دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی، خرداد و تیر ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

JNRM

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پیچیدگی توپولوژیکی و رسته لوسترنیک اشنایرلمن از منیفلدها

فضّه اختری‌فر[1*]، محمدعلی اسدی گلمانخانه[2]

[(۱و۲)] گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۴/۲۶   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۲/۱۴

چکیده

رسته لوسترنیک اشنایرلمن و پیچیدگی توپولوژیکی پایاهای مهم از فضاهای توپولوژیک هستند که امروزه ریاضیدانان بسیاری علاقه‌مند به تحقیق و پژوهش در این زمینه می‌باشند. در این مقاله با پرداختن به اهمیت این دو مفهوم و کاربردهای آن برای شناخت برخی فضاها بویژه منیفلدها، رسته لوسترنیک اشنایرلمن و پیچیدگی توپولوژیکی برخی از آن فضاها را به ترتیب با استفاده از طول ناوی و طول مقسوم علیه‌های صفر محاسبه خواهیم کرد. از جمله منیفلدهایی که به محاسبه پیچیدگی توپولوژیکی و رسته لوسترنیک اشنایرلمن آنها خواهیم پرداخت، برخی منیفلدهای گرسمن همچون $G_2(\mathbb{R}^4)$ و حاصلضرب منیفلدها بویژه حاصلضرب فضاهای تصویری حقیقی و ضرب گوه‌ای آنها خواهد بود. فرض کنیم $TC(X)$ پیچیدگی توپولوژیکی فضای توپولوژیکی مسیر همبند X و $cat(X)$ رسته لوسترنیک اشنایرلمن از فضای توپولوژیکی X را نشان دهد. در محاسبه دقیق این عددها ابتدا به محاسبه کران‌های بالا و پایین از فضاهای مورد نظر خواهیم پرداخت و تلاش خواهیم کرد با روش‌ها و تکنیک‌هایی عددهای آن کران‌ها را به هم نزدیک‌تر کرده و عدد دقیق آن را بدست آوریم. در این مقاله طول ناوی و طول مقسوم علیه‌های صفر یک فضا به‌عنوان کران‌های پایین جهت محاسبه‌ی TC و cat ابزار محاسباتی مهمی برای محاسبه این عددها می‌باشند.

واژه‌های کلیدی: طول ناوی، ضرب گوه‌ای، رسته قوی، طول مخروطی.

* عهده‌دار مکاتبات:
Email: fezehakhtarie@gmail.com

۱- مقدمه

رسته لوسترنیک اشنایرلمن ابتدا توسط لوسترنیک و اشنایرلمن در سال ۱۹۳۴ به‌عنوان یک پایای جدیدی از منیفلدها معرفی شد که هدف از آن بدست آوردن یک کران پایین روی نقاط بحرانی از هر تابع هموار روی منیفلدها می‌باشد. در قضیه ۱,۱۵ از مرجع [۱] به عنوان قضیه مشهور لوسترنیک اشنایرلمن، به معرفی کامل این پایا روی منیفلدها پرداخته شده است، به عبارت دیگر این قضیه تعداد نقاط بحرانی از توابع هموار را با رسته پایا ارزیابی می‌کند. در محاسبه این عدد به مفاهیم توپولوژیکی از جمله طول ناوی فضای مورد نظر نیاز است و از طرفی بعد فضا به‌عنوان کران بالا برای این رسته، نقش مهمی جهت ارائه دقیق آن عدد ایفا می‌کند. مفهوم پیچیدگی توپولوژیکی نیز پایای دیگری است که ابتدا در سال ۲۰۰۱ توسط فاربر برای بررسی حرکت ربات‌های توپولوژیکی معرفی شده است که هدف اصلی آن مقاله ساختن الگوریتم حرکت مسطح و در نهایت الهام گرفتن از مسئله حرکت مسطح جهت محاسبه پیچیدگی توپولوژیکی فضاهای تصویری حقیقی می‌باشد. فاربر قبل از رسیدن به این نتیجه، مفهوم پیچیدگی توپولوژیکی را برای مسئله حرکت مسطح مورد مطالعه قرار می‌دهد و بیان می‌کند که پیچیدگی توپولوژیکی یک عددی است که ناپیوستگی‌های فرآیند حرکت مسطح را در فضای پیکربندی X اندازه می‌گیرد و در ادامه با استفاده از نظریه لوسترنیک اشنایرلمن به طالعه مفهوم پیچیدگی توپولوژیکی می‌پردازد و ابتدا یک کران بالا برای آن بدست می‌آورد و سپس با استفاده از طول مقسوم علیه‌های صفر یک فضا یک کران پایین برای پیچیدگی توپولوژیکی ارائه می‌دهد و با نتایج بدست آمده به محاسبه پیچیدگی توپولوژیکی کره‌ها، رویه‌های ۲-بعدی و حاصلضرب کره‌ها می‌پردازد. اطلاعات بیشتر در رابطه با این مفهوم توسط فاربر در مراجع [۲]، [۳]، [۴] و [۵] بیان شده است. لازم به ذکر است که فاربر در مرجع [۴] لم ۸,۲ ثابت می‌کند زمانی که فضای در نظر گرفته شده یک گروه لی باشد آنگاه رسته لوسترنیک اشنایرلمن از آن فضا با پیچیدگی توپولوژیکی آن فضا برابر خواهد بود.

۲- رسته لوسترنیک- اشنایرلمن

در این بخش ابتدا به تعریف مفهوم رسته لوسترنیک اشنایرلمن و یک مفهوم توپولوژیکی دیگری می‌پردازیم و سپس خاصیت‌های اساسی از رسته لوسترنیک اشنایرلمن را بیان خواهیم کرد و با اشاره به کاربردهای رسته LS، مثال‌های متعددی برای بدست آوردن این عدد از فضاهای مختلف خواهیم آورد.

تعریف ۱,۲. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی باشد، در این صورت رسته لوسترنیک اشنایرلمن از فضای X کوچکترین عدد صحیح n است به قسمی که فضای X توسط $n+1$ زیر مجموعه باز $U_1, \dots, U_{n+1}$ پوشانده می‌شود به طوریکه هر یک از U_i ها در X به یک نقطه انقباض‌پذیر باشند، این عدد را با $cat(\mathrm{X})$ نشان می‌دهیم، اگر چنین n ی وجود نداشته باشد قرار می‌دهیم $cat(\mathrm{X}) = \infty$.

نویسنده‌های دیگر برای بیان چنین پوششی از فضای X آن را با $cat(\mathrm{X}) = n+1$ بیان می‌کنند که عدد این تعریف یکی بیشتر از عدد تعریفی است که ما در اینجا از آن استفاده خواهیم کرد. هر چند با تعریف آنها برخی فرمول‌ها ظاهر بهتری به خود می‌گیرند ولی به‌نظر می‌رسد یک چنین تعریفی، تعریف کاملی برای تمام شرایط نباشد و در واقع ما از تعریفی در این متن استفاده کرده‌ایم که بطور خاص کران‌های بالا و پایین مناسب‌تری از رسته یک فضا بدهد. لازم به ذکر که در مرجع [۱] تعریف ۴۸,۱ و تعریف ۶۴,۱، وایت هد و گانیا به ترتیب تعریف‌های دیگری از رسته LS را بیان کرده‌اند.

عدد $cat(\mathrm{X})$ به نوع هموتوپی X بستگی دارد. در واقع داریم:

گزاره ۲،۲. اگر $X \simeq Y$ باشد، در این صورت $cat(X) = cat(Y)$.
اثبات. به مرجع [۶] مراجعه شود.

مثال ۳،۲. چون $S^n \simeq \mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$، بنابراین $\mathrm{cat}(S^n) = \mathrm{cat}(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})$.

نتیجه۴،۲. فضای توپولوژیک X انقباض پذیر است اگر و تنها اگر $cat(\mathrm{X}) = 0$.
برای مثال فضای $\mathbb{R}^n$ انقباض‌پذیر است پس در نتیجه $cat(\mathbb{R}^n) = 0$.
در ادامه برای محاسبه دقیق عدد $cat(\mathrm{X})$، لوسترنیک و اشنایرلمن کران‌های بالا و پایینی را برای محاسبه این عدد معرفی کرده‌اند که ابتدا با استفاده از یک مفهوم توپولوژیکی، کران پایین معرفی شده برای $cat(\mathrm{X})$ را بیان خواهیم کرد.

تعریف ۵،۲. فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی باشد و X یک فضا باشد. طول ناوی از X با ضرایب در R کوچکترین عدد صحیح k یا ∞ است به طوریکه تمام $(k+1)$- لایه از ضرب‌های ناوی در کوهمولوژی تحویل یافته $\widetilde{H}^*\,(\mathrm{X}; \mathbb{R})$ برابر صفر شود. این عدد را با $cup_R(\mathrm{X})$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۶،۲. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد، طول ناوی از یک فضا کمتر یا مساوی با رسته فضا برای تمام ضرایب R است. این مفهوم را به صورت زیر نشان می‌دهیم:
$cup_R(\mathrm{X}) \leq cat(\mathrm{X}).$

اثبات. به مرجع [۱] گزاره ۵،۱ مراجعه شود.

حال یک کران بالا برای $cat(\mathrm{X})$ بیان خواهیم کرد که قضیه زیر نشان می‌دهد بعد فضای مورد نظر مناسب‌ترین کران بالا برای رسته LS می‌باشد:

قضیه۷،۲. برای یک فضای پیرافشرده موضعاً انقباض‌پذیر داریم، $cat(\mathrm{X}) \leq dim(\mathrm{X})$.
اثبات. به مرجع [۱] قضیه ۷،۱ مراجعه شود.

در مرجع [۱] برای بدست آوردن رسته لوسترنیک اشنایرلمن از فضاها از کران‌های پایین و بالای دیگری نیز برای محاسبه این عدد استفاده شده است از جمله پایای تومر به عنوان کران پایین و رسته قوی و طول مخروطی بعنوان کران بالا بیان شده است.
ضرب فضاها ساختار توپولوژیکی دیگری است که پژوهشگران ریاضی تلاش کرده اند مفهوم رسته LS را با استفاده از قضیه زیر در مورد ضرب فضاها، مانیکه فضاها کاملا نرمال باشند نیز بیان کنند، توجه کنید که CW- مجتمع‌ها کاملاً نرمال می‌باشند.

قضیه ۸،۲. فرض کنیم X و Y فضاهای مسیر همبند و $X \times Y$ کاملاً نرمال باشد. آنگاه
$cat(X \times Y) \leq cat(X) + cat(Y).$

اثبات. به مرجع [۱] قضیه ۳۷،۱ مراجعه شود.

حال با بیان چند مثال تلاش می‌کنیم مفهوم رسته LS و یافتن عدد دقیق آن را ساده تر کنیم.

مثال۹،۲. چنبره n-بعدی دارای حلقه کوهمولوژی $H^*(T^n; \mathbb{Q})$ با n مولد می‌باشد. بنابراین $cup(T^n) = n$. پس با استفاده از گزاره ۳،۲ داریم، $n = cup(T^n) \leq cat(T^n)$. از طرف

دیگر می‌دانیم $\dim(T^n) = n$، بنابراین خواهیم داشت:

$$n = cup(T^n) \leq cat(T^n) \leq \dim(T^n) = n$$

در نتیجه $cat(T^n) = n$.

ملاحظه ۱۰،۲. فضای تصویری حقیقی k-بعدی $\mathbb{R}P^k$ را با P^k نشان می‌دهیم.

مثال ۱۱،۲. می‌دانیم $cat(P^n) = n$، پس با در نظر گرفتن حاصلضرب $P^2 \times P^4$ به وضوح داریم $cup(P^2 \times P^4) = 6$. بنابراین

$$6 = cup(P^2 \times P^4) \leq cat(P^2 \times P^4) \leq cat(P^2) + cat(P^4) = 2 + 4 = 6$$

پس در نتیجه $cat(P^2 \times P^4) = 6$.

مثال ۱۲،۲. اگر $n = 1, \dots, 10$ آنگاه $cat(SO(n)) = cup(SO(n))$. به مرجع [۷] و [۸] مراجعه شود.

قضیه ۱۳،۲. اگر X منیفلد n-بعدی همبند و بسته با $\pi_1(X) \approx \mathbb{Z}_2$ باشد، آنگاه $cat(X) = \dim(X)$ اگر و تنها اگر $w^{\dim(X)} \neq 0$ که در آن w عضو ناصفر از $H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ است.

اثبات. به مرجع [۹] قضیه ۱۱،۴ مراجعه شود.

نتیجه ۱۴،۲. اگر $w^{\dim(X)} = 0$ آنگاه $cat(X) < \dim(X)$.

مثال ۱۵،۲. $cat(G_2(\mathbb{R}^4)) = 3$.

اولاً به‌راحتی می‌توان نشان داد $cup(G_2(\mathbb{R}^4)) \geq 3$ و چون $\pi_1(G_k(\mathbb{R}^n)) \approx \mathbb{Z}_2$، بنابراین با توجه به نتیجه قبل چون $w^4 = 0$ پس

$$3 \leq cup(G_2(\mathbb{R}^4)) \leq cat(G_2(\mathbb{R}^4)) < 4$$

و نتیجه از نامساوی فوق حاصل خواهد شد.

پس از مشاهده نتایج و کاربردهایی که از رسته LS بیان کردیم، برای کمیت‌های هموتوپی U و V نیز رسته LS را بررسی خواهیم کرد.

تعریف ۱۶،۲. نقطه‌ی $x_0 \in X$ را ناتباهیده می‌نامیم اگر شمول $x_0 \hookrightarrow X$ نگاشت هم تاربندی باشد.

گزاره ۱۷،۲. (۱) اگر X و Y در $X \cup Y$ باز باشند، آنگاه $cat(X \cup Y) \leq cat(X) + cat(Y) + 1$.

(۲) اگر X و Y فضاهای نرمال مسیر همبند با نقطه‌ی پایه‌ای ناتباهیده باشند، آنگاه:

$$cat(X \vee Y) = \max\{cat(X), cat(Y)\}.$$

اینجا، $X \vee Y$ ضرب گوه‌ای از مجموعه‌های مجزای X و Y بدست آمده با نقاط پایه‌ای معین می‌باشند.

اثبات. به مرجع [۱] گزاره ۲۷،۱ مراجعه شود.

مثال ۱۸،۲. می‌دانیم $cat(P^2) = 2$ و $cat(P^3) = 3$ بنابراین خواهیم داشت:

$$cat(P^2 \vee P^3) = \max\{cat(P^2), cat(P^3)\}.$$

در حالت کلی:

$$cat(P^{n_1} \vee \dots \vee P^{n_k}) = \max\{n_1, \dots, n_k\}.$$

هم چنین در مورد $\mathbb{C}P^n$ و S^n داریم:

$$cat(\mathbb{C}P^{n_1} \vee \dots \vee \mathbb{C}P^{n}) = \max\{n_1, \dots, n_k\}.$$

و چون برای هر n، $cat(S^n) = 1$ پس داریم:

$$cat(S^{n_1} \vee \dots \vee S^{n_k}) = \max\{cat(S^{n_1}), \dots, cat(S^{n_k})\} = 1.$$

هر چند در مطالب گذشته مثال‌های ساده‌ای برای

محاسبه رسته LS بیان کردیم ولی در واقع محاسبه این پایا برای بسیاری از فضاهای توپولوژیکی و منیفلدها کار دشواری می‌باشد. با وجود این دشواری، ما و علاقه‌مندان دیگر به این مهم امیدواریم بتوانیم این عدد را برای برخی منیفلدهای دیگر نیز محاسبه کنیم.

۳- پیچیدگی توپولوژیکی

در این بخش ابتدا به تعریف مفهوم پیچیدگی توپولوژیکی می‌پردازیم و پس از آن خاصیت‌های اساسی از پیچیدگی توپولوژیکی را بیان خواهیم کرد و در نهایت با اشاره به کاربردهای این مفهوم، مثال‌های متعددی برای بدست آوردن این عدد از فضاهای مختلف خواهیم آورد.

در [۳] فاربر پایای $TC(X)$ را به صورت زیر بیان می‌کند: فرض کنیم PX فضای تمام مسیرهای پیوسته $\gamma: [0,1] \longrightarrow X$ در X باشد و $\pi: \mathrm{P}X \longrightarrow X \times X$ نگاشت وابسته به هر مسیر $\gamma \in PX$ باشد که به‌عنوان نقاط ابتدایی و انتهایی بصورت $\pi(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(1))$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱,۳. پیچیدگی توپولوژیکی فضای مسیر همبند X، کوچکترین عدد صحیح n است به طوریکه ضرب کارتزین $X \times X$ با n زیر مجموعه باز U_i پوشانده می‌شود و $X \times X = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n$ به طوریکه برای هر $i = 1,2, \ldots, n$ یک بخش موضعی پیوسته $s_i: U_i \longrightarrow PX$ از π وجود دارد که روی U_i، $\pi \circ s_i = id$ می‌باشد.

لم ۲,۳. فضای توپولوژیک X انقباض‌پذیر است اگر و فقط اگر $TC(X) = 1$.

اثبات. به مرجع [۳] مراجعه شود.

برای مثال دیسک n-بعدی انقباض پذیر است بنابراین داریم، $\mathrm{TC}(\mathbb{D}^n) = 1$.

مانند رسته LS پیچیدگی توپولوژیکی نیز پایای هموتوپی است، لذا داریم:

لم ۳,۳. اگر $X \simeq Y$ باشد، آنگاه
$$TC(X) = TC(Y).$$

اثبات. به مرجع [۳] مراجعه شود.

هم چنین مثال زیر در مرجع [۳] محاسبه شده است.

مثال ۴,۳. پیچیدگی توپولوژیکی حرکت مسطح از کره n-بعدی برابر است با:

$$\mathrm{TC}(S^n) = \begin{cases} 2 & \text{فرد } n \\ 3 & \text{زوج } n \end{cases}$$

چون $SO(2) \simeq S^1$، بنابراین داریم:
$$TC\big(SO(2)\big) = TC(S^1) = 2.$$

در اینجا ابتدا یک مفهوم توپولوژیکی را تعریف می‌کنیم و سپس با استفاده از آن یک کران پایین برای $TC(X)$ که توسط فاربر معرفی شده است را بیان خواهیم کرد.

تعریف ۵,۳. فرض کنیم k یک میدان باشد. هسته هومورفیسم
$$\cup: \ H^*(X;k) \otimes H^*(X;k) \longrightarrow \ H^*(X;k)$$

ایده‌آل مقسوم علیه های صفر از $H^*(X;k)$ است. طول ناوی مقسوم علیه‌های صفر از $H^*(X;k)$ طول بزرگترین حاصلضرب غیربدیهی در ایده آل مقسوم علیه‌های صفر $H^*(X;k)$ است. این عدد با $zcl(X)$ نشان داده می‌شود.

قضیه ۵,۴. عدد $TC(X)$ بزرگتر از طول ناوی مقسوم علیه‌های صفر $H^*(X;k)$ می‌باشد.

اثبات. به مرجع [۳] قضیه ۷ مراجعه شود.

قضیه زیر کران بالا برای $TC(X)$ می‌باشد که توسط فاربر بیان شده است.

قضیه ۷٫۳. برای هر فضای مسیر همبند X داریم:
$TC(X) \leq 2.\dim(X) + 1.$

اثبات. به مرجع [۳] قضیه ۴ مراجعه شود.
در ادامه با استفاده از مفهوم رسته LS یک نامساوی بیان می‌کنیم که کاربرد قابل توجهی در محاسبه عدد $TC(X)$ برای فضاهای مختلف خواهد داشت.

قضیه ۸٫۳. اگر فضای X مسیر همبند و پیرافشرده باشد،آنگاه
$cat(X) \leq TC(X) \leq 2cat(X) - 1.$

اثبات. به مرجع [۳] قضیه ۵ مراجعه شود.

قضیه ۹٫۳. برای هر فضای متریک مسیر همبند X و Y داریم:
$TC(X \times Y) \leq TC(X) + TC(Y) - 1.$

اثبات. به مرجع [۳] قضیه ۱۱ مراجعه شود.
در ادامه به بیان قضایا و مثال‌هایی از پیچیدگی توپولوژیکی فضاهای مختلف می‌پردازیم.

قضیه ۱۰٫۳. اگر X منیفلد همبند ساده باشد، آنگاه $TC(X) = \dim(X) + 1$. در حالت خاص $TC(\mathbb{C}P^n) = 2n + 1$.
اثبات. به مرجع [۲] قضیه ۱٫۳ مراجعه شود.

لم ۱۱٫۳. فرض کنیم G یک گروه لی همبند باشد، $TC(G) = cat(G)$.
اثبات. به مرجع [۴] لم ۸٫۲ مراجعه شود.

مثال ۱۲٫۳. چنبره n-بعدی $T^n = S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1$ یک گروه لی می‌باشد پس طبق لم ۱۱٫۳، $TC(T^n) = cat(T^n) = n$.

قضیه ۱۳٫۳. برای هر $n \neq 1,3,7$، عدد $TC(\mathbb{R}P^n)$ مساوی کوچکترین عدد k است به طوریکه فضای تصویری حقیقی $\mathbb{R}P^n$ به $\mathbb{R}^{k-1}$ غوطه ور می‌شود. همچنین برای $n = 1,3,7$، $TC(\mathbb{R}P^n) = n + 1$.
اثبات. به مرجع [۲] قضیه ۷٫۱ و گزاره ۶٫۴ مراجعه شود.

تذکر ۱۴٫۳. چون بعد غوطه‌وری P^n ها محاسبه نشده است و هنوز یک مسئله باز می‌باشد لذا با توجه به قضیه فوق پیچیدگی توپولوژیکی P^n نیز یک مسئله باز، باقی می‌ماند.
حال به ضرب گوه‌ای در پیچیدگی توپولوژیکی و چگونگی محاسبه آن می‌پردازیم.

قضیه ۱۵٫۳. فرض کنیم X و Y فضاهای توپولوژیک نرمال هاسدورف و مسیر همبند با نقاط پایه‌ای ناتباهیده باشد، بطوریکه $X \times X$، $Y \times Y$ و $X \times Y$ نرمال هستند آنگاه
$TC(X \vee Y) = \max\{TC(X), TC(Y), cat(X \times Y)\}.$

اثبات. به مرجع [۱۰] مراجعه شود.

مثال ۱۶٫۳.

$$\mathrm{TC}(P^4 \vee S^3) = \max\left\{\begin{matrix}\mathrm{TC}(P^4), \mathrm{TC}(S^3), \\ \mathrm{cat}(P^4 \times S^3)\end{matrix}\right\} = 8.$$

تبصره ۱۷٫۳. مجموعه

$B = \{w_1{}^{a_1} w_2{}^{a_2} | a_1 + a_2 \leq n\}$ پایه فضای برداری برای حلقه کوهمولوژی $H^*(G_{2,n}; \mathbb{Z}_2)$ می باشد.

گزاره ۱۸,۳. $TC\big(G_2(\mathbb{R}^4)\big) = 5$.

اثبات. ابتدا به محاسبه طول ناوی مقسوم عیله های صفر $G_2(\mathbb{R}^4)$ می‌پردازیم، بنابراین از آنجا که $H^*\big(G_2(\mathbb{R}^4)\big) = \mathbb{Z}_2[w_1, w_2]/\langle \overline{w_3}, \overline{w_4} \rangle$ و $\overline{w_1} = w_1,\ \overline{w_2} = w_1^2 + w_2,\ \overline{w_3} = w_1^3,\ \overline{w_4} = w_1^4 + w_1^2 w_2 + w_2^2$ بنابراین داریم:

$$H^*\big(G_2(\mathbb{R}^4)\big) = \mathbb{Z}_2[w_1, w_2]/\langle w_1^3, w_1^2 w_2 + w_2^2 \rangle$$

هم‌چنین پایه‌های این فضا بصورت زیر خواهد بود:

$$B = \{w_1{}^{a_1} w_2{}^{a_2} | a_1 + a_2 \leq n\} = \{w_1{}^{a_1} w_2{}^{a_2} | a_1 + a_2 \leq 2\} = \{1, w_1, w_1 w_2, w_1^2, w_2, w_2^2\}$$

هم اکنون فرض کنیم

$$\alpha, \beta \in H^*\big(G_2(\mathbb{R}^4)\big) \otimes H^*\big(G_2(\mathbb{R}^4)\big)$$

به صورت زیر تعریف شوند:

$$\alpha = w_1 \otimes 1 + 1 \otimes w_1$$

و

$$\beta = w_2 \otimes 1 + 1 \otimes w_2$$

حال برای ادامه محاسبه در نظر می‌گیریم:

$$\alpha = w_1 \otimes 1 + 1 \otimes w_1$$
$$\alpha^2 = w_1^2 \otimes 1 + 1 \otimes w_1^2$$
$$\alpha^3 = (w_1^2 \otimes 1 + 1 \otimes w_1^2)(w_1 \otimes 1 + 1 \otimes w_1) = w_1^2 \otimes w_1 + w_1 \otimes w_1^2$$

از طرفی

$$\beta = w_2 \otimes 1 + 1 \otimes w_2$$
$$\beta^2 = w_2^2 \otimes 1 + 1 \otimes w_2^2 = w_1^2 w_2 \otimes 1 + 1 \otimes w_1^2 w_2$$

بر این اساس $\alpha^3\beta^2 = 0$ اما $\alpha^3\beta \neq 0$ در نتیجه $zcl\big(G_2(\mathbb{R}^4)\big) \geq 4$. با استفاده از قضیه ۸,۳ داریم:

$$4 < TC\big(G_2(\mathbb{R}^4)\big) \leq 2cat\big(G_2(\mathbb{R}^4)\big) - 1$$
$$4 < TC\big(G_2(\mathbb{R}^4)\big) \leq 5$$

در نتیجه $TC\big(G_2(\mathbb{R}^4)\big) = 5$.

در این مقاله با بیان مسائل اصلی از دو مفهوم رسته LS و پیچیدگی توپولوژیکی از فضاها و منیفلدهای خاص و همچنین با نتایج جدیدی از محاسبات این دو مفهوم، سعی بر آن داشتیم تا این دو مفهوم را برای علاقمندان علم هندسه و توپولوژی تا حدودی قابل فهم‌تر و آسان‌تر کنیم، چرا که محاسبه‌ی این دو پایایی هموتوپی بسیار دشوار و در صورت محاسبه بسیار کاربردی می‌باشد و در نتیجه با توجه به آنچه در اوایل متن نیز بیان شد این دو مفهوم در شناخت فضاها بخصوص منیفلدها بسیار مفید می‌باشد. لازم به ذکر است برای هر فضای توپولوژیک دیگری نیز می‌توان با روش به کار برده شده در این مقاله، این پایاها را بررسی و محاسبه کرد ولی احتمال دارد جواب دقیق بدست نیاوریم، لذا باید از روش‌های دیگری استفاده کنیم. چه بسا چون برای ابعاد دیگر از فضاهای گرسمن، فضای $SO(n)$، منیفلدهای دولد و فضاهای لنز هنوز این محاسبات به صورت یک مسئله باز می‌باشد، بنابراین در ادامه، تحقیقات خود را در جهت این محاسبات و رسیدن به نتایج خوب پیش خواهیم برد.

فهرست منابع

[1] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea, and D. Tanre´, Lusternik -Schnirelmann category، Mathematical Surveys and Monographsm vol. 103, American Mathematical Society، Providence, RI, 2003 MR 1990857 (2004E:5001)

[2] M. Farber، S. Tabachnikov and S. Yuzvinsky, Topological robotics: Motion planning in projective spaces، Preprint arxiv :math. AT/ 0210018, 2 Oct (2002)

[3] M. Farber, Topological complexity of motion planning, Discrete Comput. Geom. 29, (2003) no. 2, 211-221.

[4] M. Farber، Instabilities of robot motion Topology Appl. 140, (2004) no. 3-2, 245-266.

[5] M. Farber, Topology of robot motion planning Morse theoretic methods in nonlinear analysis and in symplectic topology, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem, vol.،217, Springer, Dordrecht, 2006, pp. 185-230.

[6] I. M. James, On category, in the sense of Lusternik -schnirelmann، Topology, 331-348.

[7] N. Iwase, M. Mimura, T. Nishimoto, Lusternik -Schnirelmann category of non-simply connected compact simple Lie groups، Topology Appl. 150 (2005), 111-123.

[8] N. Iwase, K. Kikuchi, M. Miyauchi, On the Lusternik - Schnirelmann category of SO (10), March 21, 2019.

[9] H. L. Hiller, On the Cohomology of Real Grassmanians, Transactions of the American Mathematical Society. vol.257 No. 2Feb, (1980) pp. 521-533.

[10] C. A. I. Zapata، topological complexity of wedges, arXiv: 0677971. 1712 [math. AT] 19 Dec 2017.