



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

میانگین پذیری ضعیف ضرب‌های تانسوری وابسته به هم‌ریختی‌ها

عصمت قریشی مدینه^۱، امین محمودی کبری^{۲*}

^(۲۰۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکز، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۸/۱۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۱۲/۰۸

چکیده

در این مقاله ارتباط میان هم‌ریختی‌های جبرهای باناخ A و B و هم‌ریختی‌های جبرهای باناخ $(A \widehat{\otimes} B)$ را مورد مطالعه قرار داده و سپس به بررسی رابطه بین σ -میانگین‌پذیری ضعیف A و B و σ -میانگین‌پذیری ضعیف $A \widehat{\otimes} B$ می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: σ -میانگین‌پذیر ضعیف، σ -قطر تقریبی کراندار، σ -اشتقاق، ضرب تانسوری.

۱- مقدمه

مدولی زیر است:

$$a.(b \otimes c) = ab \otimes c$$

و

$$(b \otimes c).a = b \otimes ca \quad (a, b, c \in \mathcal{A})$$

فرض کنید \mathcal{A} یک جبر باناخ باشد و $\sigma_{\mathcal{A}} \in Hom(\mathcal{A})$ یک تور کراندار $(u_{\alpha}) \subset \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A}$ را یک $-\sigma_{\mathcal{A}}$ قطر تقریبی کراندار برای \mathcal{A} گوئیم هرگاه برای هر $a \in \mathcal{A}$ داشته باشیم:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathcal{A}}(a) \cdot u_{\alpha} - u_{\alpha} \cdot \sigma_{\mathcal{A}}(a) &\rightarrow 0 \\ \pi(u_{\alpha})\sigma_{\mathcal{A}}(a) &\rightarrow \sigma_{\mathcal{A}}(a) \end{aligned}$$

یک جبر باناخ \mathcal{A} را اساسی می‌گوئیم هرگاه $\mathcal{A}^2 = \{ab : a \text{ و } b \in \mathcal{A}\}$ چگال باشد.

فرض کنید \mathcal{A} یک جبر باناخ باشد. جبر باناخ $\mathcal{A}^{\#} = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$ است و نرم روی آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|a + \alpha\| = \|a\| + |\alpha| \quad (\forall a \in \mathcal{A} \text{ و } \alpha \in \mathbb{C})$$

فرض کنید \mathcal{A} یک جبر باناخ جابجایی و I یک ایده‌آل بسته در \mathcal{A} باشد و $\sigma_{\mathcal{A}} \in Hom(\mathcal{A})$ دارای برد چگال باشد. اگر \mathcal{A} ، $-\sigma_{\mathcal{A}}$ میانگین‌پذیر ضعیف باشد و $\overline{\sigma_{\mathcal{A}}(I)} = I$ ، قریشی و همکاران $-\sigma_{\mathcal{A}}$ میانگین‌پذیری ضعیف I را مورد بررسی قرار دادند [۳].

۲- مفاهیم و تعاریف

در این بخش، برخی تعاریف که در ادامه مقاله استفاده خواهند شد را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱-۲: فرض کنید \mathcal{A} و \mathcal{B} جبرهای باناخ باشند. فرض کنید $a_0 \in \mathcal{A}$ و $b_0 \in \mathcal{B}$ عضوی خودتوان باشند. نگاشت‌های $S_1: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ با ضابطه $S_1(a) = a \otimes b_0$ و $S_2: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ با

مفهوم میانگین‌پذیری جبر باناخ توسط جانسون بیان شده است [۴]. فرض کنید \mathcal{A} و \mathcal{B} جبرهای باناخ باشند مفهوم ضعیفا میانگین‌پذیری ضرب‌های تانسوری $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ را یزدان پناه مورد بحث و بررسی قرار داد [۸].

فرض کنید \mathcal{A} یک جبر باناخ باشد، فضای همه همریختی‌های پیوسته از \mathcal{A} به داخل \mathcal{A} را با $Hom(\mathcal{A})$ نشان می‌دهیم. فرض کنید \mathcal{A} یک جبر باناخ باشد و E یک باناخ \mathcal{A} - دو مدول باشد و $\sigma_{\mathcal{A}} \in Hom(\mathcal{A})$ باشد. نگاشت خطی و کراندار $D: \mathcal{A} \rightarrow E$ را $-\sigma_{\mathcal{A}}$ اشتقاق گوئیم هرگاه برای هر $b \in \mathcal{A}$ داشته باشیم [۵ و ۶]:

$$D(ab) = D(a) \cdot \sigma_{\mathcal{A}}(b) + \sigma_{\mathcal{A}}(a) \cdot D(b)$$

و به ازای هر $x \in E$ ، نگاشت $\delta_x^a: \mathcal{A} \rightarrow E$ که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_x^a = \sigma_{\mathcal{A}}(a) \cdot x - x \cdot \sigma_{\mathcal{A}}(a)$$

را یک $-\sigma_{\mathcal{A}}$ اشتقاق درونی (القا شده به وسیله x) می‌گوئیم.

یک جبر باناخ \mathcal{A} را $-\sigma_{\mathcal{A}}$ انقباض‌پذیر ($-\sigma_{\mathcal{A}}$ میانگین‌پذیر) می‌نامیم هرگاه به ازای هر باناخ \mathcal{A} - دو مدول E ، هر $-\sigma_{\mathcal{A}}$ اشتقاق $D: \mathcal{A} \rightarrow E$ ($D: \mathcal{A} \rightarrow E^*$)، $-\sigma_{\mathcal{A}}$ اشتقاق درونی باشد.

یزدان پناه و همکاران میانگین‌پذیری ضعیف و $-\sigma_{\mathcal{A}}$ را مورد بررسی قرار دادند [۷].

یک جبر باناخ \mathcal{A} را $-\sigma_{\mathcal{A}}$ میانگین‌پذیر ضعیف گوئیم، هرگاه برای هر باناخ \mathcal{A} - دو مدول \mathcal{A} و هر $-\sigma_{\mathcal{A}}$ اشتقاق $D: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$ ، $-\sigma_{\mathcal{A}}$ اشتقاق درونی باشد. نگاشت $\pi: \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ یک نگاشت ضربی با ضابطه زیر است:

$$\pi(a \otimes b) = ab \quad (a, b \in \mathcal{A})$$

برای یک جبر باناخ \mathcal{A} حاصل ضرب تانسوری $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{A}$ یک باناخ \mathcal{A} - دو مدول با ضرب‌های

همریختی‌های $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ و همریختی‌های جبرهای باناخ \mathcal{A} و \mathcal{B} را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

با ضابطه $S_2(b) = a_0 \otimes b$ را برای $a \in \mathcal{A}$ و $b \in \mathcal{B}$ تعریف می‌کنیم.

تذکر ۱-۳: فرض کنید \mathcal{A} و \mathcal{B} جبرهای باناخ با عضوهای خودتوان $a_0 \in \mathcal{A}$ و $b_0 \in \mathcal{B}$ باشند. اگر $\tau \in \text{Hom}(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})$ دارای برد چگال باشد، آنگاه همریختی‌های $\tau_{\mathcal{A}} \in \text{Hom}(\mathcal{A})$ و $\tau_{\mathcal{B}} \in \text{Hom}(\mathcal{B})$ دارای برد چگال هستند. که در آن $\tau_{\mathcal{A}} = T_1 \tau S_1$ و $\tau_{\mathcal{B}} = T_2 \tau S_2$.

تعریف ۲-۲: فرض کنید \mathcal{A} و \mathcal{B} جبرهای باناخ باشند. همریختی‌های پیوسته و پوشای $T_1: \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ با ضابطه $T_1(a \otimes b) = a$ و $T_2: \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ با ضابطه $T_2(a \otimes b) = b$ را برای هر $a \in \mathcal{A}$ و $b \in \mathcal{B}$ تعریف می‌کنیم.

قضیه ۱-۳: فرض کنید \mathcal{A} و \mathcal{B} جبرهای باناخ باشند. فرض کنید $a_0 \in \mathcal{A}$ و $b_0 \in \mathcal{B}$ عضوهای خودتوان باشند و $\tau \in \text{Hom}(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})$ دارای برد چگال باشد. اگر $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ ، $-\tau$ میانگین‌پذیر ضعیف باشد آنگاه \mathcal{A} و \mathcal{B} هر دو اساسی است.

تعریف ۲-۳: فرض کنید \mathcal{A} و \mathcal{B} جبرهای باناخ باشند. برای هر همریختی $\tau \in \text{Hom}(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})$ همریختی $\tau_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ با ضابطه $\tau_{\mathcal{A}} = T_1 \tau S_1$ و همریختی $\tau_{\mathcal{B}}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ با ضابطه $\tau_{\mathcal{B}} = T_2 \tau S_2$ را در نظر می‌گیریم.

برهان. فرض کنید \mathcal{A} ، اساسی نباشد. یعنی: $\overline{\text{span}} \mathcal{A} \cdot \mathcal{A} \neq \mathcal{A}$. ناصفر $a^* \in \mathcal{A}^*$ وجود دارد به طوری که: $\langle \tau_{\mathcal{A}}(aa'), a^* \rangle = 0$ و $(a, a' \in \mathcal{A})$ از رابطه فوق واضح است که برای هر $a, a^* \in \mathcal{A}$.

تعریف ۲-۴: فرض کنید \mathcal{A} و \mathcal{B} جبرهای باناخ باشند برای همریختی‌های $\sigma_{\mathcal{A}} \in \text{Hom}(\mathcal{A})$ و $\sigma_{\mathcal{B}} \in \text{Hom}(\mathcal{B})$ همریختی $\sigma_{\mathcal{A}} \otimes \sigma_{\mathcal{B}} \in \text{Hom}(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $\sigma_{\mathcal{A}} \otimes \sigma_{\mathcal{B}}(a \otimes b) = \sigma_{\mathcal{A}}(a) \otimes \sigma_{\mathcal{B}}(b)$ ($b \in \mathcal{B}$ و $a \in \mathcal{A}$)

فرض کنید b^* عضو ناصفری از \mathcal{B}^* باشد. نگاشت خطی کراندار $a^* \otimes b^*$ روی $\mathcal{A}^* \widehat{\otimes} \mathcal{B}^*$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

این مقاله تعمیمی از مرجع [۸] با موضوع $-\sigma$ میانگین‌پذیری ضعیف ضرب‌های تانسوری جبرهای باناخ است. در این مقاله نشان می‌دهیم که اگر $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ ، $-\tau$ میانگین‌پذیر ضعیف باشد، آنگاه \mathcal{A} اساسی است [۳-۱].

$$\langle \tau(a \otimes b), a^* \otimes b^* \rangle = \langle \tau_{\mathcal{A}}(a), a^* \rangle \langle \tau_{\mathcal{B}}(b), b^* \rangle$$

همچنین اگر $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ ، $-\tau$ میانگین‌پذیر ضعیف باشد، آنگاه \mathcal{A} ، $-\tau_{\mathcal{A}}$ میانگین‌پذیر ضعیف است [۳]. سرانجام ثابت می‌کنیم که اگر $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ ، $-\tau$ میانگین‌پذیر ضعیف باشد، آنگاه \mathcal{A} ، $-\tau_{\mathcal{A}}$ میانگین‌پذیر ضعیف است [۵].

نگاشت $D: (\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^*$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$D(m) = \langle \tau(m), a^* \otimes b^* \rangle a^* \otimes b^*$$

این نگاشت، برای هر $a, a' \in \mathcal{A}$ و $b, b' \in \mathcal{B}$ کراندار است. به آسانی می‌توان نشان داد که D ، $-\tau$ اشتقاق است. زیرا:

$$D(a \otimes b \cdot a' \otimes b') = \langle \tau(aa' \otimes bb'), a^* \otimes b^* \rangle a^* \otimes b^*$$

۳- میانگین‌پذیری ضعیف $-\sigma$

در این بخش ارتباط میان میانگین‌پذیری ضعیف

فرض کنید نگاشت $d: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$ ، $\tau_{\mathcal{A}} -$ اشتقاق باشد، نگاشت $D: (\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^*$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \langle \tau(a' \otimes b'), D(a \otimes b) \rangle \\ &= \langle \tau_{\mathcal{A}}(a'), d(a) \rangle \langle \tau_{\mathcal{B}}(b'), \tau_{\mathcal{B}}(b) b^* \rangle \\ & \text{خطی کراندار است و برای هر } D \text{ بنابراین نگاشت} \\ & \quad b', b_1, b_2 \in \mathcal{B} \text{ و } a', a_1, a_2 \in \mathcal{A} \text{ داریم:} \\ & \langle \tau(a' \otimes b'), D(a_1 \otimes b_1 + a_2 \otimes b_2) \rangle = \\ & \langle \tau_{\mathcal{A}}(a'), d(a_1 + a_2) \rangle \langle \tau_{\mathcal{B}}(b'), \tau_{\mathcal{B}}(b_1 + b_2) b^* \rangle = \\ & \langle \tau_{\mathcal{A}}(a'), \tau_{\mathcal{A}}(a_1) + \tau_{\mathcal{A}}(a_2) \rangle \langle \tau_{\mathcal{B}}(b'), \tau_{\mathcal{B}}(b_1 + b_2) b^* \rangle = \\ & \langle \tau_{\mathcal{A}}(a'), d(a_1) \rangle \langle \tau_{\mathcal{B}}(b'), \tau_{\mathcal{B}}(b_1) b^* \rangle + \\ & \langle \tau_{\mathcal{A}}(a'), d(a_2) \rangle \langle \tau_{\mathcal{B}}(b'), \tau_{\mathcal{B}}(b_2) b^* \rangle = \\ & \langle \tau_{\mathcal{A}}(a_1 a_2'), d(a_1) \rangle \langle \tau_{\mathcal{B}}(b_2) \tau_{\mathcal{B}}(b_1') b^* \rangle + \\ & \langle \tau_{\mathcal{A}}(a_2 a_1'), d(a_2) \rangle \langle \tau_{\mathcal{B}}(b_1) \tau_{\mathcal{B}}(b_2') b^* \rangle \\ &= \langle \tau(a' \otimes b'), \tau(a_1 \otimes b_1) \cdot D(a_2 \otimes b_2) \rangle + \langle \tau(a' \otimes b'), D(a_1 \otimes b_1) \cdot \tau(a_2 \otimes b_2) \rangle \end{aligned}$$

بنابراین D ، $\tau -$ اشتقاق است. پس وجود دارد $D = \delta_{\varphi}$ که $\varphi \in (\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^*$ بعلاوه a^* روی $\tau_{\mathcal{A}}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a^* \tau_{\mathcal{A}}(a) = \varphi \tau(a \otimes b b')$$

برای هر $a \in \mathcal{A}$ و $b, b' \in \mathcal{B}$ ، a^* یک تابع خطی کراندار است و برای هر $a, a' \in \mathcal{A}$ ، داریم:

$$\begin{aligned} & \langle \tau_{\mathcal{A}}(a'), d(a) \rangle \\ &= \langle \tau_{\mathcal{A}}(a'), d(a) \rangle \langle \tau_{\mathcal{B}}(b b'), b^* \rangle \\ &= \langle \tau_{\mathcal{A}}(a') \otimes \tau_{\mathcal{B}}(b), D(a \otimes b') \rangle \\ &= \langle \tau_{\mathcal{A}}(a') \otimes \tau_{\mathcal{B}}(b), \tau(a \otimes b') \cdot \varphi - \varphi \cdot \tau(a \otimes b') \rangle \\ &= \langle \tau_{\mathcal{A}}(a') \cdot \tau_{\mathcal{A}}(a) \otimes \tau_{\mathcal{B}}(b) \cdot \tau_{\mathcal{B}}(b'), \varphi \rangle \\ & \quad - \langle \tau_{\mathcal{A}}(a') \cdot \tau_{\mathcal{A}}(a) \otimes \tau_{\mathcal{B}}(b) \cdot \tau_{\mathcal{B}}(b'), \varphi \rangle \\ &= \langle \tau_{\mathcal{A}}(a') \cdot \tau_{\mathcal{A}}(a), a^* \rangle - \langle \sigma_{\mathcal{A}}(a) \cdot \tau_{\mathcal{A}}(a'), a^* \rangle \\ &= \langle \tau_{\mathcal{A}}(a') \cdot \tau_{\mathcal{A}}(a) - \tau_{\mathcal{A}}(a) \cdot \tau_{\mathcal{A}}(a'), a^* \rangle \\ &= \langle \tau_{\mathcal{A}}(a'), \delta_{a^*}(a) \rangle. \end{aligned}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم d روی $\tau_{\mathcal{A}}$ یک $\tau_{\mathcal{A}} -$ اشتقاق درونی است. لذا \mathcal{A} ، $\tau_{\mathcal{A}} -$ میانگین‌پذیر ضعیف است.

$$= \langle \tau_{\mathcal{A}}(a a'), a^* \rangle \langle \tau_{\mathcal{B}}(b b'), b^* \rangle = 0$$

از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} & \tau(a \otimes b) \cdot D(a' \otimes b') + D(a \otimes b) \cdot \tau(a' \otimes b') \\ &= \tau(a \otimes b) \langle \tau(a' \otimes b'), a^* \otimes b^* \rangle a^* \otimes b^* + \langle \tau(a \otimes b), a^* \otimes b^* \rangle a^* \otimes b^* \cdot \tau(a' \otimes b') \\ &= \langle \tau_{\mathcal{A}}(a'), a^* \rangle \langle \tau_{\mathcal{B}}(b'), b^* \rangle \tau_{\mathcal{A}}(a) a^* \otimes \tau_{\mathcal{B}}(b) b^* \langle \tau_{\mathcal{A}}(a), a^* \rangle \langle \tau_{\mathcal{B}}(b), b^* \rangle a^* \tau_{\mathcal{A}}(a') \otimes b^* \tau_{\mathcal{B}}(b') = 0 \end{aligned}$$

بنابراین D ، $\tau -$ اشتقاق است، پس $\varphi \in (\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^*$ وجود دارد به طوری که:

$$\begin{aligned} & D = \delta_{\varphi} \\ & 0 = \langle \tau(a \otimes b), \tau(a \otimes b) \cdot \varphi - \varphi \cdot \tau(a \otimes b) \rangle \\ &= \langle \tau(a \otimes b), D(a \otimes b) \rangle \\ &= \langle \tau(a \otimes b), \tau(a \otimes b) \cdot a^* \otimes b^* \rangle a^* \otimes b^* \\ &= \langle \tau(a \otimes b), a^* \otimes b^* \rangle^2 \\ &= (\langle \tau_{\mathcal{A}}(a), a^* \rangle \langle \tau_{\mathcal{B}}(b), b^* \rangle)^2 \end{aligned}$$

حال $b \in \mathcal{B}$ را چنان اختیار می‌کنیم که $\tau_{\mathcal{B}}(b) \neq 0$ پس $\langle \tau_{\mathcal{A}}(a), a^* \rangle = 0$ برای هر $a \in \mathcal{A}$ آنگاه $a^* = 0$ روی $\tau_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ از آنجا که $\tau_{\mathcal{A}}$ دارای برد چگال است پس a^* صفر است و این تناقض است.

به طور مشابه می‌توان نشان داد که \mathcal{B} اساسی است.

قضیه ۲-۳: فرض کنید \mathcal{A} و \mathcal{B} جبرهای باناخ باشند. فرض کنید $a_0 \in \mathcal{A}$ و $b_0 \in \mathcal{B}$ عضوهای خودتوان باشند و $\tau \in \text{Hom}(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})$ دارای برد چگال باشد. اگر $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ ، $\tau -$ میانگین‌پذیر ضعیف باشد آنگاه $(\mathcal{B}, \tau_{\mathcal{B}})$ ، $\tau_{\mathcal{A}} -$ میانگین‌پذیر ضعیف است.

برهان. فرض کنید b^* عضو ناصفر \mathcal{B}^* باشد. طبق قضیه ۱-۳، وجود دارد $b, b' \in \mathcal{B}$ به طوری که:

$$\langle \tau_{\mathcal{B}}(b b'), b^* \rangle = 1$$

مثال ۳-۱: فرض کنید X یک فضای هاسدورف فشرده و \mathcal{A} یک جبر باناخ باشد. $C(X, \mathcal{A})$ یک جبر باناخ است [۸]. اگر $\tau \in \text{Hom}(\mathcal{A} \widehat{\otimes} C(X, \mathcal{A}))$ دارای برد چگال باشد. اگر $\tau \in \text{Hom}(\mathcal{A} \widehat{\otimes} C(X, \mathcal{A}))$ میانگین پذیر ضعیف باشد، آنگاه بنا به قضیه ۳-۱، $C(X, \mathcal{A})$ اساسی است.

تذکر ۳-۲: فرض کنید \mathcal{A} و \mathcal{B} جبرهای باناخ باشند. یک همریختی $\sigma_{\mathcal{A}} \in \text{Hom}(\mathcal{A})$ را می توان به یک همریختی $\sigma_{\mathcal{A}}^{\#} \in \text{Hom}(\mathcal{A}^{\#})$ توسیع داد، به طوری که:

مثال ۳-۲: فرض کنید \mathcal{A} و \mathcal{B} جبرهای باناخ باشند. یک همریختی $\sigma_{\mathcal{A}} \in \text{Hom}(\mathcal{A})$ را می توان به یک همریختی $\sigma_{\mathcal{A}}^{\#} \in \text{Hom}(\mathcal{A}^{\#})$ توسیع داد، به طوری که:

تذکر ۳-۲: فرض کنید \mathcal{A} و \mathcal{B} جبرهای باناخ باشند. یک همریختی $\sigma_{\mathcal{A}} \in \text{Hom}(\mathcal{A})$ را می توان به یک همریختی $\sigma_{\mathcal{A}}^{\#} \in \text{Hom}(\mathcal{A}^{\#})$ توسیع داد، به طوری که:

$$\sigma_{\mathcal{A}}^{\#}(a + \lambda e_{\mathcal{A}}) = \sigma_{\mathcal{A}}(a) + \lambda e_{\mathcal{A}} \quad (a \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C})$$

که در آن $e_{\mathcal{A}}$ عضو همانی $\mathcal{A}^{\#}$ است.

به طور مشابه، یک همریختی $\sigma_{\mathcal{B}} \in \text{Hom}(\mathcal{B})$ را نیز می توان به یک همریختی $\sigma_{\mathcal{B}}^{\#} \in \text{Hom}(\mathcal{B}^{\#})$ توسیع داد. بنابراین برای $\sigma \in \text{Hom}(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})$ می توان یک همریختی $\sigma^{\#} \in \text{Hom}(\mathcal{A}^{\#} \widehat{\otimes} \mathcal{B}^{\#})$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\sigma^{\#}((a + \lambda e_{\mathcal{A}}) \otimes (b + \lambda e_{\mathcal{B}})) = \sigma_{\mathcal{A}}^{\#}(a + \lambda e_{\mathcal{A}}) \otimes \sigma_{\mathcal{B}}^{\#}(b + \lambda e_{\mathcal{B}}) \quad (a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B})$$

قضیه ۳-۳: فرض کنید \mathcal{A} و \mathcal{B} جبرهای باناخ باشند. فرض کنید $\sigma_{\mathcal{A}} \in \text{Hom}(\mathcal{A})$ و $\sigma_{\mathcal{B}} \in \text{Hom}(\mathcal{B})$ دارای برد چگال باشند. اگر $\sigma_{\mathcal{A}} - \sigma_{\mathcal{B}}$ میانگین پذیر ضعیف و $\sigma_{\mathcal{A}} - \sigma_{\mathcal{B}}$ میانگین پذیر ضعیف باشند، آنگاه $\sigma_{\mathcal{A}} \otimes \sigma_{\mathcal{B}}$ میانگین پذیر ضعیف است. که در آن $\sigma_{\mathcal{A}} \otimes \sigma_{\mathcal{B}} \in \text{Hom}(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})$ برای هر $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$ تعریف می شود.

برهان. فرض کنید E یک باناخ $\mathcal{A}^{\#} \widehat{\otimes} \mathcal{B}^{\#}$ دو مدول باشد. فرض کنید $D \in Z_{\sigma}^1(\mathcal{A}^{\#} \widehat{\otimes} \mathcal{B}^{\#}, E)$ جایی که

به سادگی می توان نشان داد:

$$D|(\mathcal{A}^{\#} \otimes e_{\mathcal{B}}) \in Z_{\sigma}^1(\mathcal{A}^{\#}, E)$$

$\mathcal{A}^{\#}, -\sigma_{\mathcal{A}}^{\#}$ میانگین پذیر ضعیف است [۶] و بنابراین $D|(e_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{B}^{\#}) = 0$ در نتیجه $D|(\mathcal{A}^{\#} \otimes e_{\mathcal{B}}) = 0$ از این رو $D = 0$ است لذا $\mathcal{A}^{\#} \widehat{\otimes} \mathcal{B}^{\#}, -\sigma^{\#}$ ضعیفا میانگین پذیر است.

اکنون از [قضیه ۶، مرجع ۷] نتیجه می گیریم که:

$$\overline{\mathcal{B}^2} = \mathcal{B} \text{ و } \overline{\mathcal{A}^2} = \mathcal{A}$$

در ادامه فرض کنید $I = \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ یک ایده آل بسته در $\mathcal{A}^{\#} \widehat{\otimes} \mathcal{B}^{\#}$ است، آنگاه طبق [۳، گزاره ۳] می توان نتیجه گرفت که، $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}, -\sigma$ میانگین پذیر ضعیف است. قضیه زیر عکس قضیه ۳-۳ است.

قضیه ۳-۴: فرض کنید \mathcal{A} و \mathcal{B} جبرهای باناخ باشند. فرض کنید $a_0 \in \mathcal{A}$ و $b_0 \in \mathcal{B}$ عضوهای خودتوان باشند و $\tau \in \text{Hom}(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})$ دارای برد چگال باشد. اگر $\tau \in \text{Hom}(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})$ میانگین پذیر ضعیف باشد آنگاه $\tau_{\mathcal{A}}, -\tau$ میانگین پذیر ضعیف و $\tau_{\mathcal{B}}, -\tau$ میانگین پذیر ضعیف است.

برهان. اثبات این قضیه با استفاده از قضیه ۳.۲ بدست می آید.

تذکر ۳-۳: یک مشخصه ϕ روی جبر باناخ \mathcal{A} یک تابع خطی ناصفر است به طوری که برای هر $a, a' \in \mathcal{A}$ داریم:

$$\phi(aa') = \phi(a)\phi(a')$$

مجموعه همه مشخصه های \mathcal{A} را با $\phi_{\mathcal{A}}$ نشان

$$\langle \tau_{\mathcal{A}}(a'a) - \tau_{\mathcal{A}}(aa') \otimes \tau_{\mathcal{B}}(c_0^2) \cdot \psi \rangle \\ = \langle \tau_{\mathcal{A}}(a'a) - \tau_{\mathcal{A}}(aa') \cdot a^* \rangle$$

می‌دهیم، طبق [۳، ۱۶، قضیه ۱]، $\phi_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}^*$ است. قضیه زیر مهمترین قضیه این مقاله است.

آنگاه $d = \delta_{\mathcal{A}}^*(a)$ در نتیجه \mathcal{A} ، $-\tau_{\mathcal{A}}$ میانگین‌پذیر ضعیف است.

فرض کنیم V یک فضای برداری و $ball(V) = \{0 \neq f \in V: \|f\| \leq 1\}$ یک عمل ضرب روی V به صورت $ab=f(a)b$ ، $a, b \in V$ را تعریف می‌کنیم. جبر باناخ V مجهز شده به این ضرب را با V_f نمایش می‌دهیم. به آسانی می‌توان نشان داد که فضای مشخصه‌های V_f تک عضوی و فقط شامل f است، یعنی $\{f\} \neq \phi_{V_f}$. برای مطالعه خواص بیشتر V_f به [۹] مراجعه کنید. بدیهی است که هر عضو $a \in V_f$ با شرط $f(a)=1$ یک عضو خودتوان است.

مثال ۲-۳: فرض کنید \mathcal{A} یک جبر باناخ با یک عضو خودتوان باشد، آنگاه $\tau \in \text{Hom}(\mathcal{A} \widehat{\otimes} V_f)$ اگر $\tau \in \text{Hom}(\mathcal{A} \widehat{\otimes} V_f)$ میانگین‌پذیر ضعیف باشد آنگاه بنا به قضیه ۳-۵، \mathcal{A} نیز $-\tau_{\mathcal{A}}$ میانگین‌پذیر ضعیف است.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله با معرفی همریختی‌های جبرهای باناخ \mathcal{A} و \mathcal{B} ارتباط آن‌ها را با همریختی‌های جبر باناخ $(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})$ را مورد مطالعه قرار دادیم. سپس با ارائه قضایایی رابطه بین σ - میانگین‌پذیری ضعیف \mathcal{A} و \mathcal{B} - σ میانگین‌پذیری ضعیف $(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})$ را اثبات کردیم. همچنین نشان دادیم، اگر \mathcal{A} و \mathcal{B} جبرهای باناخ باشند و $a_0 \in \mathcal{A}$ و $b_0 \in \mathcal{B}$ عضوهای خودتوان باشند و $\tau \in \text{Hom}(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})$ دارای برد چگال باشد و $\phi_{\mathcal{B}} \neq \emptyset$ ، اگر $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ ، $-\tau_{\mathcal{A}}$ میانگین‌پذیر ضعیف باشد آنگاه \mathcal{A} ، $-\tau_{\mathcal{A}}$ میانگین‌پذیر ضعیف است.

قضیه ۳-۵: فرض کنید \mathcal{A} و \mathcal{B} جبرهای باناخ باشند. فرض کنید $a_0 \in \mathcal{A}$ و $b_0 \in \mathcal{B}$ عضوهای خودتوان باشند و $\tau \in \text{Hom}(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})$ دارای برد چگال باشد و $\phi_{\mathcal{B}} \neq \emptyset$. اگر $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ ، $-\tau_{\mathcal{A}}$ میانگین‌پذیر ضعیف باشد آنگاه \mathcal{A} ، $-\tau_{\mathcal{A}}$ میانگین‌پذیر ضعیف است.

برهان. $\varphi \in \phi_{\mathcal{B}}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $c_0 \in \mathcal{B}$ به طوری که $\varphi(c_0) = 1$. اکنون فرض کنید $d: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$ نگاشت d ، $-\tau_{\mathcal{A}}$ اشتقاق است. نگاشت $D: (\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^*$ را با ضابطه زیر در نظر می‌گیریم:

$$\langle \tau(a' \otimes b') \cdot D(a \otimes b) \rangle = \langle \tau_{\mathcal{A}}(a') \cdot d(a) \rangle \varphi(bb')$$

D ، یک نگاشت خطی کراندار است و برای هر $a', a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ و $b', b_1, b_2 \in \mathcal{B}$ داریم:

$$\langle \tau(a' \otimes b') \cdot \tau(a_1 \otimes b_1) \cdot D(a_2 \otimes b_2) + D(a_1 \otimes b_1) \cdot \tau(a_2 \otimes b_2) \rangle = \langle \tau_{\mathcal{A}}(a'a_1) \otimes \tau_{\mathcal{B}}(b'b_1) \cdot D(a_2 \otimes b_2) \rangle + \langle \tau_{\mathcal{A}}(a_2a') \otimes \tau_{\mathcal{B}}(b_2b') \cdot D(a_1 \otimes b_1) \rangle = \langle (\tau_{\mathcal{A}}(a'a_1) \cdot d(a_2)) + (\tau_{\mathcal{A}}(a_2a') \cdot d(a_1)) \rangle \varphi(b'b_1b_2) = \langle \tau(a' \otimes b') \cdot D(a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2) \rangle$$

نگاشت D ، $-\tau$ اشتقاق است. بنابراین وجود دارد $D = \delta_{\psi}$ که $\psi \in (\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^*$ به طوری که: در ادامه فرض کنید $a^*: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ و تعریف می‌کنیم:

$$a^* \tau_{\mathcal{A}}(a) = \psi(\tau_{\mathcal{A}}(a) \otimes \tau_{\mathcal{B}}(c_0^2))$$

لذا برای هر $a, a' \in \mathcal{A}$ نتیجه می‌گیریم:

$$\langle \tau_{\mathcal{A}}(a') \cdot d(a) \rangle = \langle \tau_{\mathcal{A}}(a') \cdot d(a) \rangle \varphi(c_0^2) = \langle \tau_{\mathcal{A}}(a') \otimes \tau_{\mathcal{B}}(c_0) \cdot D(a \otimes c_0) \rangle = \langle \tau_{\mathcal{A}}(a') \otimes \tau_{\mathcal{B}}(c_0) \cdot \tau(a \otimes c_0) \cdot \psi - \psi \cdot \tau(a \otimes c_0) \rangle =$$

فهرست مراجع

- [1] F. F. Bonsall, Duncan, *Complete normed Algebras*, Springer-Verlag, New York, 1973.
- [2] H. D. Dales, *Banach Algebras and Automatic continuity*, London Mathematical Society Monographs, **24**, Clarendon press, Oxford, 2000.
- [3] S. Ghoraiishi, A. Mahmoodi, A. R. Medghalchi, *Amenability-like properties of $C(X.A)$* , Filomat. **32**, no 8, (2018), 2701-2706.
- [4] B. E. Johnson, *Cohomology in Banach Algebras*. Mem. Amer. Math. Soc. **127**, 1972.
- [5] M. Mirzavaziri, M. S. Moslehian, *σ -Derivations in Banach algebras*, Bull. Iranian Math. Soc. **32** (1) (2006), 65-78.
- [6] M. Mirzavaziri, M. S. Moslehian, *σ -amenability of Banach algebras*, Southeast Asian Bull. Math. **33** (2009), 89-99.
- [7] T. Yazdanpanah, I. Moazzami Zadeh, *σ -weak Amenability of Banach Algebras*. Int. J. Nonlinear Anal. Appl. **4**, no. 1, (2013), 66-73.
- [8] T. Yazdanpanah, *Weak amenability of tensor product of Banach algebras*, The Publishing House Of The Romanian Academy **13**, no. 4, (2012), 310-313.
- [9] M. Ziamanesh, B. Shojaee, A. Mahmoodi, *Essential amenability of dual Banach algebras*, Bull. Aust. Math. Soc., **100**, (2019), 479-488

