



## انژکتیوی S - سیستم‌های مرتب جزئی اول مرتب منظم

غلامرضا مقدسی<sup>۱\*</sup>، نسرین سروقد<sup>۲</sup>

<sup>(۱)</sup> گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۰۹/۲۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۷/۱۲/۰۴

### چکیده

مفهوم انژکتیوی یک شی در یک رسته نسبت به رده‌های مختلفی از تکریختی‌های آن رسته همواره مورد مطالعه بوده است. ما در این مقاله، مفهوم تکریختی‌های اول مرتب منظم را در رسته S - سیستم‌های مرتب جزئی روی تکواره مرتب جزئی S تعریف کرده و به مطالعه M-انژکتیوی اشیاء آن رسته می‌پردازیم، که M یک رده از تکریختی‌های اول مرتب منظم می‌باشد. بعلاوه، رفتار این تکریختی‌ها را نسبت به ساختارهایی مانند حاصلضرب، هم‌حاصلضرب و مجموع مستقیم و عقب‌بر و جلوبر S-سیستم‌های مرتب جزئی مورد بررسی قرار می‌دهیم. هدف نهایی ما، پیدا کردن رابطه بین انژکتیوی اول مرتب منظم یک شی و توسیع‌های اول مرتب از آن است.

**واژه‌های کلیدی:** S-سیستم‌های مرتب جزئی اول مرتب، تکریختی‌های اول مرتب منظم، انژکتیوی اول مرتب منظم.

۱- مقدمه

یک تکواره (نیم‌گروه)  $S$  تکواره مرتب جزئی (نیم‌گروه مرتب جزئی) نامیده می‌شود، هرگاه یک مجموعه مرتب جزئی بوده به طوری که رابطه مرتب جزئی آن،  $\leq$  سازگار با عمل دوتایی باشد. به عبارت دیگر برای هر  $s, t, s', t' \in S$  اگر  $s \leq t$  و  $s' \leq t'$ ، آن‌گاه  $ss' \leq tt'$ . یک مجموعه ناتهی  $I$  از تکواره مرتب جزئی  $S$  را یک ایده‌آل راست گوئیم، هرگاه  $IS \subseteq I$ . یک ایده‌آل راست  $I$  از تکواره مرتب جزئی  $S$  را یک ایده‌آل راست مرتب گوئیم، هرگاه برای  $s \in S$  و  $s' \in I$ ،  $s \leq s'$  ایجاب کند  $s \in I$  [۱]. برای یک زیرمجموعه  $X$  از تکواره مرتب جزئی  $S$ ، ایده‌آل مرتب تولید شده توسط  $X$  را با  $(XS)$  نمایش می‌دهیم و برابر مجموعه

$$\{t \in S \mid t \leq xs, x \in X, s \in S\}$$

می‌باشد. اگر  $X$  مجموعه‌ای متناهی باشد،  $(XS)$  را ایده‌آل راست مرتب متناهی تولید شده گوئیم و هرگاه  $X = \{x\}$  آن‌گاه به آن ایده‌آل راست مرتب اصلی گوئیم و با  $(xs)$  نمایش می‌دهیم [۱]. برای یک تکواره مرتب جزئی  $S$ ، یک  $S$ -سیستم مرتب جزئی راست  $A$ ، یک مجموعه مرتب جزئی  $A$  است به همراه تابع  $A \times S \rightarrow A$  به طوری که برای هر  $s \in S$  و هر  $a \in A$ ، اگر  $as$  نشان دهنده تصویر  $(a, s)$  تحت تابع فوق باشد، آن‌گاه برای هر  $s, t \in S$  و هر  $a, b \in A$  داشته باشیم:

$$(1) (as)t = a(st),$$

$$(2) a1 = a$$

$$(3) \text{ اگر } a \leq b \text{ آن‌گاه } as \leq bs, \text{ و}$$

$$(4) \text{ اگر } s \leq t \text{ آن‌گاه } as \leq at.$$

یک  $S$ -سیستم مرتب جزئی  $B$  را یک زیر  $S$ -سیستم مرتب جزئی از  $A$  نامیم، هرگاه  $B$  یک زیرمجموعه از  $A$  باشد و نسبت به عمل ضرب با همان ترتیب در  $A$  بسته باشد. در این مقاله به ترتیب منظور از  $S$ -سیستم مرتب جزئی و ایده‌آل،  $S$ -سیستم

مرتب جزئی راست و ایده‌آل راست می‌باشد. فرض کنید  $A$  و  $B$  دو  $S$ -سیستم مرتب جزئی باشند. در این صورت نگاشت  $f: A \rightarrow B$  یک  $S$ -همریختی مرتب جزئی نامیده می‌شود، در صورتی که برای هر  $a, a' \in A$  و  $s \in S$   $f(as) = f(a)s$ ، نامساوی  $a \leq a'$  نتیجه دهد که  $f(a) \leq f(a')$ . علاوه یک تکریختی منظم (برابرساز) دقیقاً یک نشاننده ترتیب جزئی است؛ یعنی همریختی (تکریختی)  $f: A \rightarrow B$  که در آن برای هر  $a, a' \in A$ ،  $f(a) \leq f(a')$  اگر و تنها اگر  $a \leq a'$  رسته همه  $S$ -سیستم‌های مرتب جزئی و همریختی‌های بین آن‌ها را با  $Pos-S$  نمایش می‌دهیم. جهت یادآوری، حاصلضرب یک خانواده از  $S$ -سیستم‌های مرتب جزئی، ضرب دکارتی آن‌ها با عمل مرتب مولفه‌ای می‌باشد. همچنین حاصلضرب یک خانواده از  $S$ -سیستم‌های مرتب جزئی، اجتماع منفصل آن‌ها با عمل مرتب مولفه‌ای است. معمولاً برای حاصلضرب و هم‌حاصلضرب به ترتیب از نمادهای  $\prod$  و  $\coprod$  استفاده می‌شود. برای مطالعه‌ی جزئیات بیشتر در مورد این مفاهیم می‌توان به [۲] رجوع کرد. عضو  $\theta$  از یک  $S$ -سیستم مرتب جزئی  $A$  را یک عضو ثابت یا صفر گوئیم هرگاه برای هر  $s \in S$ ،  $\theta s = \theta$ . فرض کنید  $A$  یک  $S$ -سیستم مرتب جزئی باشد. در این صورت  $A$  را مرکزی گوئیم، هرگاه  $A$  دارای یک عضو صفر یکتا باشد. یک  $S$ -سیستم مرتب جزئی  $A$  را باوفا نامیم، هرگاه  $(\theta: A) = \{s \in S \mid As = \theta\} = \{0\}$

که در آن  $\theta = \{\theta\}$  یک زیر  $S$ -سیستم مرتب جزئی از  $A$  است. ما در این مقاله سیستم‌های مرتب جزئی مرکزی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. یک هم‌نهشتی  $S$ -سیستم مرتب جزئی  $\rho$  روی  $A$ ، در واقع یک هم‌نهشتی  $S$ -سیستمی است که  $S$ -سیستم  $A/\rho$  بتواند یک  $S$ -سیستم مرتب جزئی باشد به گونه‌ای که همریختی کانونی  $S$ -سیستمی

$$\begin{aligned} d_2 s_2 &\leq c_3 s_3 \\ d_3 s_3 &\leq c_4 s_4 \\ \dots \quad d_n s_n &\leq a' \end{aligned}$$

که برای هر عدد طبیعی  $i = 1, 2, \dots, n$  داریم  
 $(c_i, d_i) \in H \cup H^{-1}$ .

۲- پیشینه تحقیق

اکنون نیم نگاهی به تاریخچه S- زیرسیستم‌های اول می‌اندازیم و با ایده گرفتن از آن زیر S- سیستم مرتب جزئی اول مرتب از یک S- سیستم مرتب جزئی را تعریف می‌کنیم. ایده‌آل‌های اول ابزارهای مفیدی در نظریه نیم‌گروه‌ها هستند که کلیفورد و پریستون در [۴] به آن‌ها پرداخته‌اند. یادآوری می‌کنیم که یک ایده‌آل I از نیم‌گروه S را اول نامند هرگاه برای  $s, s' \in S$ ، شمول  $s s' \subseteq I$ ، ایجاب کند  $s \in I$  یا  $s' \in I$ . به طور معادل، I اول است اگر و تنها اگر برای هر دو ایده‌آل A و B از S، شمول  $AB \subseteq I$  ایجاب کند  $A \subseteq I$  یا  $B \subseteq I$  (به مرجع [۴] مراجعه کنید). همان طور که این مفهوم به مدول‌های اول توسط داونز [۵] تعمیم داده شده، به S- سیستم‌های اول نیز توسط احسن [۶] تعمیم داده شده است. فرض کنید B یک زیرسیستمی از سیستم A باشد. در این صورت مجموعه

$$(B : A) = \{s \in S : As \subseteq B\}$$

یک ایده‌آل از S است که به آن ایده‌آل وابسته گوئیم. یک زیرسیستم B از سیستم A را زیرسیستم اول است هرگاه برای هر  $s \in S$  و  $a \in A$  شمول  $a s s \subseteq B$  ایجاب کند  $a \in B$  یا  $s \in (B : A)$ . یک ایده‌آل I از S اول است اگر و تنها اگر I یک زیرسیستم اولی از S باشد [۶].

در طول دهه‌های اخیر، حجم وسیعی از متون در علم جبر به بررسی آنچه که معمولاً به آن انژکتیوی یک شی از یک رسته می‌نامند، پرداخته شده است. بناشفسکی مفهوم M- انژکتیوی در یک رسته را در

$A \rightarrow A/\rho$  یک همریختی S- سیستم مرتب جزئی باشد. برای یک رابطه‌ی دوتایی R روی A، رابطه‌ی  $\leq_R$  را روی A به این صورت تعریف می‌کنیم:  $a \leq_R a'$  اگر و تنها اگر عضوهای  $a_1, a'_1, \dots, a_n, a'_n \in A$  چنان موجود باشند که  $a \leq a_1 R a'_1 \leq \dots \leq a_n R a'_n \leq a'$ .

بنابراین یک همنهشتی S- سیستمی  $\rho$  روی A یک همنهشتی S- سیستم مرتب جزئی است اگر و تنها اگر  $a \leq_\rho a' \leq_\rho a$  به همین ترتیب، یک S- سیستم مرتب جزئی خارج قسمتی  $A/\rho$  دقیقاً یک S- سیستم خارج قسمتی است که دارای ترتیب جزئی  $\rho$  [a]  $\leq$  [b]  $\rho$  اگر و تنها اگر  $a \leq_\rho b$  باشد. همچنین همنهشتی S- سیستمی مرتب جزئی  $\rho(H)$  روی A تولید شده توسط  $H \subseteq A \times A$  به صورت زیر می‌باشد (گزاره ۳.۳ از مرجع [۳] را ملاحظه کنید):  $a \rho(H) a'$  اگر و تنها اگر  $a = a'$  یا عضوهای  $s_1, s_2, \dots, s_n, t_1, t_2, \dots, t_m \in S$  چنان موجود باشند به طوری که

$$\begin{aligned} a &\leq c_1 s_1 \\ d_1 s_1 &\leq c_2 s_2 \\ d_2 s_2 &\leq c_3 s_3 \\ d_3 s_3 &\leq c_4 s_4 \\ \dots \quad d_n s_n &\leq a' \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} a' &\leq p_1 t_1 \\ q_1 t_1 &\leq p_2 t_2 \\ q_2 t_2 &\leq p_3 t_3 \\ q_3 t_3 &\leq p_4 t_4 \\ \dots \quad q_m t_m &\leq a \end{aligned}$$

که برای هر  $i = 1, 2, \dots, n$  و  $j = 1, 2, \dots, m$  داریم  $(c_i, d_i), (p_j, q_j) \in H \cup H^{-1}$ . بعلاوه، رابطه‌ی ترتیبی  $\rho(H)$  را روی A می‌توان به این شکل تعریف نمود:  $[a]_\rho \leq [b]_\rho$  اگر و تنها اگر  $a \leq_\rho a'$  یا عضوهای  $s_1, s_2, \dots, s_n \in S$  چنان موجود باشد به طوری که

$$\begin{aligned} a &\leq c_1 s_1 \\ d_1 s_1 &\leq c_2 s_2 \end{aligned}$$

نامیم، هرگاه برای هر  $s, s' \in S$ ، شمول  $sSs' \subseteq \downarrow$  یا  $s' \in I$  یا  $s \in I$  ایجاب کند  $I \cap \uparrow I$ .

(ب) یک زیر  $S$ -سیستم مرتب جزئی  $B$  از  $S$ -سیستم مرتب جزئی  $A$  را یک زیر  $S$ -سیستم مرتب جزئی اول مرتب نامیم، هرگاه برای هر  $a \in A$  و  $s \in S$  شمول  $sSs \subseteq \downarrow B \cap \uparrow B$  یا  $a \in B$  یا  $As \subseteq B$ .

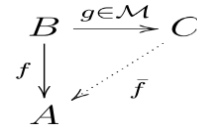
(ج)  $S$ -سیستم مرتب جزئی  $A$  را اول مرتب نامیم هرگاه  $\Theta = \{\theta\}$  یک زیر  $S$ -سیستم مرتب جزئی اول مرتب از  $A$  باشد. به خصوص، تکواره مرتب جزئی  $S$  اول مرتب است هرگاه ایده‌آل صفر  $\{0\}$  از  $S$  به عنوان یک زیر  $S$ -سیستم مرتب جزئی اول مرتب از  $S$  باشد.

(د) یک  $S$ -همریختی مرتب جزئی  $f: A \rightarrow B$  را اول مرتب نامیم، هرگاه  $f(A)$  یک زیر  $S$ -سیستم مرتب جزئی اول مرتب از  $B$  باشد. بنابراین هر  $S$ -همریختی مرتب جزئی پوشا، اول مرتب است.

**گزاره ۲-۳)** ایده‌آل  $I$  از تکواره مرتب جزئی  $S$  یک ایده‌آل اول مرتب است اگر و تنها اگر  $I$  به عنوان یک زیر  $S$ -سیستم از  $S$ ، مرتب جزئی اول مرتب باشد.

**اثبات:** فرض کنید ایده‌آل  $I$  از  $S$  یک ایده‌آل اول مرتب باشد و برای هر  $s \in S$  و  $s' \in S$  شمول  $sSs' \subseteq \downarrow I \cap \uparrow I$  را داشته باشیم. چون  $I$  یک ایده‌آل اول مرتب است، پس  $s \in I$  یا  $s' \in I$ . از آن جایی که  $I$  یک ایده‌آل است، می‌توان گفت  $s \in I$  یا  $sS' \subseteq I$ . در نتیجه  $I$  یک زیر  $S$ -سیستم مرتب جزئی اول مرتب از  $S$  است. برعکس، فرض کنید  $I$  یک زیر  $S$ -سیستم مرتب جزئی اول مرتب از  $S$  باشد. نشان می‌دهیم که کنید ایده‌آل  $I$  از  $S$  اول مرتب است. برای هر  $s, s' \in S$  شمول  $sSs' \subseteq \downarrow I \cap \uparrow I$  را داشته باشیم. در نتیجه  $s \in I$  یا  $sS' \subseteq I$ . چون  $S$  یک تکواره مرتب جزئی است، پس  $s \in I$  یا  $s' \in I$  و حکم برقرار است.  $\square$

[۷] بیان کرده است به طوری که  $M$  یک زیر رده از یکریختی‌ها می‌باشد (که به عضوهای آن  $M$ -ریخت گوئیم) و به صورت زیر تعریف می‌شود: یک شی  $A$  از یک رشته را  $M$ -انژکتیو گوئید، هرگاه برای هر  $M$ -ریخت  $g: B \rightarrow C$ ، همریختی  $f: B \rightarrow A$  را بتوان به همریختی  $\bar{f}: B \rightarrow A$  توسیع داد یعنی  $\bar{f}g = f$ .



ما در این مقاله  $M$ -انژکتیوی  $S$ -سیستم‌های مرتب جزئی، زمانی که  $M$  زیررده‌ای از تمام تکریختی‌های اول مرتب منظم در رشته سیستم‌های مرتب جزئی باشد، را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. یک  $S$ -سیستم مرتب جزئی  $A$  را یک درونبر اول مرتب از توسیع اول مرتب  $f: A \rightarrow B$  نامیم هرگاه  $f$  دارای وارون چپ  $g: B \rightarrow A$  باشد، که به آن یک درونبری اول مرتب گوئیم. نشان خواهیم داد که اگر  $f$  یک همریختی اول مرتب منظم باشد، آن‌گاه حاصلضرب  $\prod f$  و هم حاصلضرب  $\coprod f$  آن نیز تکریختی اول مرتب منظم است و برعکس. اما این امر لزوماً برای یک خانواده مجزا از تکریختی‌های اول مرتب منظم برقرار نمی‌باشد. همچنین خاصیت ایستایی عقب بر و جلوبر تکریختی‌های اول مرتب منظم را در این مقاله بررسی می‌کنیم.

### ۳- خواص رشته‌ای تکریختی‌های اول مرتب منظم

در این بخش بعد از معرفی نشاننده‌های مرتب اول مرتب به بررسی خواص رشته‌ای مربوط به حاصلضرب و هم حاصلضرب و جلوبر و عقب بر برای تکریختی‌های اول مرتب منظم می‌پردازیم.

**تعریف ۳-۱)** الف) یک ایده‌آل  $I$  از  $S$  را اول مرتب

$$\subseteq (\downarrow B : A) \cap (\uparrow B : A).$$

به وضوح می‌توان دید که

$$(\downarrow B : A) \cap (\uparrow B : A) \subseteq (\downarrow B \cap \uparrow B : A).$$

در نتیجه  $AsSs' \subseteq \downarrow B \cap \uparrow B$  به خصوص برای  $a' \in A$  داریم  $a'ss' \subseteq \downarrow B \cap \uparrow B$  چون B یک زیر S- سیستم مرتب جزئی اول مرتب از A است، پس  $a's \in B$  یا  $BS' \subseteq A$  با توجه به انتخاب  $a'$  نتیجه می‌شود  $BS' \subseteq A$  به عبارت دیگر  $\square. s' \in (B : A)$

**قضیه ۳-۵** فرض کنید S یک تکواره مرتب جزئی باشد. یک زیر S- سیستم مرتب جزئی B از یک S- سیستم مرتب جزئی A اول مرتب است اگر و تنها اگر برای هر ایده‌آل چپ I از S و هر  $C \subseteq A$  شمول  $CI \subseteq B \cap \uparrow B$  ایجاب کند  $C \subseteq B$  یا  $AI \subseteq B$

**اثبات:** فرض کنید B یک زیر S- سیستم مرتب جزئی اول مرتب از A باشد و همچنین برای یک ایده‌آل چپ I از S و برای یک زیر S- سیستم مرتب جزئی C از A داشته باشیم  $CI \subseteq \downarrow B \cap \uparrow B$  در این صورت

$$CSI \subseteq CI \subseteq \downarrow B \cap \uparrow B$$

بنابراین برای هر  $c \in C$  و هر  $i \in I$  داریم  $csi \subseteq \downarrow B \cap \uparrow B$  چون B یک زیر S- سیستم مرتب جزئی اول مرتب از A است، پس برای هر  $c \in C$  و هر  $i \in I$  داریم  $c \in B$  یا  $ai \subseteq B$  نهایتاً نتیجه می‌گیریم که  $C \subseteq B$  یا  $AI \subseteq B$  برعکس، فرض کنید برای هر  $a \in A$  و هر  $s \in S$  داشته باشیم  $aSs \subseteq \downarrow B \cap \uparrow B$  در این صورت  $(aS)(Ss) = aSSs \subseteq \downarrow B \cap \uparrow B$ .

در نتیجه  $aS \subseteq \downarrow B \cap \uparrow B$  یا

$$ASs = A(Ss) \subseteq B.$$

چون  $1 \in S$ ، پس  $a \in \downarrow B \cap \uparrow B$  یا  $As \subseteq B$   $\square$

**گزاره ۳-۳** هر زیر S- سیستم مرتب جزئی ناصر B از S- سیستم مرتب جزئی اول مرتب A یک S- سیستم مرتب جزئی اول مرتبه است.

**اثبات:** فرض کنید برای  $s \in S$  و  $b \in B$  که عضو ثابت نیست داشته باشیم  $\emptyset \cap \uparrow \emptyset \subseteq \downarrow bSs$ . از آنجایی که A یک S- سیستم مرتب جزئی اول مرتب است یعنی  $\emptyset = \{\emptyset\}$  یک زیر S- سیستم مرتب جزئی اول مرتب از A است، پس می‌توان نتیجه گرفت که  $As = \emptyset$  در نتیجه  $BS \subseteq AS = \emptyset$  بنابراین B اول مرتب است.  $\square$

**گزاره ۳-۴** فرض کنید B یک زیر S- سیستم مرتب جزئی اول مرتب از A باشد. در این صورت  $(B : A) = \{s \in S \mid As \subseteq B\}$

یک ایده‌آل اول مرتب از تکواره مرتب جزئی S است. **اثبات:** فرض کنید برای  $s, s' \in S$  داشته باشیم:  $sSs' \subseteq \downarrow (B : A) \cap \uparrow (B : A)$

و  $s \notin (B : A)$  در این صورت  $As \not\subseteq B$  در نتیجه عضو  $a' \in A$  چنان موجود است که  $a's \notin B$  حال نشان خواهیم داد که

$$\downarrow (B : A) \subseteq (\downarrow B : A).$$

برای این منظور عضو  $r \in \downarrow (B : A)$  را در نظر بگیرید. در این صورت یک عضو  $t \in (B : A)$  چنان موجود است که  $r \leq t$  و  $At \subseteq B$ . به همین ترتیب نتیجه می‌گیریم که برای هر  $a \in A$  داریم  $ar \leq at$  و  $at \in B$  بنابراین برای هر  $a \in A$  داریم  $ar \in \downarrow B$  در نتیجه می‌توان نوشت  $Ar \subseteq \downarrow B$  و به همین ترتیب  $r \in (\downarrow B : A)$  با برهانی مشابه به راحتی می‌توان نشان داد که

$$\uparrow (B : A) \subseteq (\uparrow B : A).$$

اکنون می‌توان نوشت

$$sSs' \subseteq \downarrow (B : A) \cap \uparrow (B : A)$$

$S/I$  یک تکواره مرتب جزئی اول مرتب صفردار است. با توجه به گزاره ۳-۶ یک  $S/I$  -سیستم مرتب جزئی اول مرتب  $A$  چنان موجود است به طوری که  $(\Theta : A) = [0]_I$

از این چنین نتیجه می‌شود که  $I = (\Theta : A)$ . برعکس، فرض کنید  $A$  یک  $S$  -سیستم مرتب جزئی اول مرتب باشد و  $I = (\Theta : A)$ . در این صورت  $A$  یک  $S/I$  -سیستم مرتب جزئی اول مرتب روی  $S/I$  یک تکواره مرتب جزئی خارج قسمتی ریس و باوفا می‌باشد. بنا به گزاره ۳-۶،  $S/I$  یک تکواره مرتب جزئی اول مرتب است و در نتیجه  $I$  یک ایده‌آل اول مرتب از  $S$  است. □

یک  $S$  -تکریختی مرتب جزئی اول مرتب منظم یک  $S$  -تکریختی مرتب جزئی منظم است که اول مرتب هم باشد. اکنون در ادامه این مقاله با توجه به این تعریف حاصلضرب و هم‌حاصلضرب  $S$  -تکریختی مرتب جزئی اول مرتب منظم را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

**گزاره ۳-۸** فرض کنید  $f: A \rightarrow B$  یک  $S$  -همریختی باشد. در این صورت عبارات های زیر معادل هستند:

(۱)  $S$  -همریختی  $f$  یک  $S$  -تکریختی مرتب جزئی اول مرتب منظم است.

(۲)  $S$  -همریختی مرتب جزئی  $\prod f: \prod A \rightarrow \prod B$  القا شده توسط حاصلضرب، یک  $S$  -تکریختی مرتب جزئی اول مرتب منظم است.

(۳)  $S$  -همریختی مرتب جزئی  $\coprod f: \coprod A \rightarrow \coprod B$  القا شده توسط حاصلضرب، یک  $S$  -تکریختی مرتب جزئی اول مرتب منظم است.

**اثبات:** (۱)  $\Leftarrow$  (۲) با توجه به گزاره ۷. ۱. ۲ در مرجع [۸]، داریم  $\prod f = \langle (f p_i)_{i \in I} \rangle$  یک  $S$  -همریختی یکتاست به طوری که نمودار زیر برای هر  $i \in I$  جایجایی است و برای هر

**گزاره ۳-۶** تکواره مرتب جزئی  $S$  اول مرتب است اگر و تنها اگر یک  $S$  -سیستم مرتب جزئی باوفای اول مرتب وجود داشته باشد.

**اثبات:** فرض کنید تکواره منظم جزئی  $S$  اول مرتب باشد. در این صورت  $\{0\}$  یک ایده‌آل اول مرتب از  $S$  است. عضو دلخواه  $t \in (0 : S)$  را در نظر بگیرید. در نتیجه  $St = 0$ . این به این معنی است که برای هر  $u \in S$  داریم  $ut = 0$ . از آنجایی که  $S$  به عنوان یک  $S$  -سیستم مرتب جزئی دارای صفر یکتا است، پس  $t = 0$ . بنابراین  $S$  یک  $S$  -سیستم مرتب جزئی باوفا است. برعکس، فرض کنید  $A$  یک  $S$  -سیستم مرتب جزئی باوفا باشد. در این صورت ما نشان خواهیم داد که  $S$  یک تکواره منظم جزئی اول مرتب است، یعنی  $\{0\}$  یک ایده‌آل اول مرتب از  $S$  است. فرض کنید برای  $s, s' \in S$  داشته باشیم  $sSs' \subseteq \downarrow \{0\} \cap \uparrow \{0\} = \{0\}$ .

حال اگر  $s \neq 0$  آن‌گاه  $sS \neq \Theta$ . زیرا اگر  $sS = \Theta$ ، پس به وضوح  $sS \subseteq (\Theta : A) = \{0\}$ . این نشان می‌دهد  $s = 0$  که تناقض با فرض می‌باشد. لذا عضو  $a \in A$  چنان موجود است که  $asS \neq \Theta$ . اما چون  $sSs' = \{0\}$ ، پس  $asSs' = \Theta$  یک زیر  $S$  -سیستم مرتب جزئی از  $A$  است. از آنجایی که  $A$  یک  $S$  -سیستم مرتب جزئی اول مرتب است و  $asSs' = \Theta$  و چون  $as$  یک عضو ناصفر از  $A$  است، می‌توان نتیجه گرفت که  $s' \in (\Theta : A) = \{0\}$ . در نتیجه  $\{0\}$  یک ایده‌آل اول مرتب از  $S$  است که نشان می‌دهد  $S$  یک تکواره منظم جزئی اول مرتب است.

**گزاره ۳-۷** فرض کنید  $I$  یک ایده‌آل از  $S$  باشد. ایده‌آل  $I$  یک ایده‌آل اول مرتب است اگر و تنها اگر یک  $S$  -سیستم مرتب جزئی اول مرتب  $A$  چنان موجود باشد که  $I = (\Theta : A)$ .

**اثبات:** فرض کنید  $I$  یک ایده‌آل اول مرتب از  $S$  باشد. در این صورت تکواره مرتب جزئی خارج قسمتی ریس

$i \in I$  داریم  $x_i \in \downarrow f(A) \cap \uparrow f(A)$  به وضوح نتیجه می‌گیریم  $\langle x_i \rangle \in \prod(\downarrow f(A) \cap \uparrow f(A))$ . حال شمول  $\langle b_i \rangle_i \in Ss \subseteq \downarrow \prod f(A) \cap \uparrow \prod f(A)$  نتیجه می‌دهد که  $\langle b_i Ss \rangle_i \in \prod(\downarrow f(A) \cap \uparrow f(A))$ . پس برای هر  $i \in I$ ، داریم  $b_i Ss \subseteq \downarrow f(A) \cap \uparrow f(A)$ . چون  $f(A)$  یک زیر S-سیستم مرتب جزئی اول مرتب از B است، پس برای هر  $i \in I$ ، خواهیم داشت  $b_i \in f(A)$  یا  $Bs \subseteq f(A)$ . در حالت خاص برای  $j \in I$  نیز داریم  $b_j Ss \subseteq \downarrow f(A) \cap \uparrow f(A)$ . چون  $b_j \notin f(A)$  و  $f(A)$  یک زیر S-سیستم مرتب جزئی اول مرتب از B است، پس  $Bs \subseteq f(A)$ . بنابراین  $\prod Bs \subseteq \prod f(A)$  و  $\prod f$  یک تکریختی مرتب جزئی اول مرتب منظم است.

(۲)  $\Leftarrow$  (۱) نشان خواهیم داد که  $f: A \rightarrow B$  اول مرتب است، هرگاه  $\prod f$  اول مرتب باشد. برای این منظور فرض کنید برای هر  $s \in S$  و هر  $b \in B \setminus f(A)$  داشته باشیم  $bSs \subseteq \downarrow f(A) \cap \uparrow f(A)$ .

بنابراین نتیجه می‌گیریم

$$\langle b \rangle = (b, b, b, \dots) \in \prod(B \setminus f(A)) \\ \subseteq (\prod B) \setminus (\prod f(A))$$

و

$$\langle b \rangle Ss \subseteq \prod(\downarrow f(A) \cap \uparrow f(A)).$$

اکنون نشان می‌دهیم

$$\prod(\downarrow f(A) \cap \uparrow f(A)) \subseteq \downarrow \prod f(A) \cap \uparrow \prod f(A).$$

برای این منظور عضو  $\langle x_i \rangle \in \prod(\downarrow f(A) \cap \uparrow f(A))$  را در نظر بگیرید. در این صورت برای هر  $i \in I$  داریم

$$x_i \in \downarrow f(A) \cap \uparrow f(A)$$

که می‌توان نوشت

$$\langle x_i \rangle \in \prod \downarrow f(A) \text{ یا } \langle x_i \rangle \in \prod \uparrow f(A)$$

به وضوح می‌توان نشان داد که

$$\prod \uparrow f(A) = \uparrow \prod f(A) \text{ و } \prod \downarrow f(A) = \downarrow \prod f(A)$$

$$\langle (a_i)_{i \in I} \rangle \in \prod A \text{ و } \langle f(a_i)_{i \in I} \rangle \in \prod f(A).$$

$$\begin{array}{ccc} \prod A & \xrightarrow{\prod f} & \prod B \\ p_i \downarrow & & \downarrow p'_i \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

با توجه به گزاره (۲) از مرجع [۹]، اگر  $f$  یک S-تکریختی مرتب جزئی منظم باشد، آن‌گاه  $\prod f$  نیز یک S-تکریختی مرتب جزئی منظم است. پس کافی است ثابت کنیم که  $\prod f: \prod A \rightarrow \prod B$  اول مرتب است. در حالتی که تکریختی  $f$  پوشا باشد، داریم  $\prod f(\prod A) = \prod f(A) = \prod B$ .

پس  $\prod f$  نیز پوشاست. در نتیجه  $\prod f$  اول مرتب است. پس فرض کنید  $f$  پوشا نباشد. نشان خواهیم داد که اگر  $f(A) \subset B$  یک زیر S-سیستم مرتب جزئی اول مرتب باشد، آن‌گاه  $\prod f(\prod A) \subset \prod B$  یک زیر S-سیستم مرتب جزئی اول مرتب است. فرض کنید برای هر  $s \in S$  و هر

$$\langle b_i \rangle_i \in \prod B \setminus \prod f(A) = \\ ((B \setminus f(A)) \times B \times B \times \dots) \\ \cup (B \times (B \setminus f(A)) \times B \times \dots) \\ \cup (B \times B \times (B \setminus f(A)) \times \dots) \\ \cup \dots \neq \emptyset$$

داشته باشیم:

$$\langle b_i \rangle_i Ss \subseteq \downarrow \prod f(\prod A) \cap \uparrow \prod f(\prod A) \\ = \downarrow \prod f(A) \cap \uparrow \prod f(A).$$

در این صورت عضو  $j \in I$  چنان موجود است که  $b_j \notin f(A)$ . اکنون ما نشان می‌دهیم که  $\downarrow \prod f(A) \cap \uparrow \prod f(A) \subseteq \prod(\downarrow f(A) \cap \uparrow f(A))$ .

برای این منظور عضو  $\langle x_i \rangle \in \downarrow \prod f(A) \cap \uparrow \prod f(A)$  را در نظر بگیرید. در نتیجه  $\langle x_i \rangle \in \downarrow \prod f(A)$  و  $\langle x_i \rangle \in \uparrow \prod f(A)$ . بنابراین عضوهای  $\langle x'_i \rangle, \langle x''_i \rangle \in \prod f(A)$  چنان موجود است که برای هر  $i \in I$  داریم  $x''_i \leq x_i \leq x'_i$  یعنی برای هر

یک زیر  $S$ -سیستم مرتب جزئی اول مرتب است، هرگاه  $f(A) \subseteq B$  یک زیر  $S$ -سیستم مرتب جزئی اول مرتب باشد. به ازای هر  $s \in S$  و برای هر  $(i, b) \in \sqcup B \setminus \sqcup f(A) = \sqcup (B \setminus f(A))$

شامل  $(i, b)Ss \subseteq \sqcup \sqcup f(A) \cap \uparrow \sqcup f(A)$  را در نظر بگیرید. اکنون نشان می‌دهیم که  $\sqcup \sqcup f(A) \cap \uparrow \sqcup f(A) \subseteq \sqcup (\sqcup f(A) \cap \uparrow f(A))$ .

برای این منظور عضو دلخواه  $(i, b) \in \sqcup \sqcup f(A) \cap \uparrow \sqcup f(A)$

را در نظر بگیرید. در این صورت  $(i, b) \in \sqcup \sqcup f(A)$  و  $(i, b) \in \uparrow \sqcup f(A)$  را خواهیم داشت. در نتیجه به ترتیب عضوهای  $(i, b')$  و  $(i, b'')$  در  $\sqcup f(A)$  چنان موجود است که  $(i, b'') \leq (i, b) \leq (i, b')$ . در نتیجه

$$(i, b) \in \sqcup \sqcup f(A) \cap \uparrow f(A)$$

و به همین ترتیب

$$(i, b) \in (i, \sqcup f(A) \cap \uparrow f(A)) \subseteq \sqcup (\sqcup f(A) \cap \uparrow f(A))$$

از آنجایی که داریم  $(i, bSs) \subseteq \sqcup \sqcup f(A) \cap \uparrow \sqcup f(A)$  پس  $(i, bSs) \subseteq (i, \sqcup f(A) \cap \uparrow f(A))$ . چون  $b \in B \setminus f(A)$  و  $f(A)$  یک زیر  $S$ -سیستم مرتب جزئی اول مرتب از  $B$  است، پس داریم  $bSs \in f(A)$ . که مستقیماً می‌توان نتیجه گرفت که  $\sqcup Bs \subseteq \sqcup f(A)$ .

(۳)  $\Leftarrow$  (۱) فرض کنید  $\sqcup f$  یک  $S$ -تکریختی مرتب جزئی اول مرتب منظم باشد. به وضوح  $f: A \rightarrow B$  یک  $S$ -تکریختی مرتب جزئی منظم است. حال نشان می‌دهیم که  $f$  اول مرتب است. برای هر  $s \in S$  و هر  $b \in B \setminus f(A)$ ، شامل  $(i, b)Ss \subseteq \sqcup \sqcup f(A) \cap \uparrow f(A)$  را در نظر بگیرید. در نتیجه برای هر  $i \in I$  داریم:

$$\begin{aligned} & \text{و از این رو نتیجه می‌گیریم که } \langle x_i \rangle \in \prod \downarrow f(A) \cap \uparrow f(A) \\ & \text{حال می‌توان ادعا کرد که} \\ & (b)Ss \subseteq \prod (\downarrow f(A) \cap \uparrow f(A)) \\ & \subseteq \prod f(A) \cap \uparrow \prod f(A). \end{aligned}$$

از آنجایی که  $\prod f$  اول مرتب است و همچنین چون  $(\prod B)s \subseteq \prod f(A)$ ، پس  $(b) \in (\prod B) \setminus (\prod f(A))$ . عضو دلخواه  $b's \in Bs$  را در نظر بگیرید. در نتیجه به وضوح داریم:

$$(b's) = (b's, b's, \dots) \in \prod Bs \subseteq \prod f(A)$$

و نتیجه می‌گیریم  $b's \in f(A)$ . می‌توان استنتاج کرد که  $Bs \subseteq f(A)$  و  $f(A)$  یک زیر  $S$ -سیستم مرتب جزئی اول مرتب از  $B$  است و به همین ترتیب  $f$  اول مرتب است.

(۱)  $\Leftarrow$  (۳) فرض کنید  $f: A \rightarrow B$  یک  $S$ -تکریختی مرتب جزئی اول مرتب منظم باشد. بنا بر گزاره ۱۴.۱.۲ از مرجع [۸]، خواهیم داشت که  $\sqcup f: \sqcup A \rightarrow \sqcup B$  یک  $S$ -همریختی است به طوری که طبق خاصیت جهانی حاصلضرب به طور منحصر بفرد چنان وجود دارد و نمودار زیر را جابجا می‌کند:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ u_i \downarrow & & \downarrow u'_i \\ \prod A & \xrightarrow{\prod f} & \prod B \end{array}$$

به طوری که برای هر  $i \in I$  داریم  $\sqcup f u_i = u'_i f$ . در نتیجه  $\sqcup f u_i(A) = u'_i f(A)$  و به عبارت دیگر  $\sqcup f(i, A) = (i, f(A))$  و همچنین خواهیم داشت  $\sqcup f(\sqcup A) = \cup_i (i, f(A)) = \sqcup f(A)$

طبق گزاره (۵) از مرجع [۹]،  $\sqcup f$  یک  $S$ -تکریختی مرتب جزئی منظم است هرگاه  $f$  یک  $S$ -تکریختی مرتب جزئی منظم باشد. پس فقط کافی است نشان دهیم  $\sqcup f$  اول مرتب است و همچنین  $\sqcup f(\sqcup A) = \sqcup f(A) \subseteq \sqcup B$



**نکته ۹-۳)** فرض کنید  $f: A \rightarrow B$  یک  $S$ -تکریختی مرتب جزئی اول مرتب منظم باشد به طوری که  $A$  و  $B$  حاوی عضو ثابت یکتا باشند.  $S$ -همریختی مرتب جزئی القا شده توسط حاصلضرب  $\prod f$  را در نظر بگیرید. می‌دانیم که  $\oplus f: \oplus A \rightarrow \oplus B$

برابر با تحدید  $\prod f: \prod A \rightarrow \prod B$  به  $\oplus A$  می‌باشد. از این رو با توجه به گزاره ۸-۳،  $\prod f$  یک  $S$ -تکریختی مرتب جزئی اول مرتب منظم است و در نتیجه  $\oplus f$  نیز یک  $S$ -تکریختی مرتب جزئی اول مرتب منظم است. رسته  $\mathcal{A}$  را دارای خاصیت  $M$ -انتقالی گوئیم هرگاه  $M$  یک زیر رده‌ای از تکریختی‌ها باشد و برای هر نمودار

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & C \\ g \downarrow & & \\ B & & \end{array}$$

که  $f, g \in M$ ، آن‌گاه در نمودار جایجایی زیر  $h \in M$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow k \\ C & \xrightarrow{h} & D \end{array}$$

اکنون این خاصیت را که به خاصیت ایستایی جلوبر نیز شناخته شده است را برای رده تمام  $S$ -تکریختی‌های مرتب جزئی اول مرتب منظم مورد مطالعه قرار می‌دهیم ( برای اطلاعات بیشتر از مفهوم جلوبر، جلوبرچندگانه و عقب بر می‌توان به مرجع [۸] رجوع کرد).

**قضیه ۱۰-۳)** جلوبرها در رسته  $S$ -سیستم‌های مرتب جزئی،  $S$ -تکریختی‌های مرتب جزئی اول مرتب منظم را انتقال می‌دهند.

**اثبات:** در قضیه (۱) از مرجع [۹] نشان داده شده است که جلوبرها  $S$ -تکریختی‌های مرتب جزئی

$$(i, b)Ss = (i, bSs) \subseteq (i, \downarrow f(A) \cap \uparrow f(A)) \subseteq \sqcup (\downarrow f(A) \cap \uparrow f(A))$$

حال نشان می‌دهیم که

$$\sqcup (\downarrow f(A) \cap \uparrow f(A)) \subseteq \downarrow \sqcup f(A) \cap \uparrow \sqcup f(A).$$

فرض کنید  $(j, b) \in \sqcup (\downarrow f(A) \cap \uparrow f(A))$ . در این صورت  $b \in \downarrow f(A) \cap \uparrow f(A)$ . از این رو عضوهای  $b_1, b_2 \in f(A)$  چنان موجود است که  $b_2 \leq b \leq b_1$ . می‌توان استنتاج کرد که به ازای  $(j, b_1), (j, b_2) \in (j, f(A)) \subseteq \sqcup f(A)$  داریم  $(j, b_2) \leq (j, b) \leq (j, b_1)$ . به وضوح این نشان می‌دهد که  $(j, b) \in \downarrow \sqcup f(A) \cap \uparrow \sqcup f(A)$ . از آن جایی که می‌دانیم  $\sqcup f$  اول مرتب است و همچنین به ازای

$$(i, b) \in \sqcup (B \setminus f(A)) = (\sqcup B) \setminus (\sqcup f(A))$$

داریم

$$(i, bSs) \subseteq \sqcup (\downarrow f(A) \cap \uparrow f(A)) \subseteq \downarrow \sqcup f(A) \cap \uparrow \sqcup f(A)$$

به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که

$(\sqcup B)s \subseteq \sqcup f(A)$ . حال عضو دلخواه  $bs \in Bs$  را در نظر بگیرید. در این صورت به وضوح برای هر اندیس  $i \in I$  داریم

$$(i, bs) \in \sqcup (Bs) = (\sqcup B)s \subseteq f(A)$$

و به همین ترتیب  $bs \in f(A)$ . از این رو همان طور

که خواسته شده است داریم  $\square Bs \subseteq f(A)$

یادآوری می‌کنیم که منظور از جمع مستقیم خانواده  $\{A_i: i \in I\}$  از  $S$ -سیستم‌های مرتب جزئی که هر یک دارای صفر یکتا هستند، زیر  $S$ -سیستم مرتب جزئی از حاصلضرب  $\prod A_i$  می‌باشد که شامل همه  $(a_i)_{i \in I}$ هایی است که به ازای همه  $i \in I$  به استثنای تعداد متناهی‌ای داریم  $a_i = \theta$  و آن را با  $\oplus A_i$  نمایش می‌دهیم. حال به عنوان یک نتیجه از گزاره ۸-۳ به نکته زیر توجه کنید.

$$[(1, b')]_{\rho} ts \subseteq \downarrow q_C(C)$$

و  $[(1, b')]_{\rho} ts \subseteq \uparrow q_C(C)$ . در نتیجه عضوهای  $[(2, c_2)]_{\rho} \in q_C(C)$  و  $[(2, c_1)]_{\rho} \in q_C(C)$  چنان موجود اند که  $[(1, b' ts)]_{\rho} < [(2, c_1)]_{\rho}$  و  $[(2, c_2)]_{\rho} < [(1, b' ts)]_{\rho}$ . طبق گزاره ۳.۳. مرجع [۲]، برای هر  $t \in S$  عضوهای  $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$  و  $s_1, s_2, \dots, s_n \in S$  چنان موجود اند که

$$\begin{aligned} (1, b' ts) &\leq (1, f(a_1)s_1) \\ (1, f(a_2)s_2) &\leq (1, f(a_3)s_3) \\ (2, g(a_1)s_1) &\leq (2, g(a_2)s_2) \\ (2, g(a_n)s_n) &\leq (2, c_1) \end{aligned}$$

و همچنین برای هر  $t \in S$  عضوهای  $a'_1, a'_2, \dots, a'_n \in A$  و  $s'_1, s'_2, \dots, s'_n \in S$  چنان موجود اند که

$$\begin{aligned} (2, c_2) &\leq (2, g(a'_1)s'_1) \\ (2, g(a'_2)s'_2) &\leq (2, g(a'_3)s'_3) \\ (1, f(a'_1)s'_1) &\leq (1, f(a'_2)s'_2) \\ (1, f(a'_n)s'_n) &\leq (1, b' ts). \end{aligned}$$

می‌توان دریافت که برای هر  $t \in S$ ، داریم  $b' ts \leq f(a_1 s_1)$  و  $f(a'_n s'_n) \leq b' ts$ . به عبارت دیگر می‌توان نتیجه گرفت که  $b' Ss \subseteq \downarrow f(A)$  و  $b' Ss \subseteq \uparrow f(A)$  و به همین ترتیب داریم  $b' Ss \subseteq \downarrow f(A) \cap \uparrow f(A)$ . از این که  $f(A)$  یک زیر  $S$ -سیستم مرتب جزئی از  $B$  است، پس نتیجه می‌گیریم که  $b' \in f(A)$  یا  $Bs \subseteq f(A)$ . حال اگر  $b' \in f(A)$  پس عضو  $a' \in A$  چنان موجود است که  $b' = f(a')$  در نتیجه

$$\begin{aligned} [(1, b')]_{\rho} &= [(1, f(a'))]_{\rho} \\ &= [(2, g(a'))]_{\rho} \in q_C(C) \end{aligned}$$

که یک تناقض با انتخاب  $[(i, d)]_{\rho} \notin q_C(C)$ . بنابراین نتیجه می‌گیریم که  $Bs \subseteq f(A)$ . حال ادعا می‌کنیم که  $Ds \subseteq q_C(C)$ . برای این منظور فرض کنید که  $[(i, d')]_{\rho} \in D$ . در این صورت با توجه به

منظم را انتقال می‌دهند. از این رو فقط کافی است آن را برای تکریختی‌های اول مرتب اثبات کنیم. در نظر بگیرید  $D = (B \cup C) / \rho$  به طوری که  $\rho$  همنهشتی تولید شده توسط مجموعه زوج مرتب‌های  $\{(g(a), f(a)) \mid a \in A\}$

می‌باشد و  $B \cup C = (\{1\} \times B) \cup (\{2\} \times C)$  و همچنین قرار دهید  $q_B = \pi \uparrow_B$  و  $q_C = \pi \uparrow_C$  به طوری که  $\pi$  بروریختی کانونی به توی  $B \cup C$  و  $u_B$  و  $u_C$  نگاشت‌های تزریق هستند. در این صورت  $(D, (q_C, q_B), (g, f))$  جلوبر  $(g, f)$  در رسته  $\text{Pos-S}$  است. اکنون فرض کنید  $f: A \rightarrow B$  یک  $S$ -تکریختی مرتب جزئی اول مرتب منظم باشد. نشان می‌دهیم که  $q_C$  یک  $S$ -تکریختی مرتب جزئی اول مرتب منظم است، یعنی

$$\begin{aligned} q_C(C) &= \{q_C(c) \mid c \in C\} \\ &= \{\pi u_C(c) \mid c \in C\} \\ &= \{[(2, c)]_{\rho} \mid c \in C\} \end{aligned}$$

یک زیر  $S$ -سیستم مرتب جزئی اول مرتب است. فرض کنید برای هر  $s \in S$  و هر  $[(i, d)]_{\rho} \in D$  داشته باشیم

$$[(i, d)]_{\rho} Ss \subseteq \downarrow q_C(C) \cap \uparrow q_C(C)$$

که اگر  $i = 1$  یا  $i = 2$ ، آن‌گاه به ترتیب  $d \in B$  یا  $d \in C$ . از این رو باید نشان دهیم که

$$\begin{aligned} [(i, d)]_{\rho} \in q_C(C) \text{ یا} \\ Ds \subseteq q_C(C) = \{[(2, c)]_{\rho} \mid c \in C\}. \end{aligned}$$

اگر  $[(i, d)]_{\rho} \in q_C(C)$  که در این صورت چیزی برای اثبات نخواهیم داشت. از این رو فرض کنید  $[(i, d)]_{\rho} \notin q_C(C)$  و نشان می‌دهیم که  $Ds \subseteq q_C(C)$ . این نشان می‌دهد که عضو  $b' \in B$  چنان موجود است که  $[(i, d)]_{\rho} = [(1, b')]_{\rho}$ . حال چون داریم  $[(1, b')]_{\rho} Ss \subseteq \downarrow q_C(C)$  و  $[(1, b')]_{\rho} Ss \subseteq \uparrow q_C(C)$  پس برای هر  $t \in S$  داریم

سیستم اول مرتب از A است. برای این منظور فرض کنید برای هر  $a \in A$  و هر  $s \in S$  که  $As \notin p_A(P)$  داشته باشیم  $aSs \subseteq \downarrow p_A(P) \cap \uparrow p_A(P)$  بنابراین  $aSs \subseteq \uparrow p_A(P)$  و  $aSs \subseteq \downarrow p_A(P)$  نتیجه می‌توان نوشت که برای هر  $t \in S$  داریم  $ats \in \uparrow p_A(P)$  و  $ats \in \downarrow p_A(P)$  در این صورت عضوهای  $a_1, a_2 \in p_A(P)$  چنان موجود است که  $a_2 \leq ats \leq a_1$  این نشان می‌دهد که  $g(a_2) \leq g(a)ts = g(ats) \leq g(a_1)$

از آن جایی که  $a_1, a_2 \in p_A(P)$  نتیجه می‌گیریم که عضوهای  $b_1, b_2 \in B$  چنان موجود است که  $g(a_1) = f(b_1)$  و  $g(a_2) = f(b_2)$  بنابراین برای هر  $t \in S$  داریم  $f(b_2) = g(a_2) \leq g(a)ts = g(ats) \leq g(a_1) = f(b_1)$

و این ایجاب می‌کند که  $g(a)Ss \subseteq \downarrow f(B)$  و  $g(a)Ss \subseteq \uparrow f(B)$  و به همین ترتیب داریم  $g(a)Ss \subseteq \downarrow f(B) \cap \uparrow f(B)$  چون  $f(B)$  یک زیر S-سیستم مرتب جزئی اول مرتب از C است، پس داریم  $g(a) \in f(B)$  یا  $Cs \subseteq f(B)$ . حال اگر  $g(a) \in f(B)$  عضو  $b \in B$  چنان موجود است که  $f(b) = g(a)$  از این رو می‌توان نتیجه گرفت که  $a \in p_A(P)$  و یک زیر S-سیستم مرتب جزئی اول مرتب از A است. اکنون نشان می‌دهیم  $Cs \not\subseteq f(B)$  و تنها داریم  $g(a) \in f(B)$ . با توجه به فرض  $As \notin p_A(P)$ ، پس عضو  $a' \in A$  چنان موجود است که  $a's \notin p_A(P)$ . از این رو برای هر  $b \in B$  داریم  $g(a')s = g(a's) \neq f(b)$ .

در نتیجه عضو  $c = g(a') \in C$  چنان موجود است که برای هر  $b \in B$  داریم  $cs \neq f(b)$ . بنابراین  $Cs \not\subseteq f(B)$  و حالت دیگر ما برقرار است یعنی  $g(a) \in f(B)$  با توجه به تعریف P، یک عضو  $b \in B$  چنان موجود است که  $g(a) = f(b)$  و

اینکه  $D = (B \cup C)/\rho$  عضوهای  $b' \in B$  یا  $c' \in C$  به ترتیب چنان موجود است که  $[(i, d')]_\rho = [(1, b's)]_\rho$  یا  $[(2, c's)]_\rho = [(i, d')]_\rho$ . اکنون اگر داشته باشیم  $[(1, b's)]_\rho = [(i, d')]_\rho$ ، پس چون  $Bs \subseteq f(A)$  عضو  $a' \in A$  چنان وجود دارد که  $b's = f(a')$  بنابراین می‌توان نوشت:  $[(1, b's)]_\rho = [(1, f(a'))]_\rho = [(2, g(a'))]_\rho \in q_C(C)$ .

اگر  $[(i, d')]_\rho = [(2, c's)]_\rho$ ، چون  $Cs \subseteq C$  پس  $[(2, c's)]_\rho \in 0q_C(C)$ . این مشخص می‌کند که  $\square. Ds \subseteq q_C(C)$  با روشی مشابه برای جلوبر، می‌توان برای جلوبرهای چندگانه نیز قضیه ۱۰-۳ را بیان و اثبات نمود که نتیجه زیر بدست می‌آید.

**نتیجه (۱۱-۳)** جلوبرهای چندگانه نشاننده های مرتب اول مرتب را انتقال می‌دهند.

**گزاره (۱۲-۳)** عقب‌برها نشاننده‌های مرتب اول را انتقال می‌دهند.

**اثبات:** نمودار مربعی عقب بر زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{P_A} & A \\ P_B \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

به طوری که  $P = \{(a, b) : g(a) = f(b)\}$  یک زیر S-سیستم مرتب جزئی از  $A \times B$  می‌باشد و  $p_A : P \rightarrow A$  و  $p_B : P \rightarrow B$  به ترتیب نگاشت‌های تصویر تحدید شده به P روی مولفه اول و دوم هستند. فرض کنید f تکریختی مرتب جزئی اول مرتب منظم باشد. نشان می‌دهیم  $p_A$  تکریختی مرتب جزئی اول مرتب منظم است. براساس گزاره (۴) از مرجع [۹]،  $p_A$  تکریختی منظم است، پس فقط کافی است نشان دهیم  $p_A(P)$  یک زیر S-

یعنی می‌توانیم تفاوتی بین یک  $S$ -تکریختی مرتب جزئی اول مرتب منظم بین دو  $S$ -سیستم مرتب جزئی و یک توسیع اول مرتب قابل نباشیم. در نتیجه در ادامه لم زیر را خواهیم داشت:

لم ۲ - ۴) یک  $S$ -سیستم مرتب جزئی  $A$  انژکتیو اول مرتب منظم است اگر و تنها اگر برای هر  $S$ -سیستم مرتب جزئی  $C$  و زیر  $S$ -سیستم مرتب جزئی  $B$  از  $C$  و هر  $S$ -همریختی مرتب جزئی  $f: B \rightarrow A$ ،  $S$ -همریختی  $\bar{f}: C \rightarrow A$  چنان موجود است که  $\bar{f}|_B = f$ .

قضیه ۳ - ۴) یک  $S$ -سیستم مرتب جزئی  $A$  انژکتیو اول مرتب منظم است اگر و تنها اگر یک درونبر از هر توسیع اول مرتبش باشد.

اثبات: فرض کنید  $A$  انژکتیو اول مرتب منظم باشد. نمودار زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ id_A \downarrow & & \\ A & & \end{array}$$

به طوری که  $f: A \rightarrow B$  یک نشاننده مرتب جزئی اول مرتب است. در این صورت چون  $A$  انژکتیو اول مرتب منظم است، پس یک  $S$ -همریختی مرتب جزئی  $\bar{id}: B \rightarrow A$  چنان موجود است که  $\bar{id}f = id_A$ . این نشان می‌دهد که  $\bar{id}$  یک درونبری از  $f$  است. برای عکس قضیه، نمودار زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & C \\ g \downarrow & & \\ A & & \end{array}$$

به طوری که  $f$  یک  $S$ -تکریختی مرتب جزئی اول مرتب است که می‌تواند به صورت نمودار جابجایی زیر کامل شود،

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & C \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ A & \xrightarrow{k} & Q \end{array}$$

$(a, b) \in P$ . در نتیجه  $a \in p_A(P)$ .

#### ۴- انژکتیوی اول مرتب منظم

هم اکنون با توجه به رده تمام  $S$ -تکریختی‌های مرتب جزئی اول مرتب منظم مفهوم انژکتیوی اول مرتب منظم را برای یک  $S$ -سیستم مرتب جزئی بیان و برخی از خواص آن را بررسی می‌کنیم.

تعریف (۱-۴) الف) یک  $S$ -سیستم مرتب جزئی  $A$  را انژکتیو اول مرتب منظم گوییم، هرگاه برای هر  $S$ -تکریختی مرتب جزئی اول مرتب  $g: B \rightarrow C$ ، هر  $S$ -همریختی مرتب جزئی  $f: B \rightarrow A$  قابل توسیع دادن به یک همریختی  $\bar{f}: C \rightarrow A$  باشد به طوری که  $\bar{f}g = f$ .

ب) یک  $S$ -سیستم مرتب جزئی  $A$  را انژکتیو اول مرتب منظم ضعیف گوییم، هرگاه انژکتیو منظم نسبت به تمام نشاننده‌های مرتب جزئی از تمام ایده‌آل‌های اول مرتب به توی  $S$  باشد.

ج) یک  $S$ -سیستم مرتب جزئی  $A$  را انژکتیو اول مرتب منظم متناهی تولید شده (اصلی) گوییم، هرگاه برای هر  $S$ -تکریختی مرتب جزئی اول مرتب  $g: F \rightarrow C$  از یک  $S$ -سیستم مرتب جزئی متناهی تولید شده (دوری)  $F$  به  $S$ -سیستم مرتب جزئی  $C$ ، هر  $S$ -همریختی مرتب جزئی  $f: F \rightarrow A$  قابل توسیع دادن به یک همریختی  $h: C \rightarrow A$  باشد به طوری که  $hg = f$ .

د) یک  $S$ -سیستم مرتب جزئی  $A$  را انژکتیو اول مرتب منظم ایده‌آل مرتب جزئی متناهی تولید شده (اصلی) گوییم، هرگاه هر  $S$ -همریختی مرتب جزئی  $f: I \rightarrow A$  از یک ایده‌آل مرتب جزئی متناهی تولید شده (اصلی)  $I$  به  $S$ ، قابل توسیع دادن به یک  $S$ -همریختی از  $S$  به  $A$  باشد.

این تعاریف را در حد یکریختی این‌گونه می‌توان نوشت که به جای هر  $S$ -سیستم مرتب جزئی،  $S$ -سیستم مرتب جزئی یکریخت با آن را به کار برد.

نشان می‌دهیم B یک توسیع اول مرتبی از A است. فرض کنید برای هر  $s \in S$  و برای هر  $b \in B \setminus A = \{\theta_1\} \cup \{\theta_2\}$  داشته باشیم  $bSs \subseteq \downarrow A \cap \uparrow A$  اگر b به ترتیب برابر با  $\theta_1$  یا  $\theta_2$  باشد، آن‌گاه به ترتیب داریم

$$bSs = \{\theta_1\} \notin \downarrow A \cap \uparrow A$$

$$bSs = \{\theta_2\} \notin \downarrow A \cap \uparrow A.$$

چون زمانی که  $\theta_1 \in \downarrow A$  داریم  $\theta_1 \notin \uparrow A$  و همچنین زمانی که  $\theta_2 \in \uparrow A$  خواهیم داشت که در این صورت زیرمجموعه ای از  $\downarrow A \cap \uparrow A$  نیست. در نتیجه A یک زیر S-سیستم مرتب جزئی از B است. چون A انژکتیو اول مرتب منظم است، پس S-همریختی درونبری  $f: B \rightarrow A$  برای توسیع اول مرتب B از A موجود است. در این صورت عضوهای صفر  $f(\theta_1)$  و  $f(\theta_2)$  به ترتیب عضو ابتدا و انتهای A هستند. □

عکس قضیه ۵-۴ در حالت‌های خاصی از انژکتیوی سیستم‌های مرتب جزئی در رده خاص تکریختی‌های منظم مورد بررسی قرار گرفته است. برای مثال انژکتیوی سیستم‌های مرتب جزئی در رده تکریختی‌های منظم بسته پایینی در قضیه ۲.۶ از [۱۰] را می‌توان مشاهده کرد. حال ما در اینجا این موضوع را برای سیستم‌های مرتب جزئی انژکتیو اول مرتب منظم ایده‌آل مرتب جزئی روی گروه‌های مرتب جزئی در قضیه زیر بررسی می‌کنیم.

**قضیه ۶-۴** هر  $G$ -سیستم مرتب جزئی روی تکواریه مرتب جزئی  $G$  انژکتیو اول مرتب منظم ایده‌آل مرتب جزئی است اگر و تنها اگر از بالا کراندار توسط یک عضو ثابت باشد. **اثبات:** شرط لازم: با توجه به قضیه ۵-۴ برقرار است. شرط کافی: فرض کنید  $G$  یک تکواریه مرتب جزئی باشد و  $A$  یک  $G$ -سیستم مرتب جزئی از بالا کراندار توسط یک عضو ثابت  $T$  باشد. برای یک

به طوری که  $Q$  جلوبر  $(B, (f, g))$  است. با توجه به قضیه ۱۰-۳، چون  $f$  یک S-تکریختی مرتب جزئی اول مرتب است، پس  $k$  نیز یک S-تکریختی مرتب جزئی اول مرتب است. طبق فرض درونبری  $\bar{k}: Q \rightarrow A$  چنان موجود است که  $\bar{k}\bar{k} = id_A$ . اکنون قرار دهید  $\bar{g}: C \rightarrow A$  که نمودار را جابجایی می‌کند. بنابراین A انژکتیو اول مرتب منظم است. □

**گزاره ۴-۴** هر ایده‌آل مرتب جزئی I از تکواریه مرتب جزئی S که انژکتیو اول مرتب منظم باشد یک ایده‌آل مرتب جزئی دوری است که توسط یک عضو پوچ توان تولید می‌شود.

**اثبات:** نشاننده مرتب اول مرتب  $g: I \rightarrow S$  را در نظر بگیرید. چون I انژکتیو اول مرتب منظم است S-همریختی  $id: I \rightarrow I$  می‌تواند به S-همریختی  $\bar{id}: S \rightarrow I$  توسیع داده شود. در نتیجه می‌توان ادعا کرد که I یک ایده‌آل مرتب جزئی تولید شده توسط عضو خوتوان  $(1) \bar{id}$  می‌باشد. توجه کنید که  $(1) \bar{id} \in I$  داریم:

$$\bar{id}(1) \bar{id}(1) = \bar{id}(1 \bar{id}(1))$$

$$= \bar{id}(\bar{id}(1)) = \bar{id}(1).$$

و برای هر  $s \in I$  داریم

$$s = \bar{id}(s) = \bar{id}(1s) = \bar{id}(1)s$$

**قضیه ۵-۴** هر S-سیستم مرتب جزئی انژکتیو اول مرتب منظم کراندار بین دو عضو ثابت است. **اثبات:** فرض کنید A یک S-سیستم مرتب جزئی انژکتیو اول مرتب منظم و همچنین زیر S-سیستم مرتب جزئی از S-سیستم مرتب جزئی

$$B = A \cup \{\theta_1\} \cup \{\theta_2\}$$

باشد که عضوهای صفر  $\theta_1$  و  $\theta_2$  به A به طوری الصاق شده اند که برای هر  $a \in A$  داریم  $\theta_1 \leq a \leq \theta_2$ .

ایده‌آل مرتب جزئی و اول مرتب  $I$  از  $S$  تکریختی مرتب جزئی اول مرتب  $S: I \rightarrow g$  را در نظر گرفته و همچنین فرض کنید  $f: I \rightarrow A$  یک همریختی باشد. اکنون نگاشت  $\bar{f}$  را تعریف می‌کنیم که برای هر  $s \in I, s \notin I, \bar{f}(s) = T$  و برای هر  $s \in I, \bar{f}|_I = f$ . اکنون نشان می‌دهیم که این همریختی حافظ ترتیب است. یعنی اگر  $s \leq s', \bar{f}(s) \leq \bar{f}(s')$  سه حالت پیش خواهد آمد.

حالت اول: فرض کنید  $s \leq s'$  و  $s, s' \in I$ . در این حالت  $\bar{f}(s) = f(s) = f(s') = \bar{f}(s')$ .

حالت دوم: فرض کنید  $s \leq s'$  و  $s \in I, s' \notin I$ . در این صورت داریم  $\bar{f}(s) = f(s) \leq T = \bar{f}(s')$ .

و حالت سوم: فرض کنید  $s \leq s'$  و  $s \notin I, s' \in I$ .

که این حالت امکان پذیر نیست چون با اینکه  $I$  یک ایده‌آل مرتب جزئی است تناقض دارد و باید  $s$  عضوی از  $I$  باشد. اکنون کافی است نشان دهیم  $\bar{f}$  حافظ عمل است یعنی برای هر  $s, t \in S$  داریم  $\bar{f}(st) = \bar{f}(s)t$  چون  $I$  یک ایده‌آل است، پس  $s = stt^{-1} \in I$ . در نتیجه می‌توان گفت  $\bar{f}(st) = f(st) = f(s)t = \bar{f}(s)t$  اکنون فرض کنید که  $st \notin I$ . چون  $I$  یک ایده‌آل است، پس  $s \notin I$ . در نتیجه

$$\bar{f}(st) = T = Tt = \bar{f}(s)t.$$

بنابراین نمودار زیر جایابی است و  $A$  یک  $G$ -سیستم انژکتیو اول مرتب منظم ایده‌آل مرتب جزئی است.

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{g} & S \\ f \downarrow & \swarrow \bar{f} & \\ A & & \end{array}$$

## فهرست منابع

- [1] L. Shahbaz, M. Mahmoudi, Injectivity with respect to down closed regular monomorphisms, *Semigroup Forum*, 91 (3):584-600 (2015)
- [2] S. Bulman-Fleming, M. Mahmoudi, The category of S-posets, *Semigroup Forum* 71(3):443-461 (2005)
- [3] X, Shi. On flatness properties of cyclic S-posets, *Semigroup Forum*, 77:248-266 (2008)
- [4] A. H. Clifford and G. B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups I, II*, Providence, (1961, 1967)
- [5] J. Dauns, Prime modules, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 298:156-181 (1978)
- [6] J. Ahsan, L. Zhongkui, Prime and semiprime acts over monoids with zero, *Mathematical Journal of Ibaraki University*. 33:9-15 (2001)
- [7] B. Banaschewski, Injectivity and essential extensions in equational classes of algebras, *Queens Papers in Pure and Applied Mathematics*, 25:131-147 (1970)
- [8] M. Kilp, U. Knauer, A. Mikhalev, *Monoids, Acts and Categories*, Walter deGruyter, Berlin, (2000)
- [9] H. Rasouli, Categorical Properties of Regular Monomorphisms of S-posets, *European Journal of Pure Applied Mathematics*. 7(2):166-178 (2014)
- [10] F. Farsad, A. Madanshekaf, On unitary down-closed monomorphisms of pomonoid actions. *Quaestiones Mathematicae* 1-11 (2017)

