

خوش فاصله-متوازن روی گراف مکعب فولدد

سیده مریم حسینی پور^۱، فریدون رهبرنیا^{۲*}، مهدی علائیان^۳، احمد عرفانیان^۴

(^۱) دانشجوی دکتری، گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

(^۲) دانشیار، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

(^۳) استاد، گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

(^۴) استاد، گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۸/۰۹/۲۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۹/۰۱/۳۱

چکیده

گراف غیر تهی Γ به ترتیب یک گراف خوش فاصله-متوازن (خوش فاصله-متوازن یالی) نامیده می‌شود هرگاه اعداد صحیح مثبت γ_V (γ_E) وجود داشته باشند به طوری که برای هر دو رأس مجاور u و v از $V(\Gamma)$ ، γ_V رأس از $V(\Gamma)$ یال از $E(\Gamma)$ وجود داشته باشند به طوری که به رأس u نزدیک‌تر از رأس v باشند و بالعکس γ_V رأس از $V(\Gamma)$ یال از $E(\Gamma)$ وجود داشته باشند به طوری که به رأس v نزدیک‌تر از رأس u باشند در این مقاله نشان می‌دهیم ابرمکعب Q_n و گراف مکعب فولدد F_n ، یک گراف خوش فاصله-متوازن بوده و Q_n خوش فاصله-متوازن یالی است.

واژه‌های کلیدی: خوش فاصله-متوازن، خوش فاصله-متوازن یالی، گراف همبند، ابرمکعب، مکعب فولدد.

۱- مقدمه

فاصله بین دو رأس نقش مهمی در نظریه متریک گراف‌ها ایفا می‌کند. $W_{u,v}^\Gamma$ زیر مجموعه‌هایی از رئوس گراف Γ هستند که به ازای فاصله بین هر دو رأس مجاور u و v تعریف می‌شود. جوکوویچ^۱، در سال ۱۹۷۳ ثابت کرد که یک گراف دو بخشی مکعب جزئی است اگر و تنها اگر به ازای هر دو رأس مجاور u و v رابطه $W_{u,v}^\Gamma = W_{v,u}^\Gamma$ برقرار باشد [1]. تعمیمی از نتایج فوق در [2, 3] مورد بررسی قرار گرفت. مجموعه‌های $W_{u,v}^\Gamma$ در نظریه گراف‌های شیمیایی نیز نقش بسزایی ایفا می‌کنند [4, 5, 6].

گراف فاصله-متوازن خانواده‌ای از گراف‌ها است که بر مبنای مجموعه‌های $W_{u,v}^\Gamma$ تعریف می‌شود. این گراف‌ها ابتدا توسط هاندا^۲ [7] مورد مطالعه و بررسی قرار گرفتند. همچنین افرادی چون کلاوزار^۳، جریبک^۴ و رال^۵ [8] و ایلچ^۶ و همکاران [9]، گراف‌های فاصله-متوازن را در انواع مختلفی از حاصلضرب گراف‌ها و خواص مختلفی از آن‌ها مورد مطالعه و بررسی قرار دادند. همچنین تعمیم‌های مختلفی از گراف‌های فاصله-متوازن در [10, 11, 12] معرفی و خواص آن‌ها مورد بررسی قرار گرفت.

گراف خوش فاصله-متوازن و گراف خوش فاصله-متوازن یالی از جمله تعمیم‌های گراف فاصله-متوازن هستند که ویژگی‌ها و رده‌بندی‌های مختلفی از این گراف‌ها در [13, 14, 15, 16, 17] مورد بررسی قرار گرفته است. گراف ابرمکعب و زیرگراف‌های آن خانواده‌ای از گراف‌ها هستند که توجه بسیاری از محققین و ریاضیدانان را به خود جلب کرده است [18]. می‌دانیم گراف ابرمکعب زیر گرافی از گراف‌های همینگ و مکعب فولدد است. ما در این مقاله ثابت می‌کنیم گراف همینگ و گراف مکعب فولدد از جمله گراف‌های خوش فاصله-متوازن هستند. علاوه بر این نشان می‌دهیم که گراف ابرمکعب یک گراف خوش فاصله-متوازن یالی است.

۲- تعاریف و مفاهیم اولیه

فرض کنید Γ یک گراف همبند غیر جهت دار متناهی باشد و $V(\Gamma)$ و $E(\Gamma)$ به ترتیب نشان‌دهنده مجموعه رئوس و مجموعه یال‌های Γ باشند. برای $u, v \in V(\Gamma)$ فرض کنیم $d(u, v)$ نشان‌دهنده کوتاه‌ترین مسیر بین u و v باشد. در این صورت برای رئوس مجاور $u, v \in V(\Gamma)$ داریم

$$W_{u,v}^\Gamma := W_{u,v} = \{x \in V(\Gamma) | d(x, u) < d(x, v)\},$$

$$W_{v,u}^\Gamma := W_{v,u} = \{x \in V(\Gamma) | d(x, v) < d(x, u)\},$$

$$W_u^v := \{x \in V(\Gamma) | d(x, u) = d(x, v)\}.$$

گوییم Γ یک گراف فاصله-متوازن^۷ (DB) است هرگاه برای هر زوج دلخواه از رئوس مجاور $u, v \in V(\Gamma)$

$$|W_{u,v}| = |W_{v,u}| \quad [7]$$

برای یک زوج از رئوس مجاور $x, y \in V(\Gamma)$ و رأس $e = xy$ فرض کنید $\tilde{d}(u, e)$ نشان‌دهنده طول کوتاه‌ترین مسیر بین u و e باشد. به عبارت دیگر

$$\tilde{d}(u, e) = \min\{d(u, x), d(u, y)\}$$

برای یک زوج از رئوس مجاور $u, v \in V(\Gamma)$ داریم $E_{u,v}^\Gamma = E_{u,v} = \{e \in E(\Gamma) | \tilde{d}(u, e) < \tilde{d}(v, e)\}$.

گوییم Γ یک گراف فاصله-متوازن یالی^۸ (EDB) است هرگاه برای هر زوج از رئوس مجاور $u, v \in V(\Gamma)$ داشته باشیم، $|E_{u,v}| = |E_{v,u}|$ [13].

گوییم Γ یک گراف خوش فاصله-متوازن^۹ (NDB) است هرگاه عدد صحیح مثبت γ_V وجود داشته باشد به طوری که برای هر زوج از رئوس مجاور $u, v \in V(\Gamma)$

$$|W_{u,v}| = |W_{v,u}| = \gamma_V \quad [19]$$

همچنین گوییم Γ یک گراف خوش فاصله-متوازن یالی^{۱۰} (NEDB) است هرگاه عدد صحیح مثبت γ_E

1. Djokovic
2. Handa
3. Klavz
4. Jerbic
5. Rall
6. Ilić

7. Distance Balanced
8. Edge Distance Balanced
9. Nicely Distance Balanced
10. Nicely Edge Distance Balanced

می‌آید. بعبارت دیگر دو راس x و y از $V(F_n)$ مجاور هستند هرگاه $wt(x, y) = 1$ یا $wt(x, y) = n - 1$. توجه کنید در هر دو حالت بیان شده داریم $d(x, y) = 1$.
۲. گراف مکعب فولد یک گراف n -منتظم با 2^{n-1} رأس و $n2^{n-2}$ یال می‌باشد.
۳. گراف مکعب فولد یک گراف منتظم با قطر $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ و دارای خاصیت فاصله تعدی^{۱۷} است [22].

۳- ابرمکعب Q_n یک گراف خوش فاصله-متوازن و خوش فاصله-متوازن یالی است.

فرض کنید G و H دو گراف باشند. حاصل ضرب دکارتی G و H که با $G \times H$ نشان داده می‌شود گرافی است که مجموعه رئوس آن $V(G) \times V(H)$ و رئوس (g_1, h_1) و (g_2, h_2) در $V(G) \times V(H)$ مجاورند اگر و تنها اگر $g_1 = g_2$ و h_1 و h_2 در H مجاور باشند یا $h_1 = h_2$ و g_1 و g_2 در G مجاور باشند. در این بخش ثابت می‌کنیم که ابرمکعب Q_n یک گراف خوش فاصله-متوازن و یک گراف خوش فاصله-متوازن یالی است. قبل از اثبات نتیجه اصلی، قضیه زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۳: فرض کنید G و H دو گراف باشند. در این صورت $\Gamma = G \times H$ یک گراف خوش فاصله-متوازن است اگر و تنها اگر هر دو گراف G و H خوش فاصله-متوازن باشند و $|V(H)|\gamma_{V(G)} = |V(G)|\gamma_{V(H)}$.

اثبات: به [8] مراجعه شود.

با استفاده از قضیه ۲.۱، نتیجه زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۲.۳: گراف همینگ $H(n, q)$ یک گراف خوش فاصله-متوازن با $q^{n-1} = \gamma_V$ است.

اثبات: با استقرا روی $n \geq 2$ و استفاده از قضیه ۱.۳ نتیجه زیر را خواهیم داشت

$$|W_{u,v}| = |W_{v,u}| = q^{n-1}.$$

نتیجه ۳.۳: ابرمکعب Q_n یک گراف خوش فاصله-متوازن است.

وجود داشته باشد به طوری که برای هر زوج از رئوس مجاور $|E_{u,v}| = |E_{v,u}| = \gamma_E$, $u, v \in V(\Gamma)$ [16]. فرض کنید n و q اعداد صحیح مثبت و $x = (x_1, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, \dots, y_n)$ دو بردار n -تایی با مولفه‌های متعلق به \mathbb{Z}_q باشند. فاصله همینگ^{۱۱} دو بردار x و y ، تعداد مکان‌هایی است که مؤلفه‌های واقع در آن مکان‌ها با یکدیگر متفاوت هستند و آن را با $d(x, y)$ نشان می‌دهیم. همچنین وزن همینگ^{۱۲} بردار x تعداد مؤلفه‌های غیر صفر آن تعریف می‌شود که با $wt(x)$ نشان می‌دهیم.

گراف‌های همینگ دسته‌ای از گراف‌های فاصله-منتظم هستند به طوری که در مباحث ریاضیات محض و کاربردی دارای اهمیت ویژه‌ای بوده و مطالعات گسترده‌ای روی آنها انجام شده است [20, 21] را ببینید). برای گراف همینگ $H(n, q)$ به طوری که n و q اعداد صحیح مثبت هستند، مجموعه رئوس و مجموعه یال‌ها به ترتیب به صورت زیر می‌باشند

$$V(H(n, q)) = \{x = (x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{Z}_q\}, \\ E(H(n, q)) = \{xy | d(x, y) = 1\}.$$

در حالت $q = 2$ داریم $H(n, 2) = Q_n$.

فرض کنید x و y دو بردار n -تایی باشند. گوییم x و y دو رأس متضاد^{۱۳} هستند هرگاه در تمامی مؤلفه‌ها با یکدیگر اختلاف داشته باشند. به عبارت دیگر، $d(x, y) = n$.

گراف مکعب فولد^{۱۴} گرافی غیرجهت‌دار است که با استفاده از ابرمکعب‌ها^{۱۵} و اضافه شدن یک جورسازی تام^{۱۶} که با اتصال رئوس متضاد ابرمکعب ساخته شده به دست می‌آید.

فرض کنید F_n نشان‌دهنده مکعب فولد از مرتبه n باشد. در این صورت خاصیت‌های زیر را داریم:

۱. F_n با اضافه نمودن یال‌هایی که دو سر آن یال‌ها متضاد هم هستند به گراف ابرمکعب Q_{n-1} بدست

11. Hamming Distance
12. Hamming Weight
13. Opposite Vertices
14. Folded Cube Graph
15. Hyper-Cube
16. Complete Matching

17. Distance Transitive

حالت ب.۱: فرض کنید $d(u, x) \leq d(u, y)$ فرض کنید u و v در مؤلفه k -ام با یکدیگر اختلاف داشته باشند.

همچنین فرض کنید x و u در t مؤلفه i_1, \dots, i_t اختلاف داشته باشند به طوری که $1 \leq t \leq n - 1$. از آنجایی که $d(u, x) < d(v, x)$ و با توجه به تذکر ۴.۳، نتیجه می‌گیریم $d(v, x) = t + 1$ به آسانی مشاهده می‌شود که $k \notin \{i_1, \dots, i_t\}$. در غیر اینصورت $d(v, x) = t - 1$ نتیجه v و x در مؤلفه‌های k, i_1, \dots, i_t با یکدیگر اختلاف دارند. حال فرض کنید x و y در مؤلفه j -ام با یکدیگر اختلاف داشته باشند. به آسانی مشاهده می‌شود که $j \in \{k, i_1, \dots, i_t\}$ در غیر این صورت $d(u, y) = d(v, y) = t + 2$ و از آنجایی که $d(u, x) = t$ و $d(v, y) = t + 2$ با توجه به تذکر ۴.۳، این یک تناقض است. فرض کنید $j = k$ ، در این صورت بنا بر این $d(u, x) < d(u, y) = t + 1$ بنا بر این $e = xy \in E_{u,v}$ و در نتیجه $\tilde{d}(u, e) < \tilde{d}(v, e)$ حال اگر $j = i_r$ به طوری که $1 \leq r \leq t$ ، آنگاه $d(u, y) < d(v, y)$ که این غیرممکن است زیرا $d(u, x) \leq d(u, y)$.

حالت ب.۲: فرض کنید $d(u, y) < d(u, x)$ فرض کنید $1 \leq t \leq n - 1$ در این صورت با توجه به تذکر ۴.۳ خواهیم داشت:

$$d(u, x) = t + 1.$$

از آنجایی که $d(u, x) < d(v, x)$ خواهیم داشت $d(v, x) > t + 1$ با استفاده از تذکر ۴.۳ و اینکه $(v, y) = t$ ، به یک تناقض خواهیم رسید. در هر دو حالت الف و ب، واضح است $e \in E(\Gamma)$ بنا بر این تساوی به درستی برقرار است.

قضیه ۶.۳: ابرمکعب Q_n یک گراف خوش فاصله-متوازن یالی با $\gamma_E = (n - 1)2^{n-2}$ است.

اثبات: با استفاده از نتیجه ۲.۳، در حالتی که $q = 2$ داریم

$$H(n, q) = H(n, 2) = Q_n.$$

تذکر ۴.۳: فرض کنید $xy \in E(\Gamma)$ و $u \in V(\Gamma)$ در این صورت رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$|d(u, x) - d(u, y)| \leq 1.$$

لم ۵.۳: فرض کنید Γ یک گراف و $uv \in E(\Gamma)$ باشد. در این صورت داریم:

$$E_{u,v} = \{xy \in E(\Gamma) | x \in W_{u,v}, y \in W_u^v \cup W_{u,v}\}.$$

اثبات: فرض کنید $e = xy \in E_{u,v}$ در اینصورت $\tilde{d}(u, e) < \tilde{d}(v, e)$ بدون کاستن از کلیت مسئله، فرض کنید $\tilde{d}(u, e) = d(u, x) + 1$ در این صورت داریم:

$$d(u, x) < d(v, x), d(u, x) < d(v, y).$$

بنابراین $x \in W_{u,v}$ از طرفی با توجه به تذکر ۴.۳، برای $e = xy$ خواهیم داشت $d(u, y) \leq d(v, y)$ بنا بر این $y \in W_u^v \cup W_{u,v}$ از این رو $e \in \{xy \in E(\Gamma) | x \in W_{u,v}, y \in W_u^v \cup W_{u,v}\}$.

برعکس فرض کنید $e = xy \in E(\Gamma)$ و $x \in W_{u,v}$ و $y \in W_u^v \cup W_{u,v}$ از این رو $d(u, x) < d(v, x)$ و $d(u, y) \leq d(v, y)$ حال دو حالت ممکن را برای $d(u, y) \leq d(v, y)$ در نظر می‌گیریم:

حالت الف) فرض کنید $d(u, y) < d(v, y)$ از آنجایی که $d(u, x) < d(v, x)$ و $d(u, y) < d(v, y)$ داریم $\tilde{d}(u, e) < \tilde{d}(v, e)$ بنا بر این $e = xy \in E_{u,v}$.

حالت ب) فرض کنید $d(u, y) = d(v, y)$ در این صورت $d(u, x) < d(v, x)$ برای حالت ب دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حال با توجه به اینکه هر یال دوبار شمرده شده است، داریم:

$$|E_{u,v}| = \frac{(n-1) \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}}{2}$$

و به طور مشابه داریم:

$$|E_{v,u}| = (n-1)2^{n-2}.$$

از این رو $|E_{u,v}| = |E_{v,u}|$. بنابراین Q_n یک گراف خوش فاصله-متوازن یالی با $\gamma_E = (n-1)2^{n-2}$ است.

۴- مکعب فولدد F_n یک گراف خوش فاصله-متوازن است

در این بخش ثابت می‌کنیم که گراف مکعب فولدد یک گراف خوش فاصله-متوازن است.

قضیه ۱.۴: فرض کنید n عددی زوج باشد. در این صورت F_n یک گراف دوبخشی است.

اثبات: از آنجایی که n زوج است و با توجه به تعریف F_n ، طول عناصری که به هر رأس از F_n تخصیص داده می‌شود، فرد است (عناصری که از ۰ و ۱ تشکیل شده‌اند). از طرفی می‌دانیم اگر وزن هر یک از این عناصر زوج باشد در این صورت با وارون کردن آن عنصر (یعنی تبدیل مؤلفه‌های صفر آن به یک و بالعکس)، وزن عنصر به دست آمده فرد خواهد بود. به آسانی مشاهده می‌شود هر عنصر و متضاد آن دقیقاً در دو بخش V_1 و V_2 قرار می‌گیرند. توجه کنید دو مجموعه V_1 و V_2 با افزاز رئوس F_n به دست می‌آیند به طوری که افزاز V_1 شامل رئوس با وزن فرد و افزاز V_2 شامل رئوس با وزن زوج هستند یا بالعکس. بنابراین به آسانی مشاهده می‌شود که F_n برای n زوج، دوبخشی است.

تذکر ۲.۴: فرض کنید n عددی فرد باشد. در این صورت F_n یک گراف دوبخشی نیست.

مثال ۳.۴: در گراف مکعب Q_2 رئوس متضاد به صورت 00, 01 و 10 هستند (شکل (۱)).

اثبات: از آنجایی که Q_n یک گراف دوبخشی و فاقد دور فرد است، بنابراین $W_u^v = \emptyset$. حال با توجه به تعریف $E_{u,v}$ برای Q_n داریم:

$$\begin{aligned} E_{u,v} &= \{xy \in E(Q_n) \mid x \in W_{u,v}, y \in W_{u,v} \cup \emptyset\} \\ &= \{xy \in E(Q_n) \mid x, y \in W_{u,v}\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{یال هایی که دو سر} \\ \text{آنها به } u \text{ نزدیک} \\ \text{است} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

دو یال $f = uv$ و $e = xy$ را در $E(\Gamma)$ در نظر می‌گیریم. بدون کاستن از کلیت مسئله، فرض کنید $u = (1, 0, \dots, 0)$, $v = (0, 0, \dots, 0)$

9

$$x = \left(1, \overbrace{x_2, \dots, x_n}^{n-1}\right), y = \left(1, \overbrace{y_2, \dots, y_n}^{n-1}\right)$$

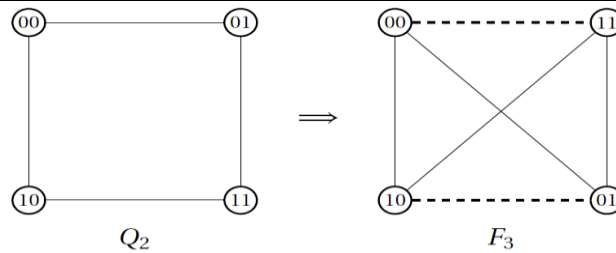
حال تعداد یال‌هایی که فاصله آن‌ها به راس u نزدیکتر است تا به راس v را می‌شماریم. در ادامه تمامی حالات ممکن برای x و y را بررسی می‌کنیم.

اگر $x = u$ آنگاه تعداد $n-1$ راس از y دارای این خاصیت هستند. به عبارت دیگر تعداد حالات ممکن برای یال xy در این حالت برابر است با

$$\binom{n-1}{0} \times (n-1) = n-1.$$

اگر تعداد درایه‌های ۱ در x برابر ۲ باشد آنگاه تعداد حالات ممکن برای یال xy برابر است با $\binom{n-1}{1} \times (n-1)$. همچنین اگر تعداد درایه‌های ۱ در x برابر ۳ باشد آنگاه تعداد حالات ممکن برای یال xy برابر است با $\binom{n-1}{2} \times (n-1)$. بنابراین اگر تعداد درایه‌های ۱ در x برابر با $n-1$ باشد، آنگاه تعداد حالات ممکن برای یال xy برابر است با $\binom{n-1}{n-1} \times (n-1)$. از اینرو تعداد تمامی حالات ممکن برای یال $e = xy$ برابر است با

$$\begin{aligned} &(n-1) \binom{n-1}{0} + (n-1) \binom{n-1}{1} + \\ &(n-1) \binom{n-1}{2} + \dots + (n-1) \binom{n-1}{n-1} = \\ &(n-1) \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}. \end{aligned}$$



شکل ۱: گراف مکعب فولدد F_3 و گراف Q_2

$$\underbrace{\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots + \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}}_{\text{حالت } 0 \leq wt(x,u) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} = \underbrace{\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} + \dots + \binom{n-1}{n-1}}_{\text{حالت } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq wt(x,u) \leq n-1}. \quad (I)$$

حال فرض کنید n فرد باشد. اگر $0 \leq wt(x, u) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ باشد، آنگاه $d(x, u) < d(x, v)$. همچنین اگر $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq wt(x, u) \leq n - 1$ آنگاه $d(x, u) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ توجه کنید اگر $wt(x, u) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ باشد، آنگاه $d(x, v) = d(x, u)$. حال با شمارش تعداد x ها در هر یک از حالات ذکر شده، تساوی زیر را خواهیم داشت:

$$\underbrace{\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots + \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}}_{\text{حالت } 0 \leq wt(x,u) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} = \underbrace{\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} + \dots + \binom{n-1}{n-1}}_{\text{حالت } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq wt(x,u) \leq n-1}. \quad (II)$$

بنابراین با توجه به (I) و (II)، می‌توان نتیجه گرفت آنگاه، $wt(u, v) = n - 1$ اگر

$$|W_{u,v}| = |W_{v,u}| = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \binom{n-1}{i}.$$

حالت دوم: فرض کنید $wt(u, v) = 1$ و n زوج باشد. از آنجایی که $wt(x, y)$ نشان‌دهنده تعداد مؤلفه‌هایی است که x و y در آن مکان‌ها با یکدیگر

به آسانی مشاهده می‌شود که F_3 یک گراف دوبخشی نیست.

قضیه ۴.۴: گراف مکعب فولدد F_n یک گراف خوش

فاصله-متوازن با $\gamma_V = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \binom{n-1}{i}$ است.

اثبات: برای اثبات این قضیه ابتدا ثابت می‌کنیم برای هر یال $f = uv \in E(F_n)$ خواهیم داشت:

$$\exists! \gamma_V \text{ s. t. } |W_{u,v}| = |W_{v,u}| = \gamma_V.$$

قرار می‌دهیم.

بر بردار u و v روی \mathbb{Z}_q است. به عبارت دیگر $wt(u, v)$ نشان‌دهنده تعداد مؤلفه‌هایی است که در آن u و v با هم اختلاف دارند. حال با توجه به ساختار گراف F_n خواهیم داشت، $wt(u, v) = 1$ یا $n - 1$. فرض کنید x و y دو راس دلخواه از $V(F_n)$ باشند در این صورت دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: فرض کنید $wt(u, v) = n - 1$ از

آنجایی که قطر گراف مکعب فولدد F_n برابر با $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ است، برای هر $x \in V(F_n)$ دو حالت خواهیم داشت. فرض کنید n زوج باشد. اگر به ازای هر $x \in V(F_n)$ داشته باشیم $0 \leq wt(x, u) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ آنگاه $d(x, u) < d(x, v)$ همچنین اگر $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq wt(x, u) \leq n - 1$ آنگاه $d(x, v) < d(x, u)$. حال با شمارش تعداد x ها در هر یک از حالات ذکر شده، تساوی زیر را خواهیم داشت:

با توجه به جدول 1

$$\begin{aligned} \implies d(x, u) &= \frac{n}{2} - 2 \text{ یا } \frac{n}{2}. \\ \text{if } d(x, v) = \frac{n}{2} &\implies \text{wt}(x, v) = \frac{n}{2} \\ \implies \text{wt}(x, u) &= \frac{n}{2} - 1 \text{ یا } \frac{n}{2} + 1 \\ \implies d(x, u) &= \frac{n}{2} - 1. \end{aligned}$$

به طوری که ماکزیمم فاصله بین دو رأس دلخواه در F_n برابر $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ است. با استفاده از روابط بالا تعداد x ها برای هر دو حالت

$$d(x, u) > d(x, v) \text{ و } d(x, u) < d(x, v)$$

به دست می آید. بعنوان مثال فرض کنید $d(x, v) = 1$ در این صورت $\text{wt}(u, v) = 1$ و $\text{wt}(x, v) = 1$ یا $n - 1$.

اگر $\text{wt}(x, v) = 1$ ، آنگاه x و v فقط در مکان j -ام با یکدیگر اختلاف دارند به طوری که $1 \leq j \leq n - 1$. اگر u و v در j -امین مکان با یکدیگر اختلاف داشته باشند، آنگاه $x = u$

در غیر این صورت u و v در i -امین مکان با یکدیگر اختلاف خواهند داشت به طوری که $i \neq j$ و $d(x, u) = 2$ از این رو تعداد x ها با این خاصیت برابر است با $\binom{n-2}{1}$.

اختلاف دارند و با توجه به این نکته که در گراف مکعب فولد F_n دو رأس مجاورند. هرگاه در 1 یا $n - 1$ درایه با یکدیگر اختلاف داشته باشند، می توانیم جدول (۱) را داشته باشیم. برای هر $x \in V(F_n)$ و استفاده از جدول (۱) روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \text{if } d(x, v) = 0 &\implies x = v, \\ \text{if } d(x, v) = 1 &\implies \text{wt}(x, v) = 1 \text{ یا } n - 1 \\ &\implies \text{wt}(x, u) = 0 \text{ یا } 2 \text{ یا } n - 2 \\ &\implies d(x, u) = 0 \text{ یا } 2. \\ \text{if } d(x, v) = 2 &\implies \text{wt}(x, v) = 2 \text{ یا } n - 2 \\ &\implies \text{wt}(x, u) = 1, 3, n - 1 \text{ یا } n - 3 \\ &\implies d(x, u) = 1 \text{ یا } 3. \\ \text{if } d(x, v) = 3 &\implies \text{wt}(x, v) = 3 \text{ یا } n - 3 \\ &\implies \text{wt}(x, u) = 2, 4, n - 2 \text{ یا } n - 4. \\ &\vdots \\ \text{if } d(x, v) = \frac{n}{2} - 1 &\implies \text{wt}(x, v) = \frac{n}{2} - 1 \text{ یا } n - \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} + 1 \\ &\implies \text{wt}(x, u) = \frac{n-2}{2} - 1 = \frac{n}{2} - 2 \text{ یا } \frac{n-2}{2} + 1 \\ &= \frac{n}{2} \text{ یا } \frac{n}{2} + 2 \end{aligned}$$

جدول (۱)

$\text{wt}(x, y)$	$d(x, y)$
0	0
1	1
2	2
\vdots	\vdots
$\frac{n}{2} - 1$	$\frac{n}{2} - 1$
$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$
$\frac{n}{2} + 1$	$\frac{n}{2} - 1$
$\frac{n}{2} + 2$	$\frac{n}{2} - 2$
\vdots	\vdots
$n - 2$	2
$n - 1$	1

باشد، متضاد آن نیز دارای وزن فرد خواهد بود. بنابراین برای n فرد، جدول (۲) را داریم. با استفاده از جدول (۲) نتایج زیر را برای هر یال $f = uv$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \text{if } d(x, v) = 0 &\Rightarrow x = v, \\ \text{if } d(x, v) = 1 & \\ \Rightarrow \text{wt}(x, v) = 1 &\text{ یا } n - 1 \\ \Rightarrow \text{wt}(x, u) = 0 &\text{ یا } 2 \text{ یا } n - 2 \end{aligned}$$

با توجه به جدول ۲

$$\underline{\underline{\Rightarrow}} \\ d(x, u) = 0 \text{ یا } 2.$$

از آنجایی که $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2}$ برای n های فرد، پس

$$\begin{aligned} \vdots \\ \text{if } d(x, v) = \frac{n-1}{2} & \\ \Rightarrow \text{wt}(x, v) = \frac{n-1}{2} &\text{ یا } \frac{n+1}{2} \\ \Rightarrow \text{wt}(x, u) = \frac{n-3}{2}, \frac{n-1}{2}, &\frac{n+1}{2} \text{ یا } \frac{n+3}{2} \end{aligned}$$

با توجه به جدول ۲

$$\underline{\underline{\Rightarrow}} \\ d(x, u) = \frac{n-3}{2} \text{ یا } \frac{n-1}{2}.$$

حال با استفاده از روش‌های مشابه و با توجه به روابط بیان شده تساوی زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |W_{u,v}| = |W_{v,u}| &= \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1} \binom{n-1}{i} = \\ \sum_{i=0}^{\frac{n-3}{2}} \binom{n-1}{i}. \end{aligned}$$

حال فرض کنید $\text{wt}(x, v) = n - 1$ بنابراین داریم $\text{wt}(x, u) = n - 2$ و $d(x, u) = 2$. به‌طور کلی در این حالت تعداد $\binom{n-2}{1} + 1 = \binom{n-1}{1}$ x مختلف وجود دارد. با استفاده از جدول (۱) و نتایج بالا و روش‌های مناسب برای شمارش حالات ممکن برای x با $d(x, u) < d(x, v)$ (یا $d(x, u) > d(x, v)$) و همچنین توجه به این نکته که $d(x, u) \neq d(x, v)$ می‌توان نتیجه گرفت تعداد تمامی x ها با خاصیت $d(x, u) < d(x, v)$ (یا $d(x, u) > d(x, v)$) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \dots + \\ \binom{n-1}{\frac{n}{2}-1}. \end{aligned} \quad \text{(III)}$$

به سادگی مشاهده می‌شود رابطه (III) برابر با سمت چپ رابطه (II) است. توجه کنید n زوج است.

بنابراین $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2}$ لذا تساوی زیر را خواهیم داشت:

$$|W_{u,v}| = |W_{v,u}| = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n-1}{i}$$

حال فرض کنید n فرد باشد. در این صورت طول بردارهای اختصاص یافته به هر رأس F_n (تعداد مکان‌ها در هر رأس)، عددی زوج است. بنابراین واضح است که متضاد هر رأس با وزن زوج (تعداد اها عددی زوج است) دارای وزن زوج است. به علاوه اگر رأس دارای وزن فرد

جدول (۲)

$\text{wt}(x, y)$	$d(x, y)$
0	0
1	1
2	2
\vdots	\vdots
$\frac{n-3}{2}$	$\frac{n-3}{2}$
$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{2}$
$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n-1}{2}$
$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{2}$
$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n-1}{2}$
$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{2}$
$\frac{n+3}{2}$	$\frac{n-3}{2}$
$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{2}$
\vdots	\vdots
$n-2$	2
$n-1$	1

از آنجایی که $\text{diam}(F_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ برای n های فرد داریم $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2}$ واضح است که F_n برای n های فرد نیز یک گراف خوش فاصله-متوازن است. بنابراین در هر دو حالت n زوج و فرد گراف مکعب فولدد F_n یک گراف خوش فاصله-متوازن است.

نتیجه گیری

در این مقاله، تعاریف گرافهای همینگ، مکعب فولدد، گرافهای خوش فاصله-در این مقاله، تعاریف گرافهای همینگ، مکعب فولدد، گرافهای خوش فاصله-متوازن و گرافهای خوش فاصله-متوازن یالی ارائه گردید. سپس ثابت شد گراف همینگ و گراف مکعب فولدد F_n یک گراف خوش فاصله-متوازن است. تعریف مجموعه $E_{u,v}$ بیان شد و با توجه به تعریف این مجموعه نشان داده شد که ابرمکعب Q_n یک گراف خوش فاصله-متوازن یالی است. در ادامه ثابت شد گراف مکعب فولدد F_n برای n های زوج یک گراف دوبخشی است و در هر دو حالت n زوج و فرد، یک گراف خوش فاصله-متوازن است به طوری که مقدار دقیق γ_V برای آن برابر است با

$$\gamma_V = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1} \binom{n-1}{i}.$$

balanced graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 227:21-28 (2017)

فهرست منابع

[11] Balakrishnan, K., Changat, M., Peterin, I., Špacapan, S., Šparl, P., & Subhamathi, A. R. Strongly distance-balanced graphs and graph products. *European Journal of Combinatorics*, 30(5): 10481053(2009)

[1] Djoković, D. Ž. Distance-preserving subgraphs of hypercubes. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 14(3): 263-267(1973)

[12] Faramarzi, H., Rahbarnia, F., & Tavakoli, M. Some results on distanced-balanced and strongly distanced-balanced graphs. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 9:(2017)

[2] Chepoi, V. D. Isometric subgraphs of Hamming graphs and d-convexity. *Cybernetics*, 24(1):6-11(1988)

[13] Tavakoli, M., YOUSEFI, A. H., & Ashrafi, A. R. Note on edge distance-balanced graphs, 1-6 (2012)

[3] Bandelt, H. J., & Chepoi, V. Metric graph theory and geometry: a survey. *Contemporary Mathematics*, 453:49-86 (2008)

[14] D. Eppstein, The lattice dimension of a graph, *European J. Combin.* 26:585–592 (2005)

[4] A. Heydari, B. TaeriSzeged index of TUC4C8 (S) nanotubes. *European J. Combin.*, 30:1134-1141 (2009)

[15] M. H. Khalifeh, H. Yousefi-Azari, A. R. Ashrafi, A matrix method for computing Szeged and vertex PI indices of join and composition of graphs, *Linear Algebra Appl.* 429:2702–2709 (2005)

[5] M.H. Khalifeh, H. Yousefi-Azari, A.R. AshrafiA matrix method for computing Szeged and vertex PI indices of join and composition of graphs. *Linear Algebra Appl.*, 429: 2702-2709 (2008)

[16] Zeinloo, S., Alaeiyan, M., & Karaj, I. Classification of Nicely Edge-Distance-Balanced Graphs. *Computer Science*, 14(1): 233-245 (2019)

[6] P. Khadikar, N. Deshpande, P. Kale, A. Dobrynin, I. Gutman, G. DömötörThe Szeged index and an analogy with the Wiener Index. *J. Chem. Inf. Comput. Sci.*, 35: 547-550 (1995)

[17] Faghani, M., Pourhadi, E., & Kharazi, H. On the new extension of distance-balanced graphs. *Transactions on Combinatorics*, 5(4):21-34 (2016)

[7] K. Handa, Bipartite graphs with balanced (a, b)-partitions. *Ars Combin.* 51:113–119(1999)

[18] Karimi, F., & Mirafzal, S. M. The spectrum of the hyper-star graphs and their line graphs. *Journal of New Researches in Mathematics*, 5(21): 125-132 (2019)

[8] J. Jerebic, S. Klavžar, D. F. Rall, Distance-balanced graphs, *Ann. Comb.* 12:71-79 (2008)

[19] K. Kutnar, Š. Miklavič, Nicely

[9] A. Ilić, S. Klavžar, M. Milanović, On distance-balanced graphs, *European J. Combin.* 31:733-737 (2010)

[10] Abedi, A., Alaeiyan, M., Hujdurović, A., & Kutnar, K. Quasi- λ -distance-

distance-balanced graphs, European J. Combin. 39: 57–67(2014)

[20] R. F. Bailey, P. J. Cameron, Base size, metric dimension and other invariants of groups and graphs, Bull. Lond.Math. Soc. 43 (2):209-242 (2011)

[21] A. Hora, N. Obata, Quantum Probability and Spectral Analysis of Graphs, Theoretical and Mathematical Physics. Springer, Berlin, Heidelberg, (2007)

[22] van Bon, J. Finite primitive distance-transitive graphs. European Journal of Combinatorics, 28(2):517-532 (2007)

