دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره بیست و نهم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

JNRM

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

توسیع چند قضیه‌ی نقطه ثابت مشترک به نگاشت‌های میانگینی غیرانبساطی

جعفر باغنده[۱]، شهرام سعیدی[۲*]

[۱و۲] گروه ریاضی، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۸/۱۹   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۱/۳۱

چکیده

در سال ۱۹۶۳، دمار نشان داد که هر خانواده‌ی جابجایی از نگاشت‌های غیرانبساطی از زیرمجموعه‌های ناتهی، محدب و فشرده از فضای باناخ دارای نقطه ثابت است. تاکاهاشی قضیه‌ی دمار را برای نیم گروه‌های میانگین پذیر گسسته گسترش داد. در سال‌های اخیر تحقیقات فراوانی روی نظریه نقطه ثابت و نقطه ثابت مشترک برای نگاشت‌های غیرانبساطی انجام شده است. برای نیم گروه‌های نیم توپولوژیک (یعنی یک نیم گروه به همراه یک توپولوژی هاوسدورف به طوری که عمل ضرب آن به طور مجزا پیوسته باشد) لائو و ژنگ قضیه دمار را تحت شرایط کلیتر از جمله میانگین‌پذیری فضای توابع متناوب تقریبی و متناوب تقریبی ضعیف بررسی کردند. در این مقاله، ما چند خاصیت نقطه‌ی ثابت را برای عمل نیم گروه‌های نیم توپولوژیک میانگینی غیرانبساطی روی زیرمجموعه‌ی ناتهی، محدب و فشرده ی ضعیف از فضای محدب موضعی بررسی می‌کنیم و گسترشی از نتایج لائو و ژانگ ارائه خواهیم داد.

واژه‌های کلیدی: نقطه ثابت، عمل نیم گروه نیم توپولوژیک، میانگینی غیرانبساطی، توابع متناوب تقریبی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email:sh.saeidi@uok.ac.ir

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر تحقیقات زیادی روی نظریه نقطه ثابت و نقطه ثابت مشترک برای نگاشت‌های غیرانبساطی انجام شده است؛ به عنوان مثال می‌توان به مراجع [۱-۱۱] رجوع نمود.

فضای هاوسدورف محدب موضعی را با (E, Q) نمایش می‌دهیم که در آن Q خانواده‌ای از نیم نرم‌ها روی فضای برداری E است که توپولوژی روی E را مشخص می‌کند. یک نیم گروه نیم توپولوژیک S عبارت است از یک نیم گروه به همراه یک توپولوژی هاوسدورف به طوری که عمل ضرب آن به طور مجزا پیوسته باشد. یک عمل از S روی فضای توپولوژیک هاوسدورف Z نگاشتی چون $\varphi : S \times Z \to Z$ است بطوری که برای هر $s, t \in S$ و $x \in Z$، $\varphi(s, \varphi(t, x)) = \varphi(st, x)$.
برای سادگی بجای $\varphi(s, x)$ می‌نویسیم sx. گوییم نقطه $x \in Z$ نقطه ثابت مشترک از عمل S است هرگاه برای هر $s \in S$ داشته باشیم $sx = x$.

اگر K یک زیرمجموعه از (E, Q) باشد، گوییم عمل روی K عملی Q–غیرانبساطی است هرگاه برای هر $x, y \in K$، $\rho \in Q$ و $s \in S$ داشته باشیم:

$$\rho(sx - sy) \le \rho(x - y)$$

فضای توابع متناوب تقریبی (متناوب تقریبی ضعیف) روی S را با $AP(S)$ ($WAP(S)$) نمایش می‌دهیم. در سال ۱۹۶۳، دمار [۱۲] نشان داد که هر خانواده‌ی جابجایی از نگاشت‌های غیرانبساطی از زیرمجموعه‌های ناتهی، محدب و فشرده از فضای باناخ دارای نقطه ثابت است. تاکاهاشی [۱۳] قضیه‌ی دمار را برای نیم‌گروه‌های میانگین‌پذیر گسسته گسترش داد. برای نیم گروه‌های نیم توپولوژیک S لائو [۱۴] ثابت کرد که $AP(S)$ میانگین پذیر چپ است اگر و تنها اگر دارای خاصیت نقطه ثابت زیر باشد:

(E): وقتی عمل S عملی Q–غیرانبساطی و به طور ضعیف جداگانه پیوسته باشد که روی زیرمجموعه‌ی محدب و فشرده‌ی K از فضای محدب موضعی (E, Q) عمل کند، آنگاه S روی K دارای نقطه ثابت مشترک است.

در سال ۲۰۰۸، لائو و ژنگ [۱۵] ثابت کردند که $WAP(S)$ میانگین‌پذیر چپ است اگر و تنها اگر دارای خاصیت نقطه ثابت زیر باشد:

(F): اگر عمل S Q–غیرانبساطی به طور ضعیف جداگانه پیوسته و به‌طور ضعیف شبه–هم پیوسته باشد که روی زیرمجموعه‌ی محدب و ضعیف فشرده‌ی K از فضای محدب موضعی (E, Q) عمل کند، آنگاه S روی K دارای نقطه ثابت مشترک است.

هدف از این مقاله گسترش این دو قضیه‌ی نقطه ثابت لائو [۱۴] و لائو و ژنگ [۱۵] به عمل میانگینی Q–غیرانبساطی با شرط $a + 2b \le 1$ است.

۲- پیشنیازها

فرض کنید S یک نیم گروه باشد. فضای باناخ تمام توابع کراندار حقیقی مقدار روی S با نرم سوپریمم را با $l^\infty(S)$ نمایش می‌دهیم. زیر مجموعه‌ی X از $l^\infty(S)$ را انتقال پایای چپ (راست) گوییم هرگاه $l_a(X) \subseteq X$ ($r_a(X) \subseteq X$) برای همه‌ی $a \in S$ ها، که در اینجا $(l_af)(s) = f(as)$ و $(r_af)(s) = f(sa)$ برای هر $s \in S$. اگر S یک نیم گروه نیم توپولوژیک باشد، زیرجبر بسته از $l^\infty(S)$ را که شامل توابع پیوسته است را با $C_b(S)$ نمایش می‌دهیم.

همچنین فضای توابع متناوب تقریبی (متناوب تقریبی ضعیف) روی S را با $AP(S)$ ($WAP(S)$) نمایش می‌دهیم؛ به عبارت دیگر شامل تمام توابعی چون $f \in C_b(S)$ هستند بطوری که مجموعه تمام انتقال‌های چپ $\{l_af: a \in S\}$ در توپولوژی نرم $C_b(S)$ فشرده‌ی نسبی (به طور ضعیف فشرده‌ی نسبی) باشد.

فرض کنید X یک زیر فضای بسته از $l^\infty(S)$ باشد که شامل تابع ثابت و نسبت به انتقال‌ها پایا باشد. تابعک خطی $m \in X^*$ را یک میانگین گوییم هرگاه $\|m\| = m(1) = 1$ و آن را یک میانگین پایای چپ گوییم هرگاه برای هر $f \in X$ و $s \in S$، $m(l_sf) = m(f)$.

به‌عنوان مثال همان‌طور که می‌دانیم تمام نیم گروه‌های جابجایی میانگین‌پذیر چپ هستند [۱۶]. عمل نیم گروه را روی مجموعه‌ی محدب K آفین گوییم هرگاه برای

اعداد حقیقی نامنفی a و b که ۱ = a + b، $x, y \in K$ و $s(ax + by) = asx + bsy$، $s \in S$.

عمل S روی فضای توپولوژیک هاوسدورف Z مانند $\varphi : S \times Z \to Z$ را به طور جداگانه پیوسته گوییم هرگاه برای هر s_0 در S و k_0 در K، نگاشت‌های $s \to sk_0$ از S به K و نگاشت‌های $k \to s_0k$ از K به K پیوسته باشند. همچنین عمل را شبه‌–همپیوسته گوییم هرگاه $\bar{S}^p$، بستار مجموعه‌ی $\{K \ni x \to sx \in K\}_{s\in S}$ در K^K با توپولوژی حاصلضربی، فقط شامل نگاشت‌های پیوسته باشد [۱۵].

را به طور جداگانه پیوسته گوییم هرگاه برای هر s_0 در S و k_0 در K، نگاشت‌های $s \to sk_0$ از S به K و نگاشت‌های $k \to s_0k$ از K به K پیوسته باشند. همچنین عمل را شبه‌–همپیوسته گوییم هرگاه $\bar{S}^p$، بستار مجموعه‌ی $\{K \ni x \to sx \in K\}_{s\in S}$ در K^K با توپولوژی حاصلضربی، فقط شامل نگاشت‌های پیوسته باشد [۱۵].

۳- تعمیم عمل‌های غیرانبساطی

فرض کنید K یک زیرمجموعه از فضای محدب موضعی (E, Q) باشد. برای اعداد حقیقی نامنفی a و b که $a + b \leq 1$، نگاشت $T: K \to K$ را (a, b)– میانگینی Q–غیرانبساطی گوییم هرگاه برای $x, y \in K$ و $\rho \in Q$:
$\rho(Tx - Ty) \leq a\rho(x - y) + b\rho(x - Ty)$.

همچنین T را میانگینی Q–غیرانبساطی گوییم اگر T یک (a, b)–میانگینی Q-غیرانبساطی برای اعدادی حقیقی غیرمنفی a و b باشد که $a + b \leq 1$.

واضح است که این شرط از شرط Q–غیرانبساطی ضعیف‌تر است. این نوع نگاشت‌ها در [۱۷] معرفی شدند و سپس در [۱۸] و [۱۹] به طور گسترده‌تری مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. از آنجایی که هر نگاشت میانگینی Q–غیرانبساطی، یک نگاشت Q– غیر انبساطی است، تمام نتایج ما در اینجا توسیعی از نتایج مربوط به Q–غیرانبساطی است. به خواننده پیشنهاد می‌شود مراجع [۲۰و۲۱] را برای اطلاعات بیشتر در مورد نگاشت‌های میانگینی Q–غیرانبساطی مطالعه نماید.

در [۲۲]، سوزوکی شرایط ضعیف‌تری از Q-غیرانبساطی معرفی کرد که ما آن را با Q–غیرانبساطی تعمیم یافته می‌شناسیم.

تعریف۳-۱: نگاشت $T: K \to K$ را Q–غیر انبساطی تعمیم یافته گوییم هرگاه برای هر $x, y \in K$ و $\rho \in Q$، از نامساوی $\frac{۱}{۲}\rho(x - Tx) \leq \rho(x - y)$ نتیجه شود $\rho(Tx - Ty) \leq \rho(x - y)$.

نکپرست در [۲۰] مثالی از یک نگاشت را ارائه داد که میانگینی Q–غیرانبساطی است ولی Q–غیرانبساطی تعمیم یافته نیست و برعکس. همچنین نشان داد که در مورد نگاشت‌های صعودی، هر نگاشت میانگینی Q-غیرانبساطی یک نگاشت Q–غیرانبساطی تعمیم یافته است. در لم زیر تحت شرط جدیدی نتیجه اخیر حاصل خواهد شد.

لم۳-۲: اگر T یک نگاشت میانگینی Q–غیرانبساطی روی مجموعه‌ی K با شرط ۱ ≥ a + ۳b باشد، آنگاه T یک نگاشت Q–غیرانبساطی تعمیم یافته است.

برهان: فرض کنید $\frac{۱}{۲}\rho(x - Tx) \leq \rho(x - y)$ و $\rho(Tx - Ty) \leq a\rho(x - y) + b\rho(y - Tx)$ باشرط ۱ ≥ a + ۳b باشد. پس برای هر $x, y \in K$:

$$\begin{aligned}\rho(Tx - Ty) &\leq \\ a\rho(x - y) &+ b\rho(x - y) + b\rho(x - Tx) \\ &\leq (a + b)\rho(x - y) + ۲b\rho(x - y) \\ &\leq \rho(x - y).\end{aligned}$$

برای عمل نیم گروه نیم توپولوژیک S روی K، گوییم این عمل Q–غیرانبساطی تعمیم یافته است هرگاه برای هر $x, y \in K$، $\rho \in Q$ و $s \in S$، بتوان از نامساوی $\frac{۱}{۲}\rho(x - sx) \leq \rho(x - y)$ نتیجه گرفت که $\rho(sx - sy) \leq \rho(x - y)$.

گوییم عمل میانگینی Q–غیرانبساطی است هرگاه اعداد حقیقی نامنفی a و b با شرط ۱ ≥ a + b چنان وجود داشته باشد که برای هر $x, y \in K$، $\rho \in Q$ و $s \in S$ داشته باشیم:

$\rho(sx - sy) \leq a\rho(x - y) + b\rho(x - sy)$

مثال ۳-۳: نگاشت T را روی $[-۲,۲]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Tx = \begin{cases} ۰ & x \le ۱ \\ -\frac{۱}{۲} & x > ۱ \end{cases}$$

در اینصورت T میانگینی غیرانبساطی است ولی غیرانبساطی تعمیم یافته نیست. در واقع میانگینی غیرانبساطی است چون:

حالت۱: اگر $x \le ۱$ و $y > ۱$ آنگاه،

$$|Tx - Ty| = \frac{۱}{۲} \le \frac{۱}{۲}|x - x + y - Ty|$$
$$\le \frac{۱}{۲}|x - y| + \frac{۱}{۲}|x - Ty|$$

حالت۲. اگر $x > ۱$ و $y \le ۱$ آنگاه

$$|Tx - Ty| = \frac{۱}{۲} \le \frac{۱}{۲}|x + x - y - Ty|$$
$$\le \frac{۱}{۲}|x - y| + \frac{۱}{۲}|x - Ty|$$

پس T میانگینی غیرانبساطی با $a = b = \frac{۱}{۲}$ است.

چون:

$$\frac{۱}{۲}\left|T\frac{۹}{۱۰} - \frac{۹}{۱۰}\right| = \frac{۹}{۲۰} \le \left|\frac{۲۷}{۲۰} - \frac{۹}{۱۰}\right|$$

و

$$\left|T\frac{۲۷}{۲۰} - T\frac{۹}{۱۰}\right| = \frac{۱}{۲} > \frac{۹}{۲۰} = \left|\frac{۲۷}{۲۰} - \frac{۹}{۱۰}\right|$$

پس T غیرانبساطی تعمیم یافته نیست. از آنجایی که $T^۲ = ۰$ پس $S = \{T,۰\}$ یک نیم گروه میانگینی غیر انبساطی است که روی $[-۲,۲]$ عمل می‌کند و می‌توان روی آن توپولوژی گسسته در نظر گرفت.

مثال ۳-۴: نگاشت T را روی بازه $[۰,۱۱]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Tx = \begin{cases} ۱\text{-}x & x \in [۰,۱] \\ ۰ & x \in (۱,۱۱) \\ ۱ & x = ۱۱ \end{cases}$$

آنگاه T یک نگاشت غیرانبساطی تعمیم یافته است ولی میانگینی غیرانبساطی نیست [۲۰، لم ۳.۱].

در [۲۳]، سلیمان و برکت نتایج لائو و ژنگ در [۲۴,۱۵] و لائو در [۱۴] را برای عمل‌های غیرانبساطی تعمیم یافته گسترش دادند. در ادامه ما این نتایج را برای عمل‌های میانگینی غیرانبساطی با شرط $a + ۲b \le ۱$ بدست می‌آوریم.

مثال زیر نشان می‌دهد که نگاشت‌های میانگینی غیر انبساطی با $a + ۲b \le ۱$ وجود دارند که غیرانبساطی تعمیم یافته نیستند.

مثال ۳-۵: نگاشت T را روی $[-۱,۱]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Tx = \begin{cases} ۰ & x \le \frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۱۰} & \frac{۱}{۲} < x < \frac{۲}{۳} \\ -\frac{۱}{۴} & \frac{۲}{۳} \le x < ۱ \\ -\frac{۱}{۲} & x = ۱ \end{cases}$$

آنگاه T یک نگاشت میانگینی غیرانبساطی با $a = b = \frac{۱}{۳}$ است که غیرانبساطی تعمیم یافته نیست.

برهان: فرض کنید $x \le \frac{۱}{۲}$ و $y = ۱$ پس:

$$|Tx - Ty| = \frac{۱}{۲} \le \frac{۱}{۳}|x - x + y - Ty|$$
$$\le \frac{۱}{۳}|x - y| + \frac{۱}{۳}|x - Ty|$$

و اگر $y \le \frac{۱}{۲}$ و $x = ۱$ آنگاه،

$$|Tx - Ty| = \frac{۱}{۳} \le \frac{۱}{۲}|x + x - y - Ty|$$
$$\le \frac{۱}{۳}|x - y| + \frac{۱}{۳}|x - Ty|$$

برای حالت‌های دیگر از x و y به طور مشابه می‌توان نشان داد که T یک نگاشت میانگینی غیرانبساطی با $a = b = \frac{۱}{۳}$ است. از طرف دیگر نگاشت غیر انبساطی تعمیم یافته نیست. در حقیقت داریم:

$$\frac{۱}{۲}\left|T\frac{۶۲}{۱۰۰} - \frac{۶۲}{۱۰۰}\right| = \frac{۳۶}{۱۰۰} \le \left|۱ - \frac{۶۲}{۱۰۰}\right|$$

و

$$\left|T۱ - T\frac{۶۲}{۱۰۰}\right| = \frac{۴}{۱۰} > \frac{۳۸}{۱۰۰} = \left|۱ - \frac{۶۲}{۱۰۰}\right|$$

از آنجایی که $T^۲ = ۰$ پس $S = \{T,۰\}$ یک نیم گروه میانگینی غیرانبساطی است که روی $[-۱,۱]$ عمل می‌کند و می‌توان روی آن توپولوژی گسسته درنظر گرفت.

لم زیر اساس کار ما است که در اثبات قضیه‌ی اصلی به آن احتیاج داریم.

لم ۳-۶: فرض کنید S یک نیم گروه نیم توپولوژیک جدایی‌پذیر باشد که روی زیرمجموعه‌ی محدب و فشرده‌ی ضعیف K از فضای محدب موضعی (E, Q) عمل می‌کند که به طور ضعیف مجزا پیوسته و میانگینی Q–غیرانبساطی با شرط $a + 2b \le 1$ است. فرض کنید F یک زیر مجموعه‌ی مینیمال، ناتهی، محدب فشرده‌ی ضعیف وS–پایا از K باشد که برای تمام $s \in S$، $sF = F$. آنگاه F نسبت به توپولوژی حاصل از Q فشرده است.

برهان: ایده‌ی اصلی اثبات بر اساس اثبات‌های [۱۵] و [۲۳] است. چون F زیر مجموعه‌ای ناتهی، مینیمال و S–پایا از K است، پس $\overline{Sa}^w = F\ (a \in F)$. فرض کنید S_c زیر مجموعه‌ی چگال شمارش‌پذیری از S باشد. پس از به‌طور ضعیف جداگانه پیوسته بودن داریم: $\overline{Sa}^w = \overline{S_c a}^w$. بعلاوه، از قضیه‌ی ماژور و اینکه $S_c a$ شمارش پذیر است.
$\overline{CO}^w(Sa) = \overline{CO}^w(S_c a) = \overline{CO}(S_c a)$ با توپولوژی حاصل از Q جدایی‌پذیر است. این نشان می‌دهد که $\overline{CO}^w(F)$ در توپولوژی حاصل از Q بسته و جدایی پذیر است. فرض کنید N یک همسایگی از صفر در (E, Q) باشد. پس نیم‌نرم‌های متناهی $\{\rho_1, \dots, \rho_n\} \subseteq Q$ و $r, \varepsilon > 0$ چنان وجود دارند که

$$U = \{x \in E: \rho_i(x) < r + \varepsilon;\ i = 1, \dots, n\}$$

یک همسایه از صفر است که در N قرار دارد. نتایج مشابه‌ی که دراثبات [۱۵، لم۳.۳] وجود دارد،نشان می‌دهد که همسایگی ضعیف‌بازی چون W از صفر و عنصر $w \in F$ چنان وجود دارند که $(w + W) \cap F \subseteq w + U$.
یک همسایگی باز و متقارن دیگری چون W_1 از صفر چنان درنظر بگیرید که $W_1 + W_1 \subseteq W$، و نیم‌نرم‌های متناهی $\{\rho_1, \dots, \rho_m\} \subseteq Q$ و $r_0 > 0$ به طوری که

$$H = \{x \in E: \rho_i(x) < r_0 + \varepsilon; i = 1, \dots, m\} \subseteq W_1$$

بنابر خاصیت جدایی‌پذیری F دنباله‌ی $\{y_n\} \subseteq F$ چنان وجود دارد که $F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\{y_n + H\}$. از اینکه F مینیمال است و برای هر $a \in F$، $\overline{Sa}^w = F$ و $w \in \overline{Sa}^w$، پس دنباله‌ای مانند $\{s_n\} \subseteq S$ چنان وجود دارد که $s_1 y_1 \in w + W_1$، $s_2 s_1 y_2 \in w + W_1$، ... و $s_n s_{n-1} \dots s_1 y_n \in w + W_1\ (n=1,2,\dots)$. اگر

$$x \in (s_n s_{n-1} \dots s_1)(y_n + H) \cap F$$

آنگاه $x \in F$ و x را می‌توان بصورت $x = s(y_n + h)$ نوشت که $h \in H$ و $s = s_n s_{n-1} \dots s_1$. از چگال بودن SF در F، عناصر $a_1, \dots, a_n$ در SF چنان وجود دارند که برای هر $\varepsilon > 0$ و $\rho_j \in Q$ داشته باشیم:

$$\rho_j(y_n - a_n) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

حال فرض کنید $z_n = y_n a_n$ به طوری که $F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\{z_n + H\}$ از اینکه F مینیمال است و اینکه برای هر $a \in F$، $\overline{Sa}^w = F$ و $w \in \overline{Sa}^w$، پس دنباله‌ای مانند $\{s_n\} \subseteq S$ چنان وجود دارد که $s_1 z_1 \in w + W_1$، $s_2 s_1 z_2 \in w + W_1$، ... و $s_n s_{n-1} \dots s_1 z_n \in w + W_1$ برای $(n=1,2,\dots)$. اگر

$$x \in (s_n s_{n-1} \dots s_1)(z_n + H) \cap F$$

آنگاه $x \in F$ و x را می‌توان بصورت $x = s(z_n + h)$ نوشت که $h \in H$ و $s = s_n s_{n-1} \dots s_1$.
چون $\rho_j(z_n) < \frac{\varepsilon}{3}$، پس از پیوسته بودنsبرای هر $\varepsilon > 0$، $\rho_j(s z_n - s(0)) < \frac{\varepsilon}{3}$،پس برای هر $\varepsilon > 0$،

$$\rho_j(z_n - s z_n) \le \rho_j(z_n) + \rho_j(s z_n - s(0)) + \rho_j(s(0)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \rho_j(s(0)) < \varepsilon + \rho_j(h) \quad (*)$$

که $j = 1, 2, \dots, m$، و $s(0) \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\{z_n + H\}$ و لذا برای k ای، $s(0) = z_k + h$ که $h \in H$.

در (*) اگر $\varepsilon \to 0$، آنگاه با توجه به مفروضات اولیه

$$\rho_j(s(z_n + h) - s z_n) \le a\rho_j(h) + b\rho_j(s z_n - z_n) + b\rho_j(h) \le (a + 2b)\rho_j(h) < r_0. \quad (**)$$

از (**) داریم $x \in (s_n s_{n-1} \dots s_1) z_n + H$ و لذا

$$(s_n s_{n-1} \dots s_1)(z_n + H) \cap F \subseteq (s_n s_{n-1} \dots s_1) z_n + H \subseteq w + W_1 + W_1 \subseteq w + W$$

پس $\{(s_n\dots s_1)^{-1}(w+W)\}_{n=1}^{\infty}$ یک پوشش باز ضعیف از F است. بنابراین برای عدد صحیحی چون n، $F\subseteq \bigcup_{k=1}^{n}(s_n\dots s_1)^{-1}(w+W)$.
چون $F=(s_n\dots s_1)F$ پس

$$F=\bigcup_{k=1}^{n}(s_n\dots s_{k+1})(w+W)\cap F \subseteq \bigcup_{k=1}^{n}(s_n\dots s_{k+1})(w+U)\cap F$$

فرض کنید $x\in \bigcup_{k=1}^{n}(s_n\dots s_{k+1})(w+U)\cap F$، پس $x\in F$ و $x\in \bigcup_{k=1}^{n}(s_n\dots s_{k+1})(w+U)$. دوباره از چگال بودن SF در F، عنصری مانند c در SF چنان وجود دارد که برای هر $\varepsilon>0$ و $\rho\in Q$، $\rho(w-c)<\varepsilon$. پس x را می‌توان به صورت $x=s'(z+u)$ نوشت به طوری که $z=w-c$ برای $s'=s_n\dots s_{k+1}\in S$ و $u\in U$. از (*)،(**) و فرض اولیه داریم:

$$\rho_i(s'(z+u)-s'z)<r,\ (i=1,\dots,n)$$

پس

$$F\subseteq \bigcup_{k=1}^{n}(s_n\dots s_{k+1})(w+U)\cap F \subseteq \bigcup_{k=1}^{n}(s_n\dots s_{k+1}z+U)$$

لذا F با توپولوژی حاصل از Q فشرده است.
خاصیت نقطه ثابت زیر را در نظر بگیرید.
(F_m): وقتی که عمل S میانگینی Q−غیرانبساطی با شرط $a+2b\leq 1$ به طور ضعیف جداگانه پیوسته و به طور ضعیف شبه-همپیوسته باشد که روی زیرمجموعه‌ی محدب و فشرده‌ی ضعیف K از فضای محدب موضعی (E,Q) عمل کند، آنگاه S روی K دارای نقطه ثابت مشترک است.

قضیه ۳-۷: فرض کنید S یک نیم گروه نیم توپولوژیک جدایی پذیر باشد. آنگاه WAP(S) میانگین پذیر چپ است اگر و تنها اگر دارای خاصیت نقطه ثابت (F_m) باشد.

برهان: فرض کنید WAP(S) میانگین پذیر چپ باشد. فرض کنید X یک زیرمجموعه‌ی ناتهی، مینیمال محدب و ضعیف فشرده از K باشد که نسبت به S پایا باشد و فرض کنید $F\subseteq X$ یک زیر مجموعه‌ی ناتهی، مینیمال ضعیف فشرده از X باشد که نسبت به S پایا است. باتوجه به قسمت اول اثبات [۱۵، قضیه ۳.۴] و لم ۳.۶، F در توپولوژی حاصل از Q فشرده است. حال با ایده‌ای مشابه [۲۵، لم ۲]، نشان می‌دهیم که F فقط شامل یک نقطه است. با برهان خلف فرض کنید که F بیشتر از یک نقطه داشته باشد. پس $\rho\in Q$ و نقاط x_1,x_2 چنان وجود دارند که

$$r=\rho(x_1-x_2)=\sup\{\rho(x-y): x,y\in F\}>0$$

فرض کنید F_0 زیرمجموعه‌ی ماکزیمال از F باشد که شامل نقاط x_1 و x_2 است که برای هر $x,y\in F_0$ داشته باشیم $\rho(x-y)=r$. پس F_0 فشرده و لذا باید متناهی باشد. فرض کنید $F_0=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ و $\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$. پس $\mu\in co(F)$ و برای هر $x\in F$ داریم $\rho(\mu-x)\leq r$. در واقع،

$$r_0=\sup\{\rho(\mu-x): x\in F\}<r.$$

چون در غیراین‌صورت باید دنباله‌ای مانند $(y_i)\subseteq F$ چنان موجود باشد که $\rho(\mu-y_i)\to r$. با استفاده از یک زیر دنباله می‌توان فرض کرد که $y_i\to y_0\in F$. پس $\rho(\mu-y_0)=r$. این نتیجه می‌دهد که برای $i=1,\dots,n$ داریم $\rho(x_i-y_0)=r$، که این با ماکزیمال بودن F_0 در تناقض است، پس $r_0<r$. حال فرض کنید

$$M=\{x\in X:\ \rho(x-y)\leq r_0,\ y\in F\}$$

لذا $\mu\in M$. M یک زیر مجموعه‌ی ناتهی بسته محدب (و لذا بسته‌ی ضعیف) و سره از X است. اگر $x\in M$، آنگاه $\rho(x-y)\leq r_0$ برای هر $y\in F$. بنابر فرض قضیه، اعداد حقیقی نامنفی a و b چنان وجود دارند که برای تمام $s\in S$ و $y\in F$:

$$\rho(sx-sy)\leq a\rho(x-y)+b\rho(x-sy).$$

چون $sF=F$ برای تمام $s\in S$، پس برای $y\in F$

$$\rho(sx-sy)\leq ar_0+br_0\leq r_0$$

واین نتیجه می‌دهد که $\rho(sx-y)\leq r_0$. پس $sx\in M$ و این نشان می‌دهد که M نسبت به S پایا است. این با مینیمال بودن X در تناقض است و لذا F از یک نقطه تشکیل شده است که همان نقطه‌ی ثابت مشترک است.
اثبات جهت عکس، مشابه قسمت دوم اثبات [۱۵، قضیه ۳.۴] است. برای کامل کردن اثبات ما آن را می‌آوریم.

ابتدا توجه می‌کنیم که بنابر قسمت دوم اثبات [۱۵، قضیه ۳.۴] می‌دانیم که اگر عمل گروه ما روی K آفین و τ–همپیوسته باشد آنگاه از پیوسته‌ی ضعیف بودن می‌توان شبه–همپیوسته بودن را نتیجه گرفت که در اینجا τ توپولوژی محدب موضعی روی E است که توسط Q القا می‌شود. فرض کنید (F_m) برقرار باشد و فرض کنید S به طور خطی روی $WAP(S)^*$ عمل کند که برای تمام $s \in S$ و $\phi \in WAP(S)^*$، $s(\varphi) = l_s{}^*\varphi$ که $l_s{}^*$ دوگان عملگر l_s است. پس:

$$\big(s(\varphi)\big)(f) = (l_s{}^*\varphi)(f) = \varphi(l_s f)$$

برای هر $f \in WAP(S)$.

فرض کنید K مجموعه‌ی تمام میانگین‌های روی $WAP(S)$ باشد. پس اگر $m_1, m_2 \in K$ و $\lambda \in (0,1)$،

$$(\lambda m_1 + (1-\lambda)m_2)(1_s) = \lambda m_1(1_s) + (1-\lambda)m_2(1_s) = 1$$

پس K زیر مجموعه‌ای محدب از $WAP(S)$ است. حال تعریف می‌کنیم $Q = \{\rho_f : f \in WAP(S)\}$ که برای $\phi \in WAP(S)^*$ داریم:

$$\rho_f(\varphi) = \sup_{s\in S}\{|\varphi(l_s f)|.\,|\varphi(f)|\}$$

پس ρ_f یک نیم‌نرم روی $WAP(S)^*$ است. این نکته را هم می‌توان در نظر گرفت که $(WAP(S)^*, Q)$ فضای محدب جدایی پذیر است و بنابراینK یک زیر مجموعه‌ی محدب و ضعیف فشرده از $(WAP(S)^*, Q)$ است. همچنین عمل روی $WAP(S)^*$ (و لذا روی K) یک میانگینی Q–غیر انبساطی با $a = 1$ است، چون Q–غیرانبساطی است. از اینکه برای هر $f \in WAP(S)$، مجموعه‌ی $LO(f) = \{l_s f : s \in S\}$ در توپولوژی نرم حاصل از توپولوژی ضعیف $C_b(S)$، فشرده‌ی نسبی است و توپولوژی نرم در $LO(f)$ مشابه توپولوژی همگرای نقطه‌ای است و همچنین چون عمل $(sf)(t) = (l_s f)(t) = f(st)$ برای هر $s \in S$ پیوسته است، پس نگاشت (توپولوژی ضعیف ،$S \to (LO(f)$ با $s(f) = l_s f$ پیوسته و در نتیجه عمل $s(m) = l_s{}^*(m)$ روی S به توی (توپولوژی ضعیف ستاره ،K) پیوسته است. همچنین عمل S روی $WAP(S)^*$ (و لذا روی K) به طور مجزا پیوسته و به طور ضعیف مجزا پیوسته است. چون برای $m_1, m_2 \in K$ و $\lambda \in (0,1)$،

$$\begin{aligned} s(\lambda m_1 + (1-\lambda)m_2) &= l_s{}^*(\lambda m_1 + (1-\lambda)m_2) \\ &= \lambda(l_s{}^* m_1) + (1-\lambda)(l_s{}^* m_2) \\ &= \lambda(s m_1) + (1-\lambda)(s m_2) \end{aligned}$$

عمل S روی K آفین و لذا روی K شبه همپیوسته‌ی ضعیف است. چون خاصیت (F_m) برقرار است پس S روی K دارای نقطه ثابتی چون m است، پس $sm = l_s{}^*(m) = m$ و چون تمام $f \in WAP(S)$، $l_s{}^*(m)f = m(l_s f) = m(f)$ پس m یک میانگین چپ روی $WAP(S)$ است.

با روشی مشابه اثبات قضیه‌ی ۳.۷ و [۱۴، قضیه ۳.۲]، قضیه‌ی زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۳–۸: فرض کنید S یک نیم گروه نیم توپولوژیک جدایی پذیر باشد. آنگاه $AP(S)$ میانگین پذیر چپ است اگروتنها اگر دارای خاصیت نقطه‌ثابت زیر باشد. (E_m): وقتی که عمل S میانگینی Q–غیرانبساطی با شرط $a + 2b \leq 1$، به طور ضعیف جداگانه پیوسته و به طور ضعیف همپیوسته باشد که روی زیرمجموعه‌ی محدب و فشرده‌ی ضعیف K از فضای محدب موضعی (E, Q) عمل کند، آنگاه S روی K دارای نقطه ثابت مشترک است. همچنین با روشی مشابه اثبات قضیه‌ی ۳.۷ و [۱۵، قضیه ۳.۹]، قضیه‌ی زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۳–۹: فرض کنید S یک نیم گروه نیم توپولوژیک باشد. آنگاه $AP(S)$ میانگین‌پذیر چپ است اگر و تنها اگر دارای خاصیت نقطه ثابت زیر باشد.

(E'_m) : وقتی که عمل S میانگینی Q–غیرانبساطی با شرط $a + 2b \leq 1$، به طور ضعیف جداگانه پیوسته و به طور ضعیف همپیوسته باشد که روی زیر مجموعه‌ی محدب، فشرده ی ضعیف و دارای ساختار نرمال K از فضای محدب موضعی (E, Q) عمل کند، آنگاه S روی K دارای نقطه ثابت مشترک است.

فهرست منابع

[1] R. Ahmed, S. Altwqi, Convergence theorems for three finite families of multivalued nonexpansive mappings, Journal of the Egyptian Mathematical Society 22 (2014), 459 – 465

[2] T.D. Benavides, M.A.J. Pineda, Fixed points of nonexpansive mappings in spaces of continuous functions, Proceeding of the American Mathematical Society 133 (2005), 3037– 3046

[3] T.D. Benavides, M.A.J. Pineda, S. Prus, Weak compactness and fixed point property for affine mappings, Journal of Functional Analysis 209 (2004), 1 - 15

[4] F.E. Browder, Non-expansive nonlinear operators in Banach spaces, Proceedings of the National Academy of Sciences USA 54 (1965), 1041 - 1044

[5] R.K. Bisht, R.P. Pant, A critical remark on Fixed point theorems for occasionally weakly compatible mappings, Journal of the Egyptian Mathematical Society 21 (2013), 273 - 275

[6] P.N. Dowling, C.J. Lennard, B. Turett, Weak compactness is equivalent to the fixed point property in c0, Proceeding of the American Mathematical Society 132 (2004), 1659 - 1666.

[7] K. Goebel, W.A. Kirk, Topics in Metric Fixed Point Theory, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 28, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990

[8] K. Goebel, W.A. Kirk, Classical theory of nonexpansive mappings, in: Handbook of Metric Fixed Point Theory, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (2001), 49 - 91

[9] J. Kang, Fixed point set of semigroups of non-expansive mappings and amenability, Journal of Mathematical Analysis and Applications 341 (2008), 1445 - 1456

[10] W.A. Kirk, A fixed point theorem for mappings which do not increase distances, American Mathematical Monthly 72 (1965), 1004 - 1006

[11] A.T.-M. Lau, Amenability of semigroups, in: K.H. Hoffmann, J.D. Lawson, J.S. Pym (Eds.), The Analytic and Topological Theory of Semigroups, de Gruyter, Berlin, (1990), 313 - 334

[12] R. DeMarr, Common fixed points for commuting contraction mappings. Pacific Journal of Mathematics 13(1963),1139–1141

[13] W. Takahashi, Fixed point theorem for amenable semigroup of nonexpansivemappings, Kodai Mathematical Journal Sem. Rep. 21 (1969), 383–386

[14] A.T.-M. Lau, Invariant means on almost periodic functions and fixed pointproperties. Rocky Mountain Journal of Mathematics 3 (1973), 69–76

[15] A.T.-M. Lau, Y. Zhang, Fixed point properties of semigroups of non-expansive mappings, Journal of Functional Analysis 254 (2008), 2534 - 2554

[16] M.M. Day, Amenable semigroups. Illinois Journal of Mathematics 1 (1957), 509–544

[17] S. Zhang, About fixed point theory for mean nonexpansive mapping in Banach spaces, Journal of Sichuan University 2 (1975), 67-68

[18] C. Wu, L.J. Zhang, Fixed points for mean non-expansive mappings, Acta Mathematica Sinica, English Series 23 (2007), 489-494

[19] Y. Yang, Y. Cui, Viscosity

approximation methods for mean non-expansive mappings in Banach spaces, Applied Mathematical Sciences (Ruse) 2 (2008), 627638

[20] K. Nakprasit, Mean nonexpansive mappings and Suzuki-generalized nonexpansive mappings, Journal of Nonlinear Analysis and Optimization, 1 (2010), 93-96

[21] Z. Zuo, Fixed-Point Theorems for Mean Nonexpansive Mappings in Banach Spaces, Abstract and Applied Analysis, Volume 2014, Article ID 746291, 6 pages

[22] T. Suzuki, Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpansivemappings, Journal of Mathematical Analysis and Applications 340 (2008), 1088-1095

[23] A.H. Soliman, M. A. Barakat, A characterization between fixed point properties of weak nonexpansive semigroups and the existence of a left invariant mean on the space of weakly almost periodic functions, Advanced Fixed Point Theory 7 (2017), 172-182

[24] A.T.-M. Lau, Y. Zhang, Fixed point properties for semigroups of nonlinear mappings and amenability, Journal of Functional Analysis 263 (2012), 2949-2977

[25] A.T.-M. Lau, Normal structure and common fixed point properties for semigroups of nonexpansive mappings in Banach spaces, Fixed Point Theory and Applications (2010) Art. ID 580956