}}{\prod_{i=1}^{m-1} h(l_i)} \times \int_\mu^\infty x f(x) F^{h(l_m)-1}(x)dx, \tag{۱۲}$$

است که در آن

$$A = \sum_{i=1}^{m} l_i, \quad C(r) = n(n-r_1-1) \times \dots \times \left(n - \sum_{i=1}^{m-1} (r_i+1)\right)$$

و $h(l_i) = l_1 + \dots + l_i + i$ و i تعداد واحدهای باقی‌مانده است که از آزمایش حذف شده‌اند. حال، قرار دهیم:

$$S = \int_\mu^\infty x f(x) F^{h(l_m)-1}(x)dx = \int_\mu^\infty 2\lambda(x-\mu)e^{-\lambda(x-\mu)^2} \times \left(1-e^{-\lambda(x-\mu)^2}\right)^{h(l_m)-1} dx = \sum_{k=0}^{h(l_m)-1} (-1)^k \binom{h(l_m)-1}{k} \times \left\{\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\lambda^{\frac{1}{2}}(k+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu}{k+1}\right\}.$$

با جایگزین کردن این مقدار در (۱۲)، زمان مورد انتظار آزمایش برابر است با:

$$E[X_m|R=r] = C(r)\sum_{l_1=0}^{r_1}\dots\sum_{l_m=0}^{r_m}(-1)^A\frac{\binom{r_1}{l_1}\dots\binom{r_m}{l_m}}{\prod_{i=1}^{m-1}h(l_i)} \times\sum_{k=0}^{h(l_m)-1}(-1)^k\binom{h(l_m)-1}{k} \times\left\{\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\lambda^{\frac{1}{2}}(k+1)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\mu}{k+1}\right\}.$$

همچنین، زمان مورد انتظار یک آزمایش در طرح سانسور نوع ۲ را می‌توان با تبدیل جمله R به صفر در رابطه (۱۲) به‌دست آورد که برابر است با:

$$E[X_m^*] = m\binom{n}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k} \times\left\{\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\lambda^{\frac{1}{2}}(k+1)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\mu}{k+1}\right\}. \quad (۱۳)$$

به‌طور مشابه، زمان مورد انتظار یک آزمایش در نمونه کامل n تایی را می‌توان با قرار دادن $m = n$ در رابطه (۱۳) به‌دست آورد که برابر است با:

$$E[X_n^{**}] = n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k} \times\left\{\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\lambda^{\frac{1}{2}}(k+1)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\mu}{k+1}\right\}. \quad (۱۴)$$

برای سانسور فزاینده نوع ۲ با حذف تصادفی، نقطه پایانی مورد انتظار $E[X_m] = E_R[E(X_m|R)]$ به‌دست می‌آید، لذا برای حذف دوجمله‌ای داریم:

$$E[X_m] = \sum_{r_1=0}^{g(r_1)}\dots\sum_{r_{m-1}=0}^{g(r_{m-1})} P(R=r)\times E[X_m|R=r], \quad (۱۵)$$

که در آن $g(r_1) = n-m$ و نیز مقدار، $g(r_i) = n-m-r_1-\dots-r_{i-1}$ برای $i = 2,\dots,m-1$. همچنین $P(R=r)$ توسط رابطه (۷) داده شده است. نسبت زمان مورد انتظار آزمایش (REET) که با δ_{REET} نشان داده می‌شود، بین طرح سانسور فزاینده نوع ۲ با حذف دوجمله‌ای و نمونه کامل، با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\delta_{REET} = \frac{E[X_m]}{E[X_n^{**}]}.$$

در ادامه، زمان مورد انتظار آزمایش در یک طرح سانسور فزاینده با حذف دوجمله‌ای، طرح سانسور نوع ۲ و نمونه کامل به‌دست آمده است. برای این‌کار زمان مورد انتظار برای مقادیر مختلف n، m و p را به‌صورت عددی محاسبه می‌کنیم. یک مطالعه عددی انجام گرفته و نتایج در جدول ۱ ارائه شده است. با توجه به این جدول می‌توان نتایج کلی زیر را ارائه کرد. برای همه پارامترها

۱- وقتی m ثابت است، با افزایش n، δ_{REET} کاهش می‌یابد.

۲- وقتی n ثابت است، با افزایش m، δ_{REET} افزایش می‌یابد.

۳- وقتی n و m ثابت است، با افزایش p، δ_{REET} افزایش می‌یابد.

علاوه بر این، برای مقادیربزرگ p و m، ملاحظه می‌شود که δ_{REET} سریعا به مقدار ۱ نزدیک می‌شود.

۶- تحلیل داده‌ها و مطالعات شبیه‌سازی

در این بخش عملکرد روش‌های مختلف بیان شده در بخش‌های قبل را براساس روش شبیه‌سازی مونت کارلو با هم مقایسه کرده و یک مجموعه داده واقعی را تحلیل می‌کنیم.

۶-۱- مطالعات شبیه‌سازی

در این بخش، یک مطالعه شبیه‌سازی را برای بررسی عملکرد MLEها و برآوردگرهای بیز، با استفاده از طرح سانسور فزاینده نوع ۲ با حذف دوجمله‌ای بررسی می‌کنیم. این مطالعه بر اساس اندازه نمونه $n = 10, 20, 30, 40$ و $m = 10, 15, 20$ با $a = 2,\ b = 1,\ c = d = 2$ انجام شده است. با حفظ کلیت مسئله، در همه حالت‌ها پارامترها را $\mu = 1,\ \lambda = 1,\ p = 0/5$ در نظر گرفته‌ایم. پارامترهای نامعلوم با استفاده از روش MLE و بیز برآورد شده‌اند. عملکرد برآوردگرها بر مبنای میانگین اریبی (AB) و میانگین توان دوم خطا (MSE) براساس ۱۰۰۰ تکرار با هم مقایسه می‌شوند. علاوه بر این، بازه‌های اطمینان مجانبی و HPD را با ضریب اطمینان ۹۵٪ بر مبنای ۱۰۰۰ تکرار به‌دست آورده‌ایم. همچنین در روش

بیز تعداد تکرارها در الگوریتم گیبز، برابر $T = 1000$ در نظر گرفته شده است. نتایج شبیه‌سازی در جداول ۲ و ۳ گزارش شده است. بر اساس این جداول، با افزیش اندازه نمونه، MSE کاهش می‌یابد. برآوردگرهای بیز بر حسب AB و MSE در همه حالت‌ها از MLE بهتر عمل می‌کنند. همچنین، بازه‌های اطمینان HPD دارای طول کمتری نسبت به بازه‌های اطمینان مجانبی هستند.

۶-۱- تحلیل داده‌ها

در این بخش، یک مجموعه داده واقعی را تحلیل می‌کنیم. این داده‌ها تعداد دفعات شکست برای ۲۳ یاتاقان را در یک آزمایش طول عمر نشان می‌دهد و اولین بار توسط [۱۲] مورد استفاده قرار گرفت. داده‌ها عبارتند از:

۰/۱۷۸۸ ۰/۲۸۹۲ ۰/۳۳ ۰/۴۱۵۲ ۰/۴۲۱۲ ۰/۴۵۶۰
۰/۴۸۴۸ ۰/۵۱۸۴ ۰/۵۱۹۶ ۰/۵۴۱۲ ۰/۵۵۵۶
۰/۶۷۸۰ ۰/۶۸۶۴ ۰/۶۸۶۴ ۰/۶۸۸۸ ۰/۸۴۱۲
۰/۹۳۱۲ ۰/۹۸۶۴ ۱/۰۵۱۲ ۱/۰۵۸۴ ۱/۲۷۹۲
۱/۲۸۰۴ ۱/۷۳۴۰

قبلا [۱۳] و [۱۴] داده‌های بالا را تحلیل کرده‌اند. ما این مجموعه داده را بر اساس $m = 15$ و چندین مقدار p برای حذف تصادفی در نظر گرفته‌ایم. فاصله کولموگروف-اسمیرنوف (KS) بین توابع توزیع تجربی و توابع توزیع برازش داده شده به همراه p- مقادیر برای طرح‌های مختلف در جدول ۴ ارائه شده است.

نتایج نشان می‌دهد که توزیع رایلی دوپارامتری برازش مناسبی برای همه طرح‌های سانسور ارائه شده است.

برای مقایسه عملکرد روش‌های مختلف، براوردگرهای MLE و بیز پارامترهای نامعلوم و بازه‌های اطمینان مرتبط با آنها را به‌دست آورده‌ایم. در محاسبه برآوردگرهای بیز، از اطلاعات پیشین به‌صورت $a = b = c = d = 2$ استفاده شده است. جدول ۵ نتایج تحلیل داده‌ها را نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که بازه‌های HPD دارای طول کمتری نسبت به بازه‌های مجانبی در طرح‌های سانسور مختلف هستند.

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله استنباط آماری توزیع رایلی دوپارامتری تحت سانسور فزاینده نوع ۲ با حذف دوجمله‌ای، بررسی شد. برای این‌کار برآوردگرهای MLE و بیز پارامترهای نامعلوم مطالعه شدند. بر اساس مطالعات شبیه‌سازی، برآورد پارامتر با استفاده از روش بیزی، عملکرد بهتری نسبت به روش MLE دارد. همچنین، زمان مورد انتظار آزمایش تحت طرح سانسور فزاینده نوع ۲ محاسبه شد. با استفاده از نتایج عددی تأیید می‌شود که نقش احتمال‌های حذف، نسبت به طول زمان آزمایش کاملا معنی‌دار است.

جدول (۱): مقادیر δ_{REET} در داده‌های سانسور فزاینده نوع ۲ با حذف تصادفی برای پارامترهای متفاوت و مقادیر مختلف p.

n	m	$(\mu,\lambda) = (4,3)$				$(\mu,\lambda) = (5,2)$			
		$p = 0/1$	$p = 0/4$	$p = 0/6$	$p = 0/9$	$p = 0/۱$	$p = 0/۴$	$p = 0/۶$	$p = 0/۹$
6	۳	۰/۲۲۳۲	۰/۵۴۳۵	۰/۶۸۰۳	۰/۷۸۸۸	۰/۲۰۴۱	۰/۵۳۶۷	۰/۶۸۶۰	۰/۷۸۸۱
	۴	۰/۵۰۳۶	۰/۷۷۶۷	۰/۸۴۷۹	۰/۸۸۷۸	۰/۵۰۴۹	۰/۷۷۸۹	۰/۸۵۱۰	۰/۸۸۸۳
	۵	۰/۸۲۴۵	۰/۹۱۴۹	۰/۹۴۰۶	۰/۹۵۲۱	۰/۸۱۹۴	۰/۹۱۵۹	۰/۹۴۰۸	۰/۹۵۲۵
۱۰	۵	۰/۳۸۲۳	۰/۶۵۳۳	۰/۸۰۲۸	۰/۸۴۶۲	۰/۳۹۱۴	۰/۶۸۰۷	۰/۷۹۵۵	۰/۸۴۴۹
	۸	۰/۷۲۸۴	۰/۹۴۰۰	۰/۹۴۸۷	۰/۹۵۵۲	۰/۷۰۷۹	۰/۹۱۹۴	۰/۹۴۹۹	۰/۹۵۴۷
۱۶	۸	۰/۴۵۶۰	۰/۸۴۹۴	۰/۸۶۷۲	۰/۸۷۲۲	۰/۴۷۸۹	۰/۸۴۷۹	۰/۸۶۲۹	۰/۸۷۵۹
	۱۰	۰/۵۵۱۴	۰/۸۶۶۷	۰/۸۹۹۰	۰/۹۱۰۶	۰/۵۴۳۳	۰/۸۵۸۹	۰/۸۹۴۵	۰/۹۰۰۳
	۱۴	۰/۸۳۳۳	۰/۸۹۰۷	۰/۹۱۱۰	۰/۹۱۸۶	۰/۸۲۲۹	۰/۸۹۰۴	۰/۹۱۲۱	۰/۹۱۷۹
۲۰	۱۰	۰/۴۴۹۴	۰/۶۳۷۹	۰/۷۸۲۶	۰/۸۵۷۸	۰/۴۳۰۰	۰/۶۱۵۹	۰/۷۵۸۳	۰/۸۳۱۰
	۱۴	۰/۶۶۳۵	۰/۷۵۶۰	۰/۸۶۴۹	۰/۸۹۷۸	۰/۶۵۷۶	۰/۷۳۸۴	۰/۸۵۰۳	۰/۸۷۷۹
	۱۸	۰/۸۶۲۵	۰/۸۸۸۹	۰/۹۱۶۰	۰/۹۲۸۹	۰/۸۵۴۹	۰/۸۷۳۶	۰/۹۰۰۳	۰/۹۱۲۵

جدول (۲): مقادیر AB و MSE برآوردگرهای MLE و بیز پارامترها.

n	m	MLE						Bayes					
		p		λ		μ		p		λ		μ	
		MSE	AB	MSE	AB	MSE	AB	MSE	AB	MSE	AB	MSE	AB
۲۰	۱۰	۰/۰۱۱	۰/۰۱۱	۰/۰۴۷	۰/۰۷۷	۰/۰۱۸	۰/۰۸۵	۰/۰۰۹	۰/۰۱۰	۰/۰۱۳	۰/۰۵۲	۰/۰۰۸	۰/۰۴۸
۳۰	۱۰	۰/۰۱۱	۰/۰۱۰	۰/۰۳۷	۰/۰۷۶	۰/۰۶۰	۰/۰۵۹	۰/۰۰۸	۰/۰۱۰	۰/۰۲۰	۰/۰۵۷	۰/۰۰۴	۰/۰۴۷
۳۰	۱۵	۰/۰۰۹	۰/۰۳۰	۰/۰۳۴	۰/۰۶۶	۰/۰۱۲	۰/۰۵۴	۰/۰۰۶	۰/۰۱۷	۰/۰۱۲	۰/۰۵۵	۰/۰۰۵	۰/۰۴۵
۳۰	۲۰	۰/۰۰۸	۰/۰۲۰	۰/۰۳۰	۰/۰۶۳	۰/۰۱۰	۰/۰۵۱	۰/۰۰۴	۰/۰۱۵	۰/۰۱۲	۰/۰۵۱	۰/۰۰۳	۰/۰۴۲
۴۰	۱۰	۰/۰۰۷	۰/۰۰۶	۰/۰۵۲	۰/۰۶۱	۰/۰۱۲	۰/۰۶۸	۰/۰۰۴	۰/۰۰۵	۰/۰۲۱	۰/۰۵۷	۰/۰۰۹	۰/۰۴۶
۴۰	۱۵	۰/۰۰۷	۰/۰۲۱	۰/۰۳۹	۰/۰۶۰	۰/۰۱۰	۰/۰۵۵	۰/۰۰۴	۰/۰۱۴	۰/۰۱۴	۰/۰۵۶	۰/۰۰۸	۰/۰۴۱
۴۰	۲۰	۰/۰۰۵	۰/۰۰۵	۰/۰۳۰	۰/۰۵۵	۰/۰۰۸	۰/۰۵۲	۰/۰۰۴	۰/۰۰۲	۰/۰۱۰	۰/۰۵۴	۰/۰۰۳	۰/۰۴۰

جدول (۳): متوسط طول بازه (CL) و درصد پوشش (CP) در برآورد پارامترها.

n	m	MLE						Bayes					
		p		λ		μ		p		λ		μ	
		CP	CL	CP	CL	CP	CL	CP	CL	CP	CL	CP	CL
۲۰	۱۰	۰/۹۴۷	۰/۳۰۰	۰/۹۴۹	۰/۸۴۶	۰/۹۵۲	۱/۲۰۷	۰/۹۶۰	۰/۲۷۳	۰/۹۵۰	۰/۷۵۷	۰/۹۶۷	۱/۰۰۸
۳۰	۱۰	۰/۹۳۷	۰/۳۳۷	۰/۹۵۰	۰/۸۳۲	۰/۹۵۳	۱/۲۰۴	۰/۹۵۵	۰/۲۴۹	۰/۹۴۳	۰/۷۶۰	۰/۹۶۹	۰/۹۴۶
۳۰	۱۵	۰/۹۳۳	۰/۳۴۳	۰/۹۵۶	۰/۸۳۰	۰/۹۵۵	۱/۱۴۹	۰/۹۵۹	۰/۲۶۸	۰/۹۵۵	۰/۷۱۶	۰/۹۵۷	۱/۰۲۳
۳۰	۲۰	۰/۸۶۷	۰/۳۶۵	۰/۹۶۱	۰/۸۱۴	۰/۹۶۰	۱/۱۱۸	۰/۹۶۷	۰/۲۸۸	۰/۹۶۷	۰/۷۰۷	۰/۹۶۰	۱/۰۲۲
۴۰	۱۰	۰/۹۴۳	۰/۳۱۴	۰/۹۴۵	۰/۸۴۹	۰/۹۵۰	۱/۲۳۹	۰/۹۴۴	۰/۲۲۳	۰/۹۴۰	۰/۷۹۸	/۹۴۰	۱/۲۱۳
۴۰	۱۵	۰/۹۴۱	۰/۳۱۰	۰/۹۵۷	۰/۸۲۶	۰/۹۵۶	۱/۱۴۰	۰/۹۴۵	۰/۲۴۶	۰/۹۴۰	۰/۷۸۰	۰/۹۵۰	۱/۰۲۵
۴۰	۲۰	۰/۹۴۳	۰/۳۱۳	۰/۹۶۶	۰/۸۱۲	۰/۹۶۷	۱/۱۱۳	۰/۹۵۰	۰/۲۴۷	۰/۹۶۵	۰/۷۰۷	۰/۹۴۵	۱/۰۵۶

جدول (۴): آماره KS و p-مقادیر مرتبط در طرح‌های سانسور مختلف.

p	طرح سانسور	آماره KS	p-مقدار
۰/۲	$r_1 = (3,1,1,1,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,0)$	۰/۲۶۲۸	۰/۱۹۰۹
۰/۵	$r_2 = (4,2,2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)$	۰/۱۷۲۸	۰/۶۹۹۸
۰/۸	$r_3 = (7,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)$	۰/۱۸۱۶	۰/۶۴۱۶

جدول (۵): نتایج تحلیل داده‌های واقعی.

طرح سانسور	MLE						Bayes					
	p		λ		μ		p		λ		μ	
	$\hat{p}$	CL	$\hat{\lambda}$	CL	$\hat{\mu}$	CL	$\hat{p}_B$	CL	$\hat{\lambda}_B$	CL	$\hat{\mu}_B$	CL
r_1	۰/۲۸۶	۰/۵۱۶	۱/۷۳۹	۱/۳۴۰	۰/۰۵۴	۰/۳۶۱	۰/۲۵۸	۰/۵۰۰	۱/۷۰۳	۱/۱۱۷	۰/۰۸۶	۰/۳۴۹
r_2	۰/۵۷۱	۰/۴۱۱	۱/۷۳۳	۱/۲۹۱	۰/۰۶۱	۰/۳۶۰	۰/۵۵۶	۰/۴۰۸	۱/۷۸۷	۱/۰۱۵	۰/۰۸۶	۰/۳۳۱
r_3	۰/۸۸۹	۰/۳۰۸	۱/۶۱۴	۱/۱۳۴	۰/۰۴۷	۰/۳۳۷	۰/۷۶۹	۰/۲۷۸	۱/۶۶۴	۰/۹۹۳	۰/۰۷۷	۰/۲۸۸

فهرست منابع

[1] J. W. S. Rayleigh. On the resultant of a large number of vibrations of the some pitch and of arbitrary phase. Philosophical Magazine, 5-th Series 10:73-78(1880).

[2] S. Dey, T. Dey, D. Kundu. Two-parameter Rayleigh distribution: different methods of estimation. American Journal of Mathematical and Management Sciences 33: 55-74(2014).

[3] A. Kohansal, S. Rezakhah. Inference of $R = P(Y < X)$ for two-parameter Rayleigh distribution based on progressively censored samples. Statistics 53: 81-100(2019).

[4] R. Hashemi, L. Amiri. Analysis of progressive Type-II censoring in the Weibull model for competing risks data with binomial removals. Applied Mathematical Sciences5:1073-1087(2011).

[5] M. Mubarak. Parameter Estimation Based on the Frèchet Progressive Type II Censored Data with Binomial Removals. International Journal of Quality, Statistics, and Reliability DOI: 10.1155/ 2012/ 245910 (2012).

[6] R. Azimi, F. Yaghmaei. Bayesian estimation based on Rayleigh progressive Type-II censored data with binomial removals. Journal of Quality and Reliability Engineering DOI: 10.1155/ 2013/ 896807 (2013)

[7] A. Kohansal. Statistical analysis of two-parameter bathtub-shaped lifetime distribution under progressive censoring with binomial removals. Gazi University Journal of Science 29: 783–792 (2016).

[8] J. H. Cao, K. Chen. An introduction to the reliability mathematics. Beijing: Higher Education Press (2006).

[9] N. L. Johnson, S. Kotz, N. Balakrishnan. Continuous Univariate Distributions. 2nd ed., Wiley, NewYork (1994).

[10] L. Devroye. A simple algorithm for generating random variates with a log-concave density. Computing 33:247-257 (1984).

[11] N. Balakrishnan, R. Aggarwala. Progressive censoring: theory, methods and applications. Birkhauser, Boston (2000).

[12] J. Lieblein, M. Zelen. Statistical investigation of the fatigue life of deep-groove ball bearings. Journal of Research of the National Bureau of Standards 57:273-316 (1956).

[13] M. Z. Raqab. Inference for generalized exponential distribution based on record statistics. Journal of Statistical Planning and Inference 104:339-350 (2002).

[14] C. Kim, K. Han. Estimation of the scale parameter of the Rayleigh distribution under general progressive censoring. Journal of the Korean Statistical Society 38:239-246 (2009).