



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

اندیس چنبره‌ای و تصویری گراف ژاکوبسون

آتسا پارساپور^{۱*}، خدیجه احمدجواهری^۲

(^{۲۰۱}) گروه ریاضی، واحد بندرعباس، دانشگاه آزاد اسلامی، بندرعباس، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۱۲/۱۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۱۲/۰۸

چکیده

گراف خط مکرر مرتبه k گراف Γ را با نماد $L^k(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم و $L^k(\Gamma) = L(L^{k-1}(\Gamma))$. در حالت خاص، $L^0(\Gamma) = \Gamma$ و $L^1(\Gamma) = L(\Gamma)$. اندیس چنبره‌ای (و تصویری) گراف Γ ، کوچک‌ترین k ای است که به ازای آن k -امین گراف خط مکرر گراف Γ غیرچنبره‌ای (و غیرتصویری) باشد. هرگاه $L^k(\Gamma)$ به ازای هر $k \geq 0$ ، چنبره‌ای (و تصویری) باشد، قرار می‌دهیم: $\xi_T = \infty$ (و $\xi_p = \infty$). گراف ژاکوبسون وابسته به حلقه جابجایی یک‌دار R ، که با نماد R^k نمایش داده می‌شود، یک گراف ساده با مجموعه رئوس $R \setminus J(R)$ است و دو رأس متمایز x و y در آن مجاور هستند اگر و فقط اگر عنصر $1 - xy$ یکال R نباشد. در این مقاله، اندیس‌های چنبره‌ای و تصویری گراف ژاکوبسون بررسی شده است. ما یک رده‌بندی از اندیس‌های مذکور گراف ژاکوبسون ارائه می‌دهیم. اندیس چنبره‌ای و تصویری گراف ژاکوبسون نامتناهی است یا حداکثر دو.

واژه‌های کلیدی: گراف ژاکوبسون، گراف خط مکرر، اندیس چنبره‌ای، اندیس تصویری.

۱- مقدمه

مفهوم گراف خط توسط ویتنی^۲ در سال ۱۹۳۲، کروسز^۳ در سال ۱۹۴۳ و سپس توسط هراری و نورمن^۴، در سال ۱۹۶۰ ارائه شد (به صفحه ۲۷۳ از [۸] مراجعه شود). به ازای گراف دلخواه Γ ، گراف خط آن با نماد $L(\Gamma)$ نمایش داده می‌شود. $L(\Gamma)$ گرافی است که هر رأس آن متناظر با یک یال Γ باشد و دو رأس آن مجاورند اگر و تنها اگر یال‌های متناظرشان در Γ در یک رأس مشترک باشند. در این تحقیق، هنگامی که رئوس v_i و v_j در Γ مجاور باشند، از نماد $w_{i,j}$ برای نمایش رأس $[v_i, v_j] \in V(L(\Gamma))$ استفاده می‌شود. مجموعه رئوس $L(\Gamma)$ دقیقاً با مجموعه یال‌های Γ متناظر است و $L(\Gamma)$ مجاورت بین یال‌های Γ را به نمایش می‌گذارد.

مطابق قضیه‌ای که ویتنی در مقاله [۱۹] بیان می‌کند، ساختار هر گراف همبند (به غیر از گراف‌های $K_{1,3}$ و K_3) می‌تواند توسط گراف خط آن بازیابی شود. به عبارتی؛ تناظر یک به یک بین رده گراف‌های همبند و رده گراف‌های خط همبند وجود دارد. لذا این نکته انگیزه‌ای شد تا به تحقیقی در مورد نشانیده گراف خط مکرر و به ویژه گراف خط مکرر \mathbb{R} بپردازیم.

k امین گراف خط مکرر گراف دلخواه Γ را با $L^k(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم. به‌ویژه، $L^0(\Gamma) = \Gamma$ و $L^1(\Gamma) = L(\Gamma)$. برای گراف دلخواه Γ ، اندیس چنبره‌ای گراف Γ را کوچک‌ترین k ای در نظر می‌گیریم که به ازای آن چنبره‌ای نباشد و آن را با ζ_T^k نمایش می‌دهیم. هرگاه به ازای هر k ، گراف $L^k(\Gamma)$ چنبره‌ای باشد، قرار می‌دهیم: $\zeta_T = \infty$. به طور مشابه، اندیس تصویری گراف Γ را کوچک‌ترین k ای در نظر می‌گیریم که به ازای آن $L^k(\Gamma)$

تصویری نباشد و آن را با ζ_P^k نمایش می‌دهیم. هرگاه به ازای هر k ، گراف $L^k(\Gamma)$ تصویری باشد، قرار می‌دهیم: $\zeta_P = \infty$. قابل توجه است که برای گراف‌های یکریخت با یک مسیر n رأس (P_n) ، یا یک دور n رأسی (C_n) یا گراف $K_{1,3}$ ، قرار می‌دهیم $\zeta_T = \zeta_P = \infty$. همچنین، برای گراف‌های غیرچنبره‌ای و غیرتصویری که غیرمسطح باشند قرارداد می‌کنیم: $\zeta_T = \zeta_P = 0$.

مفهوم گراف ژاکوبسون وابسته به حلقه جابه‌جایی یک‌دار R ، که با نماد \mathbb{R} نمایش داده شده، اولین بار توسط عرفانیان و همکارانش در [۳] معرفی شد. در این گراف مجموعه رئوس، مجموعه $R \setminus J(R)$ در نظر گرفته شده و دو رأس متمایز a و b در آن مجاور هستند اگر و تنها اگر $1-ab$ عنصر یکال R نباشد. پارساپور و همکاران در [۱۶]، تمامی حلقه‌های جابه‌جایی، یک‌دار و متناهی را که به ازای آن‌ها گراف خط گراف ژاکوبسون، گرافی مسطح، چنبره‌ای و تصویری هستند را رده‌بندی نمودند.

هدف از ارائه این مقاله، رده‌بندی حلقه‌های جابه‌جایی، یک‌دار و متناهی است که به ازای آن‌ها گراف خط مکرر گراف ژاکوبسون، روی چنبره نشانیده می‌شوند. همچنین حلقه‌های جابه‌جایی، یک‌دار و متناهی که گراف خط مکرر گراف ژاکوبسون نظیر آن‌ها تصویری باشد را شناسایی می‌کنیم. در بخش اول از مقاله حاضر، به ارائه مفاهیم و تعاریف مورد نیاز می‌پردازیم. سپس به معرفی گراف ژاکوبسون و بیان برخی خواص آن خواهیم پرداخت. بخش سوم نیز، جهت تعیین اندیس چنبره‌ای و تصویری، به بررسی رفتار نشانیده گراف خط مکرر \mathbb{R} روی چنبره و صفحه تصویری اختصاص دارد.

در سرتاسر مقاله، تمامی حلقه‌ها را جابه‌جایی، یک‌دار و متناهی در نظر می‌گیریم. نمادهای \mathbb{Z}_n و \mathbb{F}_q به

⁴ F. Harary and R.Z. Norman

² H. Whitney

³ J. Krausz

گرفته شوند. هرگاه گراف رسم شده روی سطح شامل حداقل دو یال متقاطع در نقطه‌ای باشد که رأس گراف نباشد، گراف روی سطح نشانیده نمی‌شود. گراف Γ را روی سطح S تحویل ناپذیر می‌نامیم، هرگاه نتوانیم آن را روی سطح S بنشانیم در حالی که هر زیرگراف سره Γ روی سطح S نشانیده شود. یک زیرتقسیم یالی از گراف ساده، گرافی است که با ایجاد یک رأس جدید (درجه دو) بر روی یکی از یال‌ها حاصل شود. یک زیرتقسیم گراف ساده Γ ، گرافی است که به وسیله دنباله‌ای متناهی از زیرتقسیم‌های یالی در Γ به دست آید. یک گراف، مسطح نامیده می‌شود هرگاه بتوان آن را در صفحه به گونه‌ای رسم نمود که یال‌ها تنها همدیگر را در رئوسی که از آن‌ها می‌گذرند، قطع کنند. یال‌های گراف مسطح، صفحه را به ناحیه‌هایی تقسیم می‌کنند که وجه نامیده می‌شوند. قضیه معروف زیر شرط لازم و کافی برای مسطح بودن گراف‌های ساده را بیان می‌کند.

قضیه کوراتوفسکی^۵ [۱۳] یک گراف ساده، مسطح است اگر و تنها اگر شامل هیچ زیرتقسیمی یکریخت با K_5 یا $K_{3,3}$ نباشد.

به ازای رأس دلخواه درجه دو از گراف Γ ، توقیف رأس عمل حذف آن رأس و اضافه کردن یالی است که دو رأس مجاور آن را به هم وصل می‌کند. گراف Γ_2 را کهاد توپولوژیکی گراف Γ_1 می‌نامیم، هرگاه Γ_1 شامل زیرتقسیمی از Γ_2 به عنوان یک زیرگراف باشد. به طور معادل؛ Γ_2 از حذف رأس، حذف یال یا توقیف رئوس در Γ_1 حاصل شده باشد. انقباض یالی، عملی است که به وسیله آن یال موردنظر را می‌توان از گراف حذف کرده، و دو انتهای آن را برهم منطبق نمود. گراف Γ_2 را کهاد گراف Γ_1 می‌نامیم، هرگاه Γ_2 به وسیله حذف رأس، حذف یال یا انقباض

ترتیب برای نمایش مجموعه اعداد صحیح به هنگ n و میدان q عضوی استفاده شده است. $J(R)$ نیز برای نمایش رادیکال ژاکوبسون حلقه R به کار برده می‌شود که اشتراک تمام ایده‌آل‌های بیشین حلقه R است. به خواننده توصیه می‌شود برای اطلاعات بیشتر در زمینه نظریه حلقه به منابعی چون [۷]، [۱۲] و [۲] مراجعه نماید.

۲- مفاهیم و تعاریف مورد نیاز

یکی از موضوعات جذاب در نظریه گراف، بررسی رفتار نشانیده گراف روی یک سطح است. یادآور می‌شویم که منظور از سطح، یک خمینه دو بُعدی حقیقی (فضای توپولوژی هاسدورف که هر همسایگی باز از هر نقطه آن با دیسک $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$ همسان ریخت باشد) همبند فشرده بدون کرانه است. به علاوه، جمع همبند دو سطح، سطحی است که با برش یک حفره مستدیر روی هر دو سطح و سپس چسباندن دو سطح در طول مرزهای این حفره‌ها به دست می‌آید. قضیه زیر به زیبایی سطوح بسته را رده‌بندی می‌کند.

قضیه [۱۴] هر سطح بسته (فشرده و بدون کرانه) با یک کره، یا با جمع همبند تعداد متناهی (g) تا چنبره، یا با جمع همبند تعداد متناهی (k) تا صفحه تصویری همسان ریخت است.

نمادگذاری. برای اعداد صحیح نامنفی g و k نمادهای S_g و N_k را به ترتیب برای جمع همبند g تا چنبره و جمع همبند k تا صفحه تصویری به کار می‌بریم.

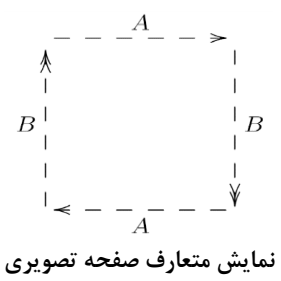
گراف Γ روی سطح S نشانیده می‌شود، هرگاه رئوس Γ نقاط متمایز روی سطح و هر یال Γ یک قوس ساده در S متصل کننده دو رأس مجاور در نظر

⁵ Kuratowski's Theorem

$$K_{4,4} \text{ (۵) و (۱۷)}$$

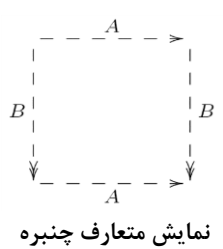
به منظور بررسی چنبره‌ای بودن گراف‌ها، به دنبال فهرستی از گراف‌های کمین کهاد و غیرچنبره‌ای هستیم. سؤال این است که: آیا چنین فهرستی وجود دارد؟ گلور و هانیکه^۶ ادعا داشتند که تعداد چنین گراف‌های توپولوژیکی بیش از ۱۰۰۰ (یا حتی ۱۰۰۰۰) است. بودندیک و واگنر^۷ در [۴] حداقل ۲۳ گراف کمین کهاد ارائه داده و حدس زدند که تعداد گراف‌های مذکور کمتر از ۳۰ تاست. تمامی گراف‌های غیرچنبره‌ای با حداکثر نه رأس شناخته شده‌اند که شامل ۳ گراف هشت رأسی و ۴۸ گراف نه رأسی می‌باشند. از این گراف‌ها تعدادی در سال ۱۹۹۸ توسط لاواسک^۸ و هانیکه، و تعدادی دیگر نیز توسط پیرسون^۹ به وسیله رایانه شناسایی شدند.

اینک به ارائه نمادها و مفاهیم مورد نیاز مربوط به نشانیده گراف روی صفحه تصویری می‌پردازیم. هرگاه یک دیسک از کره‌ای برش زده شده، و توسط نوار موبیوسی بسته شود، سطح ایجاد شده همان صفحه تصویری است. همچنین، صفحه تصویری را می‌توان با همسان ساختن هر نقطه از یک دیسک با نقاط سمت مخالفش تولید نمود ([۱۱] و [۱۸]).



کم‌ترین تعداد k که به ازای آن گراف روی N_k (جمع همبند k تا صفحه تصویری) نشانیده می‌شود را گونای غیرجهت‌پذیر (عدد کلاهیکی) نامیده، و برای گراف Γ با $\bar{\gamma}(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم. گرافی که بتوان

یالی در Γ_1 حاصل شده باشد. هر کهاد توپولوژیکی یک کهاد است؛ زیرا عمل توقیف رأس را می‌توان حالت خاصی از عمل انقباض یالی در نظر گرفت. لیکن عکس این عبارت زمانی برقرار است که درجه کلیه رئوس گراف کهاد حداکثر سه باشد. گونای جهت‌پذیر (یا به طور خلاصه گونای) گراف Γ که آن را با $\gamma(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم کم‌ترین g ای است که به ازای آن Γ روی S_g (جمع همبند g تا چنبره) نشانیده می‌شود. گراف از گونای یک را گراف چنبره‌ای می‌نامیم. هرگاه Γ_1 زیرگرافی از Γ_2 باشد، به سادگی مشاهده می‌گردد که $\gamma(\Gamma_1) \leq \gamma(\Gamma_2)$.



هرگاه Γ گراف همبند با تعداد رئوس n ، تعداد یال‌های m ، تعداد وجه‌های f ، روی سطح S_g نشانیده شود، رابطه زیر که به قاعده اویلر مشهور است برقرار می‌باشد [۱۱].

$$n - m + f = 2 - 2g$$

قابل ذکر است که به ازای هر $m, n \geq 3$

$$\gamma(K_n) = \lceil \frac{1}{12}(n-3)(n-4) \rceil$$

$$\gamma(K_{m,n}) = \lceil \frac{1}{4}(m-2)(n-2) \rceil$$

لذا گراف کامل K_n گرافی چنبره‌ای است اگر و فقط اگر $n \in \{5, 6, 7\}$ ، و تنها گراف‌های دوبخشی کامل چنبره‌ای عبارتند از: $K_{3,3}, K_{3,4}, K_{3,5}, K_{3,6}$ و

⁹ A. Hlavacek
¹⁰ J. Pearson

⁶ Euler's Formula
⁷ H. Glover, and P. Huneke
⁸ R. Bodendiek, and K. Wagner

R ، \mathfrak{S}_R ، گراف ساده و غیرجهت‌داری است که مجموعه رئوس آن $R \setminus J(R)$ می‌باشد و دو رأس متمایز x و y در آن مجاور هستند اگر و تنها اگر $1 - xy$ عنصر یکال R نباشد.

از جمله اقداماتی که در [۳] صورت پذیرفته و در این تحقیق کاربرد قابل توجهی دارد، شناسایی مؤلفه‌های همبندی گراف ژاکوبسون است که آن را در قضیه ۳-۱ بیان می‌کنیم.

قضیه ۳-۱. به ازای ایده‌آل بیشین m در حلقه R مجموعه $1 + m$ مجموعه رئوس یک مؤلفه همبندی گراف \mathfrak{S}_R است (به [۳] مراجعه شود). همچنین نویسندگان در [۳]، تمام حلقه‌هایی که گراف ژاکوبسون نظیر آن‌ها گرافی مسطح است را نیز به صورت زیر (قضیه ۳-۲) رده‌بندی نموده‌اند.

قضیه ۳-۲. [۳] فرض کنید R حلقه‌ای متناهی باشد. در این صورت \mathfrak{S}_R گراف مسطح است اگر و تنها اگر R یک میدان باشد یا با یکی از حلقه‌های زیر یکرخت باشد:

- (آ) حلقه‌های \mathbb{Z}_2 ، \mathbb{Z}_4 ، $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$ از مرتبه ۴،
- (ب) حلقه \mathbb{Z}_6 از مرتبه ۶،
- (پ) حلقه‌های \mathbb{Z}_8 ، $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ ، $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ، $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3)$ ، $\mathbb{Z}_2[x]/(2x, x^2)$ ، $\mathbb{Z}_4[x]/(x^2 + x + 1)$ ، $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + 1)$ ، $\mathbb{Z}_4[x]/(2x, x^2 - 2)$ و $\mathbb{Z}_2[x, y]/(x, y)^2$ از مرتبه ۸، و
- (ت) حلقه‌های \mathbb{Z}_9 ، $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ ، $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2)$ از مرتبه ۹.

۴- رفتار نشانیده گراف خط مکرر روی چنبره و صفحه تصویری

این بخش را با ارائه یک لم از [۶] که کاربرد فراوانی در بررسی چنبره‌ای و تصویری بودن گراف خط مکرر دارد آغاز می‌کنیم.

روی صفحه تصویری نشانید، گراف تصویری نامیده می‌شود. عدد کلاهیکی گراف تصویری، یک است. به سادگی مشاهده می‌شود که اگر Γ_1 زیر گرافی از Γ_2 باشد، آن‌گاه $\bar{\gamma}(\Gamma_1) \leq \bar{\gamma}(\Gamma_2)$.

هرگاه Γ گراف همبند با تعداد رئوس n ، تعداد یال‌های m و تعداد وجه‌های f ، روی سطح N_k نشانیده شود، رابطه زیر که به قاعده اوپلر مشهور است برقرار می‌باشد ([۱۱]، $n - m + f = 2 - k$).

قابل ذکر است که به ازای هر $m, n \geq 0$

$$\bar{\gamma}(K_n) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{1}{6}(n-3)(n-4) \right\rfloor, & n \geq 3, n \neq 7 \\ 3, & n = 7 \end{cases}$$

$$\bar{\gamma}(K_{m,n}) = \left\lfloor \frac{1}{2}(m-2)(n-2) \right\rfloor$$

بنابراین، گراف کامل K_n گرافی تصویری است اگر و فقط اگر $n \in \{5, 6\}$ و تنها گراف‌های دوبخشی کامل تصویری عبارتند از: $K_{3,3}$ و $K_{3,4}$ ([۱۷] و [۵]).

به منظور بررسی تصویری بودن گراف‌ها نیز، به دنبال فهرستی از گراف‌های کهاد کمین و غیرتصویری هستیم. سؤال این است که آیا چنین فهرستی وجود دارد؟ علاوه بر کره، صفحه تصویری تنها سطحی است که تمامی گراف‌های کهاد کمین تحویل‌ناپذیر آن شناخته شده است. تعداد گراف‌های تحویل‌ناپذیر روی صفحه تصویری ۱۰۳ تا است که توسط گلور و همکارانش در [۱۰] نمایش داده شده‌اند. علاوه بر آن، آرکدیکن^{۱۱} در [۱] ثابت نمود که فهرست ارائه شده در [۱۰] کامل است. همچنین این فهرست توسط میروولد و راث^{۱۲} در [۱۵] مجدداً کنترل شد. از این تعداد، ۳۵ گراف، گراف‌های کهاد کمین می‌باشند (به [۹] مراجعه شود).

۳- معرفی گراف ژاکوبسون

گراف ژاکوبسون وابسته به حلقه جابه‌جایی و یک‌دار

¹² W. Myrvold, and J. Roth

¹¹ D. Archdeacon

به استثناء حلقه $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ، آن گاه گراف \mathfrak{S}_R دارای اندیس چنبره‌ای و تصویری صفر است.

اثبات. گیریم $n \geq 4$. در این وضعیت، گراف \mathfrak{S}_R شامل زیرگرافی یکرخیخت با گراف کامل K_8 با مجموعه رئوس $e_1, e_2, e_3, e_4, e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_1 + e_4, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_4, e_1 + e_3 + e_4$ و $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ است. لذا چنبره‌ای و تصویری نمی‌باشد.

اکنون، فرض کنیم $R \cong R_1 \times R_2 \times R_3$ و $1 \leq i \leq 3$ چنان موجود باشد که R_i شامل حداقل چهار عنصر باشد. بدون از دست دادن کلیت مسأله، گیریم $|R_1| \geq 4$. اگر $|R_1| \geq 8$ ، آن گاه در حلقه R می‌توان ایده‌آل بیشین m با حداقل هشت عنصر یافت. بنا به قضیه ۳-۱، گراف \mathfrak{S}_R شامل زیرگرافی یکرخیخت با گراف کامل K_8 با مجموعه رئوس $1+m$ است. لذا چنبره‌ای و تصویری نمی‌باشد. حال اگر R_1 میدانی از مرتبه ۴، ۵ یا ۷ باشد، آن گاه به ازای عناصر غیرهمانی متمایز x_1 و x_2 با شرط $x_2 = x_1^{-1}$ ، مجموعه عناصر $1, (x_2, 0, 1), (x_1, 0, 1), (1, 0, 1), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (x_1, 1, 1)$ و $(x_2, 1, 1)$ زیرگرافی یکرخیخت با K_8 در \mathfrak{S}_R تشکیل می‌دهند. پس \mathfrak{S}_R گراف چنبره‌ای و تصویری نیست. در حالتی که R_1 حلقه موضعی غیرمیدان با چهار عضو باشد، یکرخیخت با یکی از حلقه‌های \mathbb{Z}_4 یا $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$ خواهد بود. در وضعیت اول؛ یعنی حالت $R_1 \cong \mathbb{Z}_4$ ، رئوس $1, e_3, e_1 + e_3, 2e_1 + e_3, 3e_1 + e_3, e_2 + e_3$ و $2e_1 + e_2 + e_3$ در \mathfrak{S}_R نسخه‌ای از K_8 تولید می‌کنند و در نتیجه \mathfrak{S}_R گراف چنبره‌ای و تصویری نیست. به طور مشابه در وضعیت دوم؛ یعنی حالت $R_1 \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$ ، هشت عنصر $1, e_3, e_1 + e_3, xe_1 + e_3, xe_1 + e_2 + e_3, e_2 + e_3, (1+x)e_1 + e_2 + e_3$ و $(1+x)e_1 + e_3$ مشمول در ایده‌آل بیشین m حلقه R خواهند بود و در نتیجه \mathfrak{S}_R چنبره‌ای و تصویری نیست. سرانجام، در حالتی

لم ۴-۱. [۶، ۴.۱] فرض کنید Γ گرافی ساده، شامل دو رأس متمایز از درجه m و n باشد و به ازای $\delta = 0, (m-7)(n-7) \neq 0$ و جاهای دیگر، $\delta = -1$ در این صورت

$$\gamma(L(\Gamma)) \geq \gamma(K_m) + \gamma(K_n)$$

$$\bar{\gamma}(L(\Gamma)) \geq \bar{\gamma}(K_m) + \bar{\gamma}(K_n) + \delta$$

جهت سهولت بیان و اختصار، نمادگذاری ذیل ارائه می‌گردد.

نمادگذاری. نماد 1 مبین n تایی $(1, 1, \dots, 1)$ است که تمام مؤلفه‌های آن 1 باشد و به ازای $i = 1, 2, \dots, n$ ، نماد e_i نمایش عنصری است که مؤلفه i ام آن 1 و بقیه مؤلفه‌ها صفر باشد.

با توجه به دسته‌بندی حلقه‌ها به دو دسته موضعی و غیرموضعی، در این بخش ابتدا به تحقیق در مورد چنبره‌ای و تصویری بودن گراف خط مکرر \mathfrak{S}_R در حالتی که R حلقه‌ای غیرموضعی است پرداخته، و سپس رفتار نشانیده گراف خط مکرر گراف ژاکوبسون نظیر حلقه‌های موضعی روی چنبره و صفحه تصویری را بررسی می‌نماییم.

بنا به قضیه ۸.۷ از [۲]، حلقه متناهی R حاصل ضرب مستقیم تعداد متناهی حلقه موضعی آرتینی یکرخیخت است. از این رو، یافتن کرانی برای این تعداد به منظور بررسی رفتار نشانیده گراف خط مکرر گراف ژاکوبسون نظیر حلقه R روی چنبره و صفحه تصویری ضروری به نظر می‌رسد.

ابتدا، جهت تحقیق در خصوص اندیس چنبره‌ای و تصویری گراف \mathfrak{S}_R ، حلقه‌های غیرموضعی را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۴-۲. فرض کنید به ازای $i = 1, 2, \dots, n$ حلقه‌های (R_i, m_i) موضعی متناهی باشند و $n \geq 3$ در این صورت اگر $R \cong R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$

دلخواه R که $R \cong R_1 \times R_2$ بررسی کنیم. لذا حالات زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱) $|R| > 16$.

اگر $|R_1| \geq 8$ یا $|R_2| \geq 8$ ، آن‌گاه حلقه R شامل ایده‌آل بیشین حداقل هشت عضوی است. به کمک قضیه ۳-۱، گراف \mathfrak{R} شامل نسخه‌ای از K_8 بوده و لذا چنبره‌ای و تصویری نمی‌باشد. پس $\xi_T = \xi_P = 0$. بنابراین می‌توان فرض کرد به ازای $i \in \{1, 2\}$ ، $|R_i| \leq 7$. در این صورت حلقه R با یکی از حلقه‌های زیر یکرخت است:

$$\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_2[x]/(x^2) \times \mathbb{Z}_5, F_4 \times \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_2[x]/(x^2) \times \mathbb{Z}_7, F_4 \times \mathbb{Z}_7$$

هنگامی که $R \cong F_4 \times \mathbb{Z}_5$ ، به ازای $x_1, x_2 \in F_4$ ، با شرط $x_2 = x_1^{-1}$ ، انقباض گراف \mathfrak{R} شامل نسخه‌ای از $K_{4,5}$ با مجموعه رئوس زیر بوده، و لذا \mathfrak{R} گراف چنبره‌ای و تصویری نمی‌باشد.

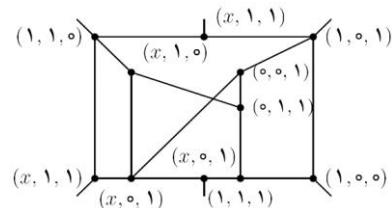
$$\{(x_1, 0), (x_1, 1), (x_1, 2), (x_1, 3)\} \cup \{(x_2, 4)\},$$

$$\{(x_2, 1), (x_2, 2), (x_2, 3), (x_2, 0)\}.$$

اینک گیریم R با یکی از حلقه‌های $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2) \times \mathbb{Z}_5$ یا $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$ یکرخت باشد. به سادگی و با توجه به قضیه ۳-۱، زیرگرافی یکرخت با K_{10} در ساختار گراف \mathfrak{R} مشاهده می‌گردد و لذا گراف چنبره‌ای و تصویری نخواهد بود.

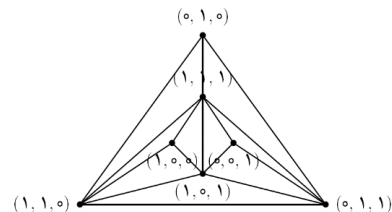
هرگاه R با یکی از حلقه‌های $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$ یا $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ یکرخت باشد، $|E(J_R)| > 3|V(J_R)|$ به کمک قاعده اویلر، در می‌یابیم گراف \mathfrak{R} چنبره‌ای نیست. به علاوه، هرگاه $R \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$ ، گراف \mathfrak{R} شامل زیرگرافی یکنواخت با K_7 و هرگاه $R \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ ، گراف \mathfrak{R} شامل زیرگرافی یکنواخت با $K_{5,5}$ خواهد بود، لذا تصویری نیست.

که $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ به سادگی مشاهده می‌گردد که $|E(J_R)| > 3|V(J_R)|$. به کمک قاعده اویلر، واضح است که \mathfrak{R} یک گراف چنبره‌ای نمی‌باشد. همچنین، گراف \mathfrak{R} شامل زیرگرافی یکرخت با E_{30} ، یکی از گراف‌های موجود در [۱۰] است (شکل ۱ را ببینید). در شکل ۱، عضو $x \in R_1$ با شرط $x = x^{-1}$ در نظر گرفته شده است. لذا در این حالت، گراف \mathfrak{R} تصویری نیست. بنابراین در تمام حالات فوق، $\xi_T = \xi_P = 0$.



شکل ۱

در پایان نیز، هرگاه $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ، بنا به قضیه ۲-۳، گراف \mathfrak{R} مسطح است (شکل ۲ را ببینید). از آنجا که رأس $(1, 1, 1)$ در \mathfrak{R} دارای درجه ۶ است، لذا $L(\mathfrak{R})$ شامل نسخه‌ای از K_5 خواهد بود و لذا مسطح نیست. همچنین، \mathfrak{R} دو رأس متمایز $(0, 1, 1)$ و $(1, 1, 0)$ از درجه ۵ دارد. بنا به لم ۴-۱، گراف $L(\mathfrak{R})$ چنبره‌ای و تصویری نخواهد بود. در نتیجه، $\xi_T = \xi_P = 1$.



شکل ۲

با توجه به قضیه ۴-۲، ضروری است چنبره‌ای و تصویری بودن گراف خط مکرر \mathfrak{R} را به ازای حلقه

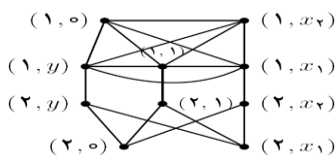
همچنین، انقباض گراف \mathfrak{S}_R شامل زیرگرافی یکرخت $K_{4,4}$ با مجموعه رئوس زیر خواهد بود. این بدان معناست که اگر $R \cong F_4 \times F_4$ ، آن‌گاه گراف \mathfrak{S}_R تصویری نمی‌باشد.

$$\{(x_1, y_2), (x_1, 0), (x_1, y_1), (x_1, 1), (x_2, 0)\} \cup \{(x_2, 1), (x_2, y_1), (x_2, y_2)\}$$

اکنون حالتی که $|R_1| = |R_2| = 4$ و حداقل یکی از این حلقه‌ها میدان نباشد را در نظر می‌گیریم. از آن‌جا که ایده‌آل بیشین حلقه R_1 یا R_2 شامل حداقل دو عضو است، حلقه R ایده‌آل بیشینی از سایز حداقل هشت را شامل خواهد شد. لذا گراف \mathfrak{S}_R شامل زیرگرافی یکرخت با K_8 بوده و در نتیجه گراف چنبره‌ای و تصویری نمی‌باشد.

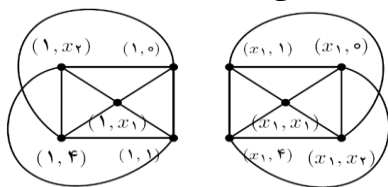
حالت ۳) $|R| = 15$

در این حالت، $R_1 = \mathbb{Z}_3$ و $R_2 = F_5$ یا برعکس. در نتیجه، گراف \mathfrak{S}_R شامل نسخه‌ای از G_1 ، یکی از گراف‌های موجود در [۲۰] است. بنابراین گراف \mathfrak{S}_R چنبره‌ای نیست (به شکل ۴ توجه نمایید). در شکل ۴، $x_1, x_2, y \in F_5$ ، با شرط $x_2 = x_1^{-1}$ و $y = y^{-1}$.



شکل ۴

از طرفی \mathfrak{S}_R شامل یک نسخه از A_5 ، یکی از گراف‌های موجود در [۱۰] است (شکل ۵ را ببینید) و لذا تصویری نمی‌باشد.



شکل ۵

در صورتی که $R \cong F_4 \times \mathbb{Z}_7$ ، به ازای $x_1, x_2 \in F_4$ با شرط $x_2 = x_1^{-1}$ ، انقباض گراف \mathfrak{S}_R شامل زیرگرافی یکرخت با $K_{4,5}$ با مجموعه رئوس زیر است. پس \mathfrak{S}_R گراف چنبره‌ای و تصویری نمی‌باشد.

$$\{(x_2, 5)\} \cup \{(x_1, 1), (x_1, 2), (x_1, 3), (x_1, 4)\} \cup \{(x_2, 2), (x_2, 3), (x_2, 4), (x_2, 1)\}$$

هرگاه $R \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^2) \times \mathbb{Z}_7$ یا $R \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_7$ ، به وضوح زیرگرافی یکرخت با K_{14} در ساختار گراف \mathfrak{S}_R یافت می‌شود. در نتیجه گراف چنبره‌ای و تصویری نیست.

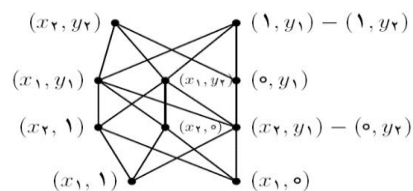
گیریم $R \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$. در این صورت انقباض گراف \mathfrak{S}_R شامل نسخه‌ای از $K_{4,5}$ با مجموعه رئوس $\{(2, 1), (2, 5)\} \cup \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$ است و لذا چنبره‌ای و تصویری نمی‌باشد.

هرگاه $R \cong \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$ ، انقباض گراف \mathfrak{S}_R شامل نسخه‌ای از $K_{4,5}$ با مجموعه رئوس زیر است. در نتیجه گراف چنبره‌ای و تصویری نمی‌باشد.

$$\{(1, 2), (5, 2)\} \cup \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\} \cup \{(2, 2), (3, 2), (4, 2)\}$$

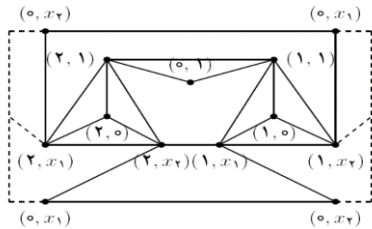
حالت ۲) $|R| = 16$

هرگاه R_1 و R_2 میدان‌هایی با دقیقاً چهار عضو باشند، به ازای $R \cong F_4 \times F_4$ ، انقباض گراف \mathfrak{S}_R شامل نسخه‌ای از G_3 ، یکی از گراف‌های موجود در [۲۰] است (شکل ۳ را ببینید). در شکل ۳، $x_1, x_2 \in F_4$ و $x_2 = x_1^{-1}$ و همچنین $y_1, y_2 \in F_4$ و $y_2 = y_1^{-1}$. در نتیجه گراف چنبره‌ای نیست.



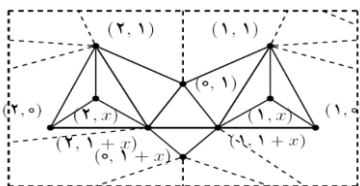
شکل ۳

با توجه به شکل رسم شده در این حالت، واضح است که \mathfrak{R} گرافی تصویری می‌باشد (شکل ۸ را ببینید).



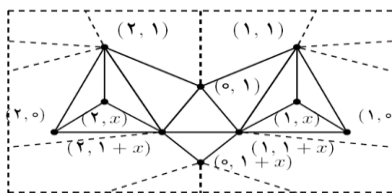
شکل ۸

در گراف \mathfrak{R} $deg((1,1)) = deg((2,1)) = 5$. بنا به لم ۴-۱، گراف $L(\mathfrak{R})$ چنبره‌ای و تصویری نخواهد بود. اگر $R \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$ ، آن‌گاه بنا به قضیه ۲-۳، گراف \mathfrak{R} مسطح نیست. نمایش نشانیده گراف روی چنبره در شکل ۹ بیان‌گر چنبره‌ای بودن گراف \mathfrak{R} است.



شکل ۹

شکل ۱۰ نمایش نشانیده \mathfrak{R} روی صفحه تصویری است.

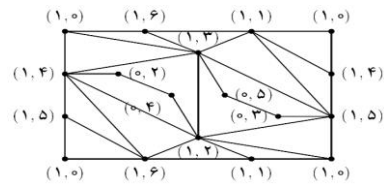


شکل ۱۰

در این حالت، گراف \mathfrak{R} شامل دو رأس $(1, 1+x)$ و $(2, 1+x)$ از درجه ۶ است. بنا به لم ۴-۱، گراف $L(\mathfrak{R})$ چنبره‌ای و تصویری نخواهد بود.

قضیه ۴-۳، به عنوان نتیجه‌ای از بحث فوق ارائه می‌گردد.

قضیه ۴-۳. فرض کنید $R \cong R_1 \times R_2$. در این صورت، اگر $|R| > 14$ ، آن‌گاه $\xi_T = \xi_P = 0$. در ادامه، اندیس چنبره‌ای و تصویری گراف \mathfrak{R} را در حالتی که $|R| \leq 14$ بررسی می‌کنیم. ابتدا گیریم $|R| = 14$. در این صورت $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7$. و لذا گراف \mathfrak{R} ، نمایش داده شده در شکل ۶، گرافی چنبره‌ای خواهد بود. از آنجا که \mathfrak{R} دارای دو رأس $(1, 2)$ و $(1, 3)$ از درجه ۷ می‌باشد، بنا به لم ۴-۱، گراف $L(\mathfrak{R})$ چنبره‌ای نخواهد بود. بنابراین، $\xi_T = 1$ همچنین، \mathfrak{R} شامل نسخه‌ای از K_7 است. در نتیجه گراف تصویری نمی‌باشد. پس $\xi_P = 0$.

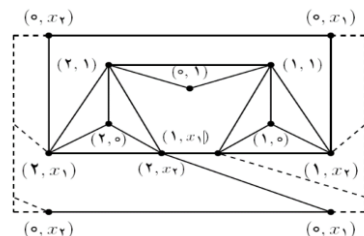


شکل ۶

حال اگر $9 < |R| < 14$ ، آن‌گاه حلقه R با یکی از حلقه‌های زیر یکرخت خواهد بود:

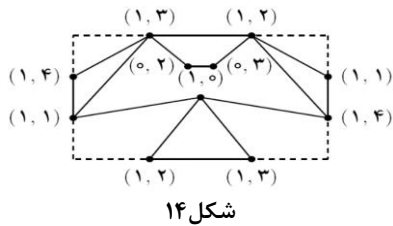
$$F_4 \times \mathbb{Z}_3 / (x^2), \mathbb{Z}_2[x] \times \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2$$

هنگامی که $R \cong \mathbb{Z}_3 \times F_4$ ، بنا به قضیه ۳-۲، گراف \mathfrak{R} مسطح نیست. در شکل ۷، با در نظر گرفتن $x_1, x_2 \in F_4$ و $x_2 = x_1^{-1}$ ، نشانیده \mathfrak{R} روی چنبره مشاهده می‌شود.



شکل ۷

گراف \mathfrak{R} که در شکل ۱۴ نمایش داده شده گرافی تصویری است.



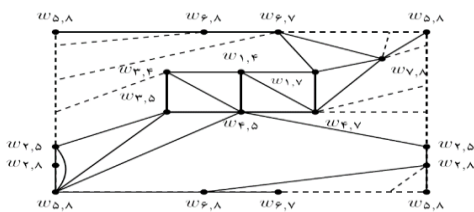
شکل ۱۴

گراف \mathfrak{R} شامل دو رأس $(1,2)$ و $(1,3)$ از درجه ۵ است. بنا به لم ۴-۱، گراف $L(\mathfrak{R})$ چنبره‌ای و تصویری نخواهد بود. در کلیه حالات فوق، $\xi_T = \xi_P = 1$.

در ادامه، فرض کنیم $|R| \leq 9$ در این صورت حلقه R با یکی از حلقه‌های زیر یکریخت است:

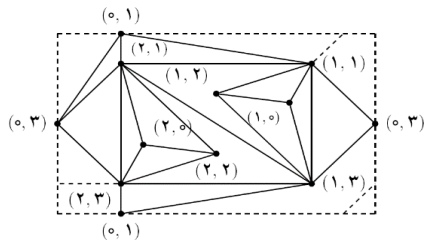
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2 \times F_4$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ بنا به قضیه ۳-۲، گراف \mathfrak{R} به ازای تمام حلقه‌های فوق، مسطح است. گیریم $R \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. به سادگی مشاهده می‌شود که انقباض گراف $L(\mathfrak{R})$ شامل زیرتقسیمی از $K_{3,3}$ است و لذا مسطح نمی‌باشد.

از طرفی، با در نظر گرفتن رئوس $v_1 = (0,1)$, $v_2 = (0,2)$, $v_3 = (1,0)$, $v_4 = (1,1)$, $v_5 = (1,2)$, $v_6 = (2,0)$, $v_7 = (2,1)$ و $v_8 = (2,2)$ در \mathfrak{R} ، گراف ترسیم شده در شکل ۱۵، نشانیده گراف $L(\mathfrak{R})$ روی چنبره است و لذا گرافی چنبره‌ای می‌باشد. از آنجایی که $L(\mathfrak{R})$ شامل دو رأس $w_{4,5}$ و $w_{4,7}$ از درجه ۶ است، $L(L(\mathfrak{R}))$ چنبره‌ای نخواهد بود. پس $\xi_T = 2$.



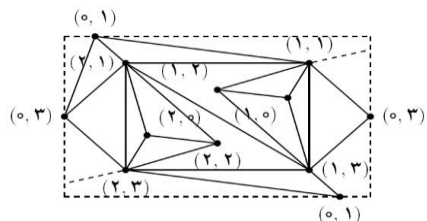
شکل ۱۵

اینک اگر $R \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ ، آن‌گاه بنا به قضیه ۳-۲، گراف \mathfrak{R} مسطح نیست. در این وضعیت، با توجه به شکل ۱۱، چنبره‌ای بودن گراف نتیجه می‌شود.



شکل ۱۱

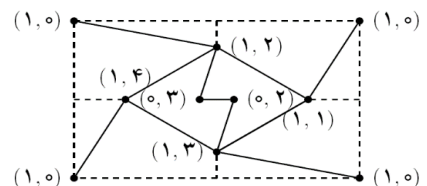
در این حالت، نشانیده گراف \mathfrak{R} روی صفحه تصویری در شکل ۱۲، مبین آن است که گراف تصویری می‌باشد.



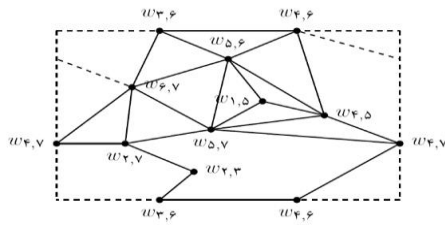
شکل ۱۲

در \mathfrak{R} ، $deg((0,1)) = deg((0,3)) = 5$. بنا به لم ۴-۱، گراف $L(\mathfrak{R})$ چنبره‌ای و تصویری نخواهد بود. در حالتی که $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ ، گراف \mathfrak{R} شامل نسخه‌ای از $K_{3,3}$ است.

لذا مسطح نمی‌باشد. گراف \mathfrak{R} روی چنبره نشانیده شده است (شکل ۱۳ را ببینید). به وضوح، \mathfrak{R} گرافی چنبره‌ای می‌باشد.

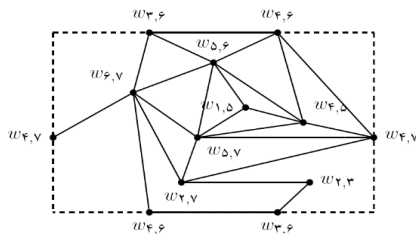


شکل ۱۳



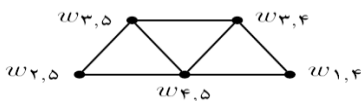
شکل ۱۷

همچنین، گراف رسم شده در شکل ۱۸ نشانیده $L(\mathfrak{S}_R)$ روی صفحه تصویری است. پس $L(\mathfrak{S}_R)$ یک گراف تصویری خواهد بود.



شکل ۱۸

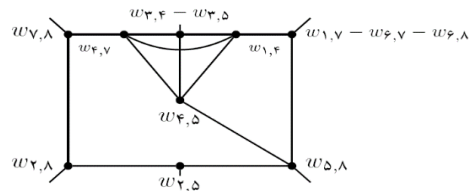
در گراف خط گراف ژاکوبسون نظیر این حلقه، $deg(w_{5,6}) = deg(w_{5,7}) = 6$ بنا به لم ۴-۱، گراف $L(L(\mathfrak{S}_R))$ چنبره‌ای و تصویری نیست. پس $\xi_T = \xi_P = 2$. اگر $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ، $v_1 = (0,1)$ ، $v_2 = (0,2)$ ، $v_3 = (1,0)$ ، $v_4 = (1,1)$ و $v_5 = (1,2)$ ، آن‌گاه $V(J_R) = \{v_1, v_2, \dots, v_5\}$ و گراف $L(\mathfrak{S}_R)$ رسم شده در شکل ۱۹ گرافی مسطح است.



شکل ۱۹

در شکل ۲۰ نشانیده گراف $L(L(\mathfrak{S}_R))$ روی چنبره مشاهده می‌شود.

در این حالت، انقباض گراف $L(\mathfrak{S}_R)$ شامل نسخه‌ای از E_{20} ، یکی از گراف‌های موجود در [۱۰] است (شکل ۱۶ را ببینید). بنابراین گراف تصویری نمی‌باشد. پس $\xi_P = 1$.



شکل ۱۶

به ازای حلقه $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ ، گراف \mathfrak{S}_R مسطح است. در این حالت، $deg((1,1)) = 5$ که از آن نتیجه می‌شود $L(\mathfrak{S}_R)$ شامل نسخه‌ای از K_5 است. پس $L(\mathfrak{S}_R)$ گراف مسطح نمی‌باشد. به علاوه، در گراف \mathfrak{S}_R داریم: $deg((1,1)) = deg((1,3)) = 5$ بنا به لم ۴-۱، $L(\mathfrak{S}_R)$ گراف چنبره‌ای و تصویری نیست. پس $\xi_T = \xi_P = 1$. هرگاه $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$ ، رأس ۱ در \mathfrak{S}_R از درجه پنج است. پس گراف $L(\mathfrak{S}_R)$ شامل زیرگرافی یکریخت با K_5 می‌باشد و در نتیجه مسطح نیست. همچنین در گراف ژاکوبسون نظیر این حلقه، $deg((1,1)) = deg((1,1+x)) = 5$ بنا به لم ۴-۱، $L(\mathfrak{S}_R)$ گراف چنبره‌ای و تصویری نیست. بنابراین $\xi_T = \xi_P = 1$.

گیریم $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F_4$ به سادگی می‌توان زیرتقسیمی از $K_{3,3}$ در ساختار انقباض $L(\mathfrak{S}_R)$ یافت و لذا گراف مسطح نیست.

همچنین با در نظر گرفتن رئوس $v_1 = (0,1)$ ، $v_2 = (0, x_1)$ ، $v_3 = (0, x_2)$ ، $v_4 = (1,0)$ ، $v_5 = (1,1)$ ، $v_6 = (1, x_1)$ ، $v_7 = (1, x_2)$ در \mathfrak{S}_R با شرط $x_2 = x_1^{-1}$ و $x_1, x_2 \in F_4$ ، گراف رسم شده در شکل ۱۸ نشانیده $L(\mathfrak{S}_R)$ روی چنبره است. پس $L(\mathfrak{S}_R)$ یک گراف چنبره‌ای خواهد بود.

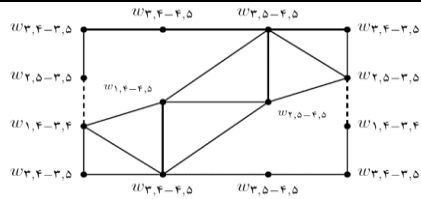
(ج) اگر $|R|=4$ ، آن‌گاه $\xi_T = \xi_P = \infty$.
 در ادامه، چنبره‌ای و تصویری بودن گراف خط مکرر \mathfrak{S}_R در حالتی که R حلقه موضعی با ایده‌آل بیشین m باشد را تحقیق می‌کنیم.

حالت (۱) $|m| \leq 3$

در این حالت، به ازای عدد اول p و عدد صحیح مثبت n ، حلقه R با یکی از \mathbb{F}_p^n ، $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$ ، \mathbb{Z}_4 ، $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2)$ یا \mathbb{Z}_9 یکرخت است. اگر $R \cong \mathbb{F}_p^n$ ، آن‌گاه \mathfrak{S}_R با اجتماع مجزای تعدادی گراف کامل (P_2) و تعدادی رؤس منفرد (P_1) یکرخت است. هنگامی که R با $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$ یا \mathbb{Z}_4 یکرخت باشد، به سادگی مشاهده می‌شود که $L(\mathfrak{S}_R)$ متشکل از یک رأس منفرد (P_1) است. در حالتی که $R \cong \mathbb{Z}_3[x]/(x^2)$ یا $R \cong \mathbb{Z}_9$ ، به ازای $n \geq 1$ ، خواهیم داشت $L^n(J_R) \cong J_R$. به وضوح، در تمام حالات مذکور $\xi_T = \xi_P = \infty$.

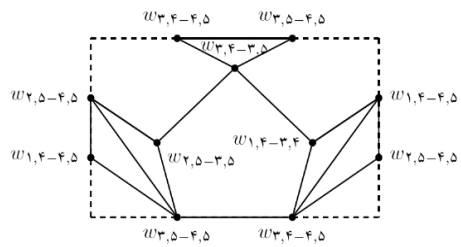
حالت (۲) $|m|=4$

در این حالت، $|R| \in \{8, 16\}$. در صورتی که R حلقه‌ای ۸ عضوی باشد، با یکی از حلقه‌های $\mathbb{Z}_4[x]/(2x, x^2)$ ، $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3)$ ، $\mathbb{Z}_2[x, y]/(x, y)^2$ یا $\mathbb{Z}_4[x]/(2x, x^2 - 2), x$ یکرخت است. بنابراین گراف \mathfrak{S}_R با گراف کامل K_4 و گراف $L(\mathfrak{S}_R)$ با گراف سه بخشی کامل $K_{2,2,2}$ یکرخت است. بنابراین $L(\mathfrak{S}_R)$ مسطح است. از آنجا که گراف $L(L(\mathfrak{S}_R))$ شامل زیر تقسیمی از K_5 است، مسطح نمی‌باشد. همچنین، انقباض گراف $L(L(\mathfrak{S}_R))$ شامل نسخه‌ای از G_2 ، یکی از گراف‌های موجود در [۲۰] است. به عنوان نمونه، G_2 را به عنوان زیرگرافی از انقباض $L(L(\mathfrak{S}_R))$ به ازای حلقه \mathbb{Z}_8 در شکل ۲۲ ببینید. در نتیجه $L(L(\mathfrak{S}_R))$ گراف چنبره‌ای نیست و لذا $\xi_T = 2$.



شکل ۲۰

در شکل ۲۱ نشانیده گراف $L(L(\mathfrak{S}_R))$ روی صفحه تصویری مشاهده می‌شود.



شکل ۲۱

همچنین در $L(L(\mathfrak{S}_R))$ نظیر این حلقه، $\deg(w_{3,4-4,5}) = \deg(w_{3,5-4,5}) = 5$ بنا به لم ۴-۱، گراف $L(L(L(\mathfrak{S}_R)))$ چنبره‌ای و تصویری نیست.

پس $\xi_T = \xi_P = 3$.

در صورتی که $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ، $v_1 = (0,1)$ ، $v_2 = (1,0)$ و $v_3 = (1,1)$ خواهیم داشت $V(J_R) = \{v_1, v_2, v_3\}$ و لذا $J_R \cong P_3$ در نتیجه، $\xi_T = \xi_P = \infty$.

قضیه ۴-۴. فرض کنید $R \cong R_1 \times R_2$ و $|R| \leq 14$

در این صورت، یکی از حالات زیر صادق است:

- (آ) اگر $|R|=14$ ، آن‌گاه $\xi_T = 1$ و $\xi_P = 0$.
- (ب) اگر $9 < |R| < 14$ ، آن‌گاه $\xi_T = \xi_P = 1$.
- (پ) اگر $|R|=9$ ، آن‌گاه $\xi_T = 2$ و $\xi_P = 1$.
- (ت) در صورتی که $|R|=8$ ،

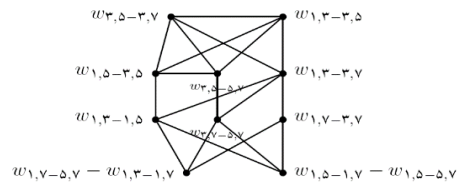
(ت-۱) اگر $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ یا $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$

آن‌گاه $\xi_T = \xi_P = 1$.

(ت-۲) اگر $R \cong \mathbb{Z}_2 \times F_4$ ، آن‌گاه $\xi_T = \xi_P = 2$.

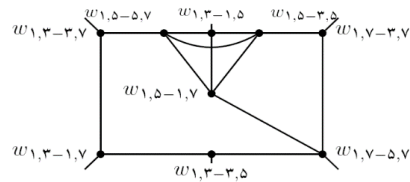
(ث) اگر $|R|=6$ ، آن‌گاه $\xi_T = \xi_P = 3$.

- (آ) اگر $|m| \leq 3$ ، آن‌گاه $\xi_T = \xi_P = \infty$.
- (ب) در صورتی که $|m| = 4$ ،
- (ب-۱) اگر $|R| = 8$ ، آن‌گاه $\xi_T = \xi_P = 2$.
- (ب-۲) اگر $|R| = 16$ ، آن‌گاه $\xi_T = 1$ و $\xi_P = 0$.
- (پ) اگر $|m| \geq 5$ ، آن‌گاه $\xi_T = \xi_P = 0$.



شکل ۲۲

همچنین، انقباض گراف $L(L(\mathfrak{S}_R))$ شامل نسخه‌ای از E_{20} ، یکی از گراف‌های موجود در [۱۰] است. در شکل ۲۳، E_{20} به عنوان زیرگرافی از انقباض $L(L(\mathfrak{S}_R))$ به ازای حلقه \mathbb{Z}_8 نمایش داده شده است. بنابراین گراف تصویری نمی‌باشد. در نتیجه $\xi_P = 2$.



شکل ۲۳

اگر R حلقه‌ای ۱۶ عضوی باشد، آن‌گاه بنا به [۳]، گراف \mathfrak{S}_R با $K_4 \cup K_{4,4}$ یکرخت است. پس چنبره‌ای خواهد بود. با کمک [۶، مثال ۲.۱۴]، داریم $\gamma(L(K_{4,4})) \geq 3$. نتیجه می‌شود که گراف $L(\mathfrak{S}_R)$ چنبره‌ای نیست و لذا $\xi_T = 1$. به وضوح، \mathfrak{S}_R تصویری نمی‌باشد و در نتیجه $\xi_P = 0$.

حالت ۳) $|m| \geq 5$.

در این وضعیت، بنا به [۳]، انقباض گراف \mathfrak{S}_R شامل زیرگرافی یکرخت با $K_{5,5}$ است. و لذا مسطح، چنبره‌ای و تصویری نمی‌باشد. بنابراین $\xi_T = \xi_P = 0$. این بخش را با قضیه ۴-۵، که نتیجه فوری بحث فوق است پایان می‌دهیم.

قضیه ۴-۵. فرض کنید R حلقه موضعی با ایده‌آل بیشین m باشد. در این صورت، یکی از حالات زیر صادق است:

فهرست منابع

- [10] H. Glover, J.P. Huneke and C.S. Wang. 103 graphs that are irreducible for the projective plane, *J. Combin Theory Ser. B* 27:332-370 (1979)
- [11] J. L. Gross and T.W. Tucker. *Topological graph theory*, John Wiley and Sons Inc., New York (1987)
- [12] I. Kaplansky. *Commutative Rings*, Revised Edition, University of Chicago Press, Chicago (1974)
- [13] K. Kuratowski, Sur le problème des courbes gauches en topologie, *Fund. Math.* 15:271-283 (1930)
- [14] W.S. Massey. *Algebraic Topology, An Introduction*, Harcourt-Brace, Orlando, FL (1967)
- [15] W. Myrvold and J. Roth. Simpler projective plane embedding, *Ars Combin.* 75:135-155 (2005)
- [16] A. Parsapour, K. Khashyarmansh, M. Afkhami and Kh. Ahmad Javaheri. Classification of finite commutative rings with planar, toroidal and projective line graphs associated to jacobson graphs, *Math. Notes* 98:813-819 (2016)
- [17] G. Ringel. *Map Color Theorem*, Springer-Verlag, New York/ Heidelberg (1974)
- [18] A.T. White. *Graphs, groups and surfaces*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second ed. (1984)
- [19] H. Whitney. Congruent graphs and connectivity of graphs, *Amer. J. Math.* 54: 150-168 (1932)
- [20] D. Zeps. Forbidden minors for projective plane are free-toroidal or non-toroidal, IUK-CE-ITI series (2009)
- [1] D. Archdeacon. A Kuratowski theorem for the projective plane, *J. Graph Theory* 5:243-246 (1981)
- [2] M.F. Atiyah and I.G. MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1969)
- [3] A. Azimi, A. Erfanian and M. Farrokhi D.G. The Jacobson graph of commutative rings, *J. Algebra Appl.* 12: 1250179-1250197 (2013)
- [4] R. Bodendiek and K. Wagner. On the minimal basis of the spindle-surface, *Combinatorics and Graph Theory*, Banach Center Publications, 25 PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw (1989)
- [5] A. Bouchet. Orientable and nonorientable genus of the complete bipartite graph, *J. Combin. Theory Ser. B* 24:24-33 (1978)
- [6] H.J. Chiang-Hsieh, P.F. Lee and H.J. ang. The embedding of line graphs associated to the zero-divisor graphs of commutative rings, *Israel J. Math.* 180:193-222 (2010)
- [7] B. Corbas and G.D. Williams. Rings of order p^5 . Part I. Nonlocal rings, *J. Algebra* 231:677-690 (2000)
- [8] R.L. Hemminger and L.W. Beineke. *Line graphs and line digraphs*, L.W. Beineke, R.J. Wilson (Eds.), *Selected Topics in Graph Theory I*, Academic Press, London (1978)
- [9] J. Fiedler, J.P. Huneke, R.B. Richter and N. Robertson. Computing the orientable genus of projective graphs, *J. Graph Theory* 20:297-308 (1995)