Archive of SID

دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره بیست و نهم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

JNRM
پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

تخمین خروجی‌های نامطلوب و ورودی‌های مطلوب به همراه بهبود در کارایی برای واحدهای تصمیم‌گیری با داده‌های بازه‌ای

فرهاد طاهر[۱]، بهروز دانشیان[۲]، قاسم توحیدی[۲*]، فرهاد حسین زاده لطفی[۳]، فرزین مدرس خیابانی[۴]

(۱) دانشجوی دکتری، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تبریز، تبریز، ایران
(۲) گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی، تهران، ایران
(۳) گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم تحقیقات، تهران، ایران
(۴) گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تبریز ، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۴/۲۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۷/۲۸

چکیده

در برخی از تحقیقات، پژوهشگران به مطالعه و تخمین برخی از پارامترهای تاثیرگذار بر اندازه کارایی از جمله میزان ورودی یا میزان خروجی یک DMU پرداخته‌اند بطوریکه اندازه کارایی حفظ یا به میزان معینی بهبود یابد. این دسته از مسائل تحت عنوان تحلیل پوششی داده‌های معکوس در ادبیات تحلیل عملکرد مورد مطالعه قرار می‌گیرند. این مقاله به مطالعه تحلیل پوششی داده‌های معکوس می‌پردازد. مسئله تخمین ورودی یا خروجی با بهبود در اندازه کارایی واحد، مورد بررسی قرار گرفته است.

لذا در این مقاله، با افزایش سطح ورودی‌های نامطلوب وسطح خروجی‌های مطلوب واحدهای تصمیم‌گیری به همراه بهبود در کارایی که مورد نظر تصمیم‌گیرنده می‌باشد، میزان تغییرات سطح ورودی‌های مطلوب و سطح خروجی‌های نامطلوب تخمین زده می‌شود. برای این منظور، با در نظر گرفتن داده‌ها به صورت بازه‌ای، روش DEA معکوس را با استفاده از مدل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (MOLP)، به کار می‌گیریم، به‌طوری که کارایی واحد تحت ارزیابی بهبود پیدا کند. در ادامه با یک مثال کاربردی روش پیشنهادی مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: DEA، IDEA، MOLP، داده‌های بازه‌ای، داده‌های نامطلوب.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: ghatohidi@yahoo.com

www.SID.ir

Archive of SID

۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی واحدهای تصمیم‌گیری را با چندین ورودی و خروجی اندازه‌گیری می‌کند. [۱] [۲]. DEA بر پایه داده‌های موجود و برخی از معیارهای اصلی برای نشان دادن مجموعه‌ای از فعالیت‌های تولیدی قابل سنجش، محدوده مرز کارایی یا مجموعه امکان تولید (PPS) را تعیین می‌کند. [۳] [۴] در ضمن چندین مطالعه برای مدل‌سازی خروجی‌های نامطلوب پیشنهاد شده است. [۵] [۶] [۷] [۸] [۹] [۱۰]. اما گاهی اوقات ممکن است در بین ورودی‌ها، ورودی نامطلوب نیز وجود داشته باشد که برای بهبود سطح کارایی باید سطح ورودی‌های مطلوب (نامطلوب) را کاهش(افزایش) داد. به طور مثال، می‌توان واحد تولیدی آهن و فولاد را در نظر گرفت که در آن آهن قدیمی برای تولید آهن جدید بعنوان ورودی نامطلوب در نظر گرفته می‌شود زیرا که افزایش این نوع از ورودی‌ها موجب بهبود در کارایی می‌شود. [۱۱]

مدل IDEA بررسی می‌کند که اگر مقدار مشخصی از ورودی‌ها (خروجی‌ها) یک DMU افزایش یابد، چه مقدار خروجی‌ها (ورودی‌ها) باید افزایش پیدا کند تا کارایی DMU تحت ارزیابی بدون تغییر باقی بماند. [۱۲]. وای و همکاران [۱۳] با افزایش سطح ورودی (خروجی)های واحد تحت ارزیابی و حفظ مقدار کارایی آن، با استفاده از DEA معکوس سطح خروجی (ورودی)ها را ارزیابی کردند. جهانشاهلو و همکاران [۱۴] DEA معکوس را در حالتی که تعدادی از خروجی‌ها نامطلوب باشند، استفاده کردند. نواب‌بخش و همکاران [۱۵] برآورد و تخمین خروجی‌ها به همراه بهبود کارایی داده‌های بازه‌ای در DEA را ارائه داده‌اند. دزپوتیس و اسمیرلیس [۱۶] مدلی برای محاسبه کران بالا و پایین کارایی برای داده‌های بازه‌ای را ارائه دادند. طاهر و همکاران [۱۷] مدلی برای برآورد مقدار خروجی‌های نامطلوب و ورودی‌های مطلوب برای واحدهای تصمیم‌گیری با داده‌های بازه‌ای را ارائه دادند. در این مقاله نیز تغییرات سطح ورودی‌های مطلوب و خروجی‌های نامطلوب با تغییر دادن سطح ورودی‌های نامطلوب و خروجی‌های مطلوب به همراه بهبود در کارایی در داده‌های بازه‌ای تخمین زده می‌شود.

سازماندهی این مقاله چنین است: در بخش ۲ یک مرور کلی از DEA رایج ارائه می‌دهیم. و مدل‌ها و روش پیشنهادی را در بخش ۳ ارائه می‌دهیم و به دنبال آن یک مثال کاربردی در بخش ۴ برای نشان دادن کاربرد روش پیشنهادی ارائه می‌شود و سر انجام نتیجه‌گیری را در بخش ۵ می آوریم.

۲- مرور کلی بر DEA

n واحد را در نظر می‌گیریم که هر کدام m ورودی را برای تولید s خروجی مصرف می‌کنند. همچنین فرض کنید که DMU_P یک واحد تحت ارزیابی با ورودی $X_p=\left(x_{1p},\dots,x_{mp}\right)$ و خروجی $Y_p=\left(y_{1p},\dots,y_{sp}\right)$ باشد. مدل CCR ورودی محور را در نظر بگیرید [۱]:

$$\begin{aligned} &min \quad \theta \\ &s.t \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le \theta x_{ip} \\ &i = 1,\dots,m \\ &\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge y_{rp} \qquad (۱) \\ &r = 1,\dots,s \\ &\lambda_j \ge 0 \\ &j = 1,\dots,n. \end{aligned}$$

در مدل (۱) i, r, j به ترتیب نماد تعداد ورودی‌ها، تعداد خروجی‌ها و تعداد DMU ها می‌باشد.

در این مقاله با توجه به این که ورودی‌ها و خروجی‌ها بصورت بازه‌ای می‌باشند لذا بصورت کران‌های بالا و پایین $y_{rj}=\left[y_{rj}^{l}, y_{rj}^{u}\right], x_{ij}=\left[x_{ij}^{l}, x_{ij}^{u}\right]$ نشان داده می‌شوند. دزپوتیس و اسمیرلیس[۱۶] یک مدل ریاضی برای DEA ارایه دادند که کران بالا و پایین کارایی را که با $\left[\theta^{L}, \theta^{u}\right]$ نشان داده می‌شود را تخمین می‌زند. که توسعه مدل‌های DEA به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} &min \quad \theta^{l} \\ &s.t \quad \sum_{j=1,\, j\neq p}^{n} \lambda_j x_{ij}^{l} + \lambda_p x_{ip}^{u} \le \theta^{l} x_{ip}^{u} \\ &i = 1,\dots,m \qquad (۲) \\ &\sum_{j=1,\, j\neq p}^{n} \lambda_j y_{rj}^{u} + \lambda_p y_{rp}^{l} \ge y_{rp}^{l} \\ &r = 1,\dots,s \\ &\lambda_j \ge 0 \\ &j = 1,\dots,n. \end{aligned}$$

www.SID.ir

Archive of SID

و

$$\begin{aligned}
&\min \quad \theta^{u}\\
&s.t \ \sum_{j=1,\ j\neq p}^{n} \lambda_j x_{ij}^{u} + \lambda_p x_{ip}^{l} \le \theta^{u} x_{ip}^{l}\\
&i = 1,\dots,m \qquad (۳)\\
&\sum_{j=1,\ j\neq p}^{n} \lambda_j y_{rj}^{l} + \lambda_p y_{rp}^{u} \ge y_{rp}^{u}\\
&r = 1,\dots,s\\
&\lambda_j \ge 0\\
&j = 1,\dots,n.
\end{aligned}$$

فرض کنید ورودی و خروجی نامطلوب در بین ورودی‌ها و خروجی‌ها وجود داشته باشد. ورودی مطلوب و نامطلوب را به ترتیب بصورت $x_{ij}^{g}=\left[x_{ij}^{lg},x_{ij}^{ug}\right]$ و $X_{i'j}^{b}=\left[x_{i'j}^{lb},x_{i'j}^{ub}\right]$ و خروجی مطلوب و نامطلوب را نیز به ترتیب بصورت $y_{r'j}^{b}=\left[y_{r'j}^{lb},y_{r'j}^{ub}\right],y_{rj}^{g}=\left[y_{rj}^{lg},y_{rj}^{ug}\right]$ در نظر می‌گیریم. بنابراین بهتر است برای بهبود کارایی، ورودی‌های مطلوب و ورودی‌های نامطلوب به ترتیب کاهش و افزایش و همچنین خروجی‌های مطلوب و خروجی‌های نامطلوب به ترتیب افزایش و کاهش یابند.

$$\begin{aligned}
&min \quad \theta^{l}\\
&s.t \ \sum_{j=1,\ j\neq p}^{n} \lambda_j x_{ij}^{lg} + \lambda_p x_{ip}^{ug} \le \theta^{l} x_{ip}^{ug}\\
&i = 1,\dots,m\\
&\sum_{j=1,\ j\neq p}^{n} \lambda_j x_{i'j}^{ub} + \lambda_p x_{i'p}^{lb} \ge x_{i'p}^{lb}\\
&i' = 1,\dots,m \qquad (۴)\\
&\sum_{j=1,\ j\neq p}^{n} \lambda_j y_{rj}^{ug} + \lambda_p y_{rp}^{lg} \ge y_{rp}^{lg}\\
&r = 1,\dots,s\\
&\sum_{j=1,\ j\neq p}^{n} \lambda_j y_{r'j}^{lb} + \lambda_p y_{r'p}^{ub} \le \theta^{l} y_{r'p}^{ub},\\
&r' = 1,\dots,s\\
&\lambda_j \ge 0\\
&j = 1,\dots,n.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\min \quad \theta^{u}\\
&s.t \ \sum_{j=1,\ j\neq p}^{n} \lambda_j x_{ij}^{ug} + \lambda_p x_{ip}^{lg} \le\\
&\theta^{u} x_{ip}^{lg},\\
&i = 1,\dots,m\\
&\sum_{j=1,\ j\neq p}^{n} \lambda_j x_{i'j}^{lb} + \lambda_p x_{i'p}^{ub} \ge x_{i'p}^{ub},\\
&i' = 1,\dots,m \qquad (۵)\\
&\sum_{j=1,\ j\neq p}^{n} \lambda_j y_{rj}^{lg} + \lambda_p y_{rp}^{ug} \ge y_{rp}^{ug},\\
&r = 1,\dots,s\\
&\sum_{j=1,\ j\neq p}^{n} \lambda_j y_{r'j}^{ub} + \lambda_p y_{r'p}^{lb} \le \theta^{u} y_{r'p}^{lb},\\
&r' = 1,\dots,s\\
&\lambda_j \ge 0\\
&j = 1,\dots,n.
\end{aligned}$$

در مدل‌های (۴) و (۵) نمادهای j, r', r, i', i به ترتیب نماد تعداد ورودی‌های مطلوب، تعداد ورودی‌های نامطلوب، تعداد خروجی‌های مطلوب، تعداد خروجی‌های نامطلوب و تعداد DMUها می‌باشند. که با حل مدل‌های (۴) و (۵)، شاخص کارایی $\left[\theta^{*L},\theta^{*u}\right]$ برای هر DMU به دست می‌آید[۱۷].

۳- ارزیابی سطح ورودی‌های مطلوب و خروجی‌های نامطلوب به همراه بهبود در کارایی

با توجه به اینکه در بین ورودی‌ها و خروجی‌ها امکان وجود ورودی و خروجی نامطلوب وجود دارد و میزان مصرف بیشتر ورودی نامطلوب و همچنین تولید هر چه بیشتر خروجی مطلوب مورد نظر تصمیم‌گیرنده می‌باشد لذا در این بخش از مقاله با افزایش میزان تولید خروجی مطلوب و افزایش میزان مصرف ورودی نامطلوب، میزان تغییرات مصرف ورودی مطلوب و تغییرات تولید خروجی نامطلوب تخمین زده می‌شود.

فرض کنید $\Delta x_{ip}^{lg},\Delta x_{ip}^{ug}$، $\Delta x_{i'p}^{lg},\Delta x_{i'p}^{ug}$، $\Delta y_{rp}^{lg},\Delta y_{rp}^{ug}$ و $\Delta y_{r'p}^{lg},\Delta y_{r'p}^{ug}$ به ترتیب مقدار افزایش ورودی‌های مطلوب کران بالا و کران پایین، مقدار افزایش ورودی‌های نامطلوب کران بالا و کران پایین، مقدار افزایش خروجی‌های مطلوب کران بالا و کران پایین و مقدار افزایش خروجی‌های نامطلوب کران بالا و کران پایین باشد در این صورت اگر بخواهیم میزان تولید خروجی مطلوب و میزان مصرف ورودی نامطلوب را افزایش دهیم بطوریکه کارایی واحد تحت ارزیابی به اندازه η درصد بهبود پیدا کند برای تخمین تغییرات کران بالا و پایین میزان مصرف ورودی مطلوب و تغییرات تولید خروجی نامطلوب مدل‌های (۶) و (۷) پیشنهاد می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&min \left(\Delta x_{ip}^{lg},\ \Delta y_{r'p}^{lb}\right),\\
&\mathrm{i} = 1,2,\dots,\mathrm{m}, \quad r' = 1,\dots,s
\end{aligned}$$

www.SID.ir

Archive of SID

$$
\begin{aligned}
& s.t \quad \sum_{j\neq p,j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}^{ug} + \lambda_p x_{ip}^{lg} \le (1+\frac{\eta}{100})\theta^{u*}\left(x_{ip}^{lg}+\Delta x_{ip}^{lg}\right),\\
& i=1,2,\dots,m\\
& \sum_{j\neq p,j=1}^{n} \lambda_j x_{i'j}^{lb} + \lambda_p x_{i'p}^{ub} \ge \left(x_{i'p}^{ub}+\Delta x_{i'p}^{ub}\right),\\
& i' = 1,2,\dots,m\\
& \sum_{j\neq p,j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}^{lg} + \lambda_p y_{rp}^{ug} \ge \left(y_{rp}^{ug}+\Delta y_{rp}^{ug}\right), \qquad (۶)\\
& r=1,2,\dots,s\\
& \sum_{j\neq p,j=1}^{n} \lambda_j y_{r'j}^{ub} + \lambda_p y_{r'p}^{lb} \le (1+\frac{\eta}{100})\theta^{u*}\left(y_{r'p}^{lb}+\Delta y_{r'p}^{lb}\right),\\
& r' = 1,\dots,s\\
& \Delta x_{ip}\\
& lg\ i = m \quad \lambda_j \ge 0,\ j=1,2,\dots,n.\ \ \Delta y_{r'p}^{lb} \ge 0,\ r'=1,\dots,s\\
& \min\ (\Delta x_{ip}^{ug}, \Delta y_{r'p}^{ub}),\\
& i=1,\dots,m,\ r'=1,\dots,s\\
& s.t \quad \sum_{j\neq p,j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}^{lg} + \lambda_p\left(x_{ip}^{lg}+\Delta x_{ip}^{lg*}\right) \le (1+\frac{\eta}{100})\theta^{l*}\left(x_{ip}^{ug}+\Delta x_{ip}^{ug}\right)\\
& i=1,\dots,m\\
& \sum_{j\neq p,j=1}^{n} \lambda_j x_{i'j}^{ub} + \lambda_p\left(x_{i'p}^{ub}+\Delta x_{i'p}^{ub}\right) \ge \left(x_{i'p}^{lb}+\Delta x_{i'p}^{lb}\right),\\
& (۷)\\
& i' = 1,\dots,m\\
& \sum_{j\neq p,j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}^{ug} + \lambda_p\left(y_{rp}^{ug}+\Delta y_{rp}^{ug}\right) \ge \left(y_{rp}^{lg}+\Delta y_{rp}^{lg}\right)\\
& r=1,\dots,s\\
& \sum_{j\neq p,j=1}^{n} \lambda_j y_{r'j}^{lb} + \lambda_p\left(y_{r'p}^{lb}+\Delta y_{r'p}^{lb*}\right) \le (1+\frac{\eta}{100})\theta^{l*}\left(y_{r'p}^{ub}+\Delta y_{r'p}^{ub}\right),\\
& r' = 1,\dots,s\\
& \left(x_{ip}^{lg}+\Delta x_{ip}^{lg*}\right) \le \left(x_{ip}^{ug}+\Delta x_{ip}^{ug}\right)\\
& i=1,\dots,m\\
& \left(y_{r'p}^{lb}+\Delta y_{r'p}^{lb*}\right) \le \left(y_{r'p}^{ub}+\Delta y_{r'p}^{ub}\right)\\
& r' = 1,\dots,s\\
& \Delta x_{ip}\\
& ug\ i = m \quad \lambda_j \ge 0,\ j=1,\dots,n.\ \ \Delta y_{r'p}^{ub} \ge 0,\ r'=1,\dots,s
\end{aligned}
$$

در مدل (۶) تغییرات کران پایین ورودی مطلوب و تغییرات کران پایین خروجی نامطلوب با افزایش دادن کران بالای ورودی نامطلوب و کران بالای خروجی مطلوب به همراه بهبود در کارایی تخمین زده می‌شود. در مدل (۷) تغییرات کران بالای ورودی مطلوب و تغییرات کران بالای خروجی نامطلوب با افزایش دادن کران پایین ورودی نامطلوب و کران پایین خروجی مطلوب به همرا بهبود در کارایی تخمین زده می‌شود.

با توجه به اینکه در مصرف ورودی نامطلوب بایستی این ورودی طوری انتخاب شود که در تولید خروجی مطلوب مرغوب خدشه‌ای وارد نشود لذا با در نظر گرفتن نظر مدیر یا کارشناسان خبره در این زمینه کیفیت خروجی مطلوب تضمین می‌گردد.

با انتخاب وزن واحد به هر کدام از تغییرات ورودی‌های مطلوب و خروجی‌های نامطلوب واحد تحت ارزیابی موجود در تابع هدف، مدل چندهدفه را می‌توان به یک مدل تک‌هدفه تبدیل کرد. لازم به ذکر است که با تغییر دادن وزن‌های اختصاص داده شده در تابع هدف، این تغییرات ثابت می‌ماند.

سپس واحد مجازی جدید با ورودی‌ها و خروجی‌های مطلوب و نامطلوب تغیر یافته واحد $\mathbb{P}$ام که به صورت $x_{ip}^{ug}+\Delta x_{ip}^{ug*}, x_{i'p}^{lb}+\Delta x_{i'p}^{lb}$ در نظر گرفته شده کران پایین و بالای شاخص کارایی واحد جدید را از مدل‌های (۸) و (۹) بدست می‌آوریم.

$$
\begin{aligned}
& min \quad \theta^{l}\\
& s.t \quad \sum_{j=1,j\neq p}^{n} \lambda_j x_{ij}^{lg} + \lambda_p\left(x_{ip}^{ug}+\Delta x_{ip}^{ug*}\right) \le \theta^{l}\left(x_{ip}^{ug}+\Delta x_{ip}^{ug*}\right)\\
& i=1,\dots,m\\
& \sum_{j=1,j\neq p}^{n} \lambda_j x_{i'j}^{ub} + \lambda_p\left(x_{i'p}^{lb}+\Delta x_{i'p}^{lb}\right) \ge \left(x_{i'p}^{lb}+\Delta x_{i'p}^{lb}\right)\\
& i' = 1,\dots,m\\
& \sum_{j=1,j\neq p}^{n} \lambda_j y_{rj}^{ug} + \lambda_p\left(y_{rp}^{lg}+\Delta y_{rp}^{lg}\right) \ge \left(y_{rp}^{lg}+\Delta y_{rp}^{lg}\right)\\
& r=1,\dots,s \qquad (۸)\\
& \sum_{j=1,j\neq p}^{n} \lambda_j y_{r'j}^{lb} + \lambda_p\left(y_{r'p}^{ub}+\Delta y_{r'p}^{ub*}\right) \le \theta^{l}\left(y_{r'p}^{ub}+\Delta y_{r'p}^{ub*}\right),\\
& r' = 1,\dots,s
\end{aligned}
$$

www.SID.ir

Archive of SID

$$\lambda_j \geq 0$$
$$j = 1, \dots, n.$$

و

$$min \quad \theta^u$$
$$s.t \ \sum_{j=1, j\neq p}^{n} \lambda_j x_{ij}^{ug} + \lambda_p\left(x_{ip}^{lg} + \Delta x_{ip}^{lg*}\right) \leq \theta^u\left(x_{ip}^{lg} + \Delta x_{ip}^{lg*}\right), \quad i = 1, \dots, m$$
$$\sum_{j=1, j\neq p}^{n} \lambda_j x_{i'j}^{lb} + \lambda_p\left(x_{i'p}^{ub} + \Delta x_{i'p}^{ub}\right) \geq \left(x_{i'p}^{ub} + \Delta x_{i'p}^{ub}\right)$$
$$i' = 1, \dots, m$$
$$\sum_{j=1, j\neq p}^{n} \lambda_j y_{rj}^{lg} + \lambda_p\left(y_{rp}^{ug} + \Delta y_{rp}^{ug}\right) \geq \left(y_{rp}^{ug} + \Delta y_{rp}^{ug}\right)$$
$$r = 1, \dots, s \qquad (۹)$$
$$\sum_{j=1, j\neq p}^{n} \lambda_j y_{r'j}^{ub} + \lambda_p\left(y_{r'p}^{lb} + \Delta y_{r'p}^{lb*}\right) \leq \theta^u\left(y_{r'p}^{lb} + \Delta y_{r'p}^{lb*}\right)$$
$$r' = 1, \dots, s$$
$$\lambda_j \geq 0$$
$$j = 1, \dots, n.$$

بعد از تغییر ورودی‌ها و خروجی‌ها با استفاده از مدل (۸) مقدار کارایی کران پایین و با استفاده از مدل (۹) مقدار کارایی کران بالا واحد مجازی جدید بدست می‌آید که همان بهبود یافته کران پایین و بالای شاخص کارایی DMU_p (DMU واحد تحت ارزیابی) به اندازه η درصد خواهد بود.

قضیه۱. اگر کران بالای خروجی مطلوب DMU_p از y_{rp}^{ug} به $y_{rp}^{ug}+\Delta y_{rp}^{ug}$ و کران بالای ورودی نامطلوب از $x_{i'p}^{ub}$ به $x_{i'p}^{ub}+\Delta x_{i'p}^{ub}$ تغییر داده شود و همچنین مقدار مینیمم $\Delta x_{ip}^{lg}, \Delta y_{r'p}^{lb}$ از مدل (۶) تخمین زده شود آنگاه مقدار کارایی کران بالای DMU_p به اندازه η درصد بهبود خواهد یافت.

برهان. با توجه به مدل (۶)، PPS بوسیله همه DMUها بجز DMU_p ساخته می‌شود. فرض کنید p' یک واحد مجازی بوده و J مجموعه‌ای از واحدهای تشکیل دهنده $\{1,2,..,p-1,p',p+1,..,n\}$ باشد. بنابراین اندازه کارایی بالای جدید DMU_t که $t=1,2,..,p-1,p',p+1,..,n$، با استفاده از مدل (۹) بدست می آید. ناحیه شدنی مدل (۹) همیشه کوچکتر از ناحیه شدنی مدل (۵) است. بنابراین مقدار کارایی کران بالای مدل (۹) بهبود یافته مقدار کارایی کران بالای مدل (۵) می‌باشد. در نتیجه مقدار کارایی کران بالای DMU_p به اندازه η درصد بهبود خواهد یافت. ■

۴- مثال کاربردی

حال روش ارائه شده در این مقاله را با یک مثال کاربردی از شعبه‌های یک بانک خصوصی در ایران مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم.

همانطور که در جدول (۱) مشاهده می‌شود این بانک شامل ۱۴ شعبه با داده‌های بازه‌ای با دو ورودی و دو خروجی که ورودی اول سابقه پرسنلی (ورودی مطلوب) و ورودی دوم جمع سپرده (ورودی نامطلوب) و خروجی اول تسهیلات (خروجی مطلوب) و خروجی دوم مطالبات معوق (خروجی نامطلوب) می‌باشد.

جدول ۱. ۱۴ شعبه یک بانک خصوصی در ایران

شعبه بانک	سابقه پرسنلی	جمع سپرده	تسهیلات	مطالبات معوق
J	x_{1j}	x_{2j}	y_{1j}	y_{2j}
1	[10,17]	[143,159]	[28,35]	[0.1,0.7]
2	[14,17]	[134,140]	[19,20]	[0.41,0.68]
3	[12,15]	[138,144]	[21,22]	[0.21,0.48]
4	[19,22]	[158,181]	[21,25]	[0.12,0.19]
5	[4,12]	[157,198]	[21,29]	[0.16,0.35]
6	[13,16]	[130,138]	[20,21]	[0.3,0.9]
7	[14,15]	[157,161]	[28,40]	[0.06,0.09]
8	[16,18]	[140,149]	[25,35]	[0.14,0.22]
9	[19,22]	[150,165]	[15,22]	[0.3,0.7]

www.SID.ir

Archive of SID

10	[5,11]	[155,180]	[16,21]	[0.15,0.35]
11	[10,14]	[135,152]	[25,42]	[0.23,0.42]
12	[21,25]	[125,142]	[14,22]	[0.42,0.55]
13	[19,24]	[133,154]	[17,26]	[0.18,0.29]
14	[12,18]	[130,161]	[13,19]	[0.36,0.47]

حال با استفاده از مدل (۴) و (۵) کمترین کارایی و بیشترین کارایی این شعبه‌ها بصورت جدول (۲) برآورد شده است.

مدیر بانک قصد دارد کمترین کارایی و بیشترین کارایی شعبه دو را به اندازه ۵ درصد بهبود ببخشد برای این کار جمع سپرده را از [134,140] به [137,142] و تسهیلات شعبه را از [19,20] به [21,23] افزایش می‌دهد و با در نظر گرفتن این موارد، می‌خواهد بداند چه میزان مطالبات معوق به وجود خواهد آمد و همچنین جهت بهبود در مقدار کارایی، کارمندان شعبه باید دارای چند سال سابقه باشند.

حال با اجرای مدل‌های (۶) و (۷) کران پایین و بالای مطالبات معوق [0.41,0.6931] و سابقه پرسنلی [14.9034,17.3280] تخمین زده می‌شود که با اجرای مدل‌های (۸) و (۹) برای واحد مجازی جدید که بصورت جدول (۳) می‌باشد.

کران پایین و بالای شاخص کارایی واحد جدید همان بهبود یافته واحد دوم می‌باشد یعنی [0.16716,0.843465].

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، DEA معکوس با وجود ورودی ها و خروجی‌های مطلوب و نامطلوب به همراه تغییرات سطح ورودی‌ها و سطح خروجی‌ها و بهبود در مقدار کارایی واحدهای تصمیم‌گیری با داده‌های بازه‌ای مورد بررسی قرارگرفت. با استفاده از برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (MOLP) با افزایش میزان تولید خروجی مطلوب و افزایش میزان مصرف ورودی نامطلوب که مورد نظر تصمیم‌گیرنده می‌باشد، میزان تغییرات مصرف ورودی مطلوب و تغییرات تولید خروجی نامطلوب مورد ارزیابی قرار گرفت که پس از این تغییرات، کارایی واحد تحت ارزیابی به مقدار مشخصی بهبود پیدا کرد.

جدول۲. کمترین کارایی و بیشترین کارایی شعبه‌ها

شعبه بانک	Lower efficiency	Upper efficiency
J	θ^{l*}	θ^{u*}
1	.2272	1
2	.1592	.8033
3	.2245	1
4	.4453	.9063
5	.4167	1
6	.1724	.8951
7	1	1
8	.39	1
9	.1671	.7334
10	.3454	1
11	.2966	1
12	.1648	.5782
13	.2799	.7445
14	.2080	.9904

جدول۳: ورودی‌ها و خروجی‌های واحد مجازی

شعبه بانک	سابقه پرسنلی	جمع سپرده	تسهیلات	مطالبات معوق
J	x_{1j}	x_{2j}	y_{1j}	y_{2j}
2'	[14.9034,17.3280]	[137,142]	[21,23]	[0.41,0.6931]

www.SID.ir

Archive of SID

فهرست منابع

[1] Charnes, Abraham, William W. Cooper, and Edwardo Rhodes. "Measuring the efficiency of decision making units." European journal of operational research 2.6 (1978): 429-444.

[2] Banker, Rajiv D., Abraham Charnes, and William Wager Cooper. "Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis." Management science 30.9 (1984): 1078-1092.

[3] Amirteimoori, Alireza, and Sohrab Kordrostami. "An alternative clustering approach: a DEA-based procedure." Optimization 62.2 (2013): 227-240.

[4] Esmaeilzadeh, A., and A. Hadi-Vencheh. "A new method for complete ranking of DMUs." Optimization 64.5 (2015): 1177-1193.

[5] Färe R, Grosskopf S, Lovell CK, Pasurka C. Multilateral productivity comparisons when some outputs are undesirable: a nonparametric approach. The review of economics and statistics. (1989):90-8.

[6] Chung, Yangho H., Rolf Färe, and Shawna Grosskopf. "Productivity and undesirable outputs: a directional distance function approach." journal of Environmental Management 51.3 (1997): 229-240.

[7] Seiford, Lawrence M., and Joe Zhu. "Modeling undesirable factors in efficiency evaluation." European journal of operational research 142.1 (2002): 16-20.

[8] Jahanshahloo GR, Lotfi FH, Shoja N, Tohidi G, Razavyan S. Undesirable inputs and outputs in DEA models. Applied mathematics and computation. (2005);169(2):917-25.

[9] Pathomsiri S, Haghani A, Dresner M, Windle RJ. Impact of undesirable outputs on the productivity of US airports. Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review. (2008); 44(2): 235-59.

[10] Tao, Xueping, Ping Wang, and Bangzhu Zhu. "Provincial green economic efficiency of China: A non-separable input–output SBM approach." Applied energy 171 (2016): 58-66.

[11] Eyni, M., Ghasem Tohidi, and S. Mehrabeian. "Applying inverse DEA and cone constraint to sensitivity analysis of DMUs with undesirable inputs and outputs." Journal of the Operational Research Society 68.1 (2017): 34-40.

[12] Hadi-Vencheh A, Hatami-Marbini A, Ghelej Beigi Z, Gholami K. An inverse optimization model for imprecise data envelopment analysis. Optimization. (2015);64(11):2441-54.

[13] Wei, Quanling, Jianzhong Zhang, and Xiangsun Zhang. "An inverse DEA model for inputs/outputs estimate." European Journal of Operational Research 121.1 (2000): 151-163.

[14] Jahanshahloo GR, Vencheh AH, Foroughi AA, Matin RK. Inputs/outputs estimation in DEA when some factors are undesirable. Applied Mathematics and Computation. (2004);156(1):19-32.

[15] Navabakhsh M, Lotfi FH, Allahviranloo T, Balf FR, Rezai HZ. The outputs estimation and improvement of efficiency on interval data in DEA. Int. J. Contemp. Math. Sciences. (2007);2(4): 195-201.

[16] Despotis, D. K., & Smirlis, Y. G.

www.SID.ir

Archive of SID

Data envelopment analysis with imprecise data. European Journal of Operational Research. (2002): 140(1), 24-36.

[17] Taher F, Daneshiyan B, Tohidi G, Lotfi F. H, Modarres F. Estimating Undesirable Outputs and Desirable Inputs for Decision Making Units with Interval Data in Data Envelopment Analysis. Accept Journal of the Operations Research Society of China (JORC).(2019)

www.SID.ir