دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی، خرداد و تیر ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

برآوردیابی بیز انقباضی پارامتر مقیاس توزیع نمایی دو پارامتری مبتنی بر داده‌های سانسور نوع دوم فزاینده و تابع زیان آنتروپی تعمیم‌یافته

مهدی بازیار دیزآبادی[۱]، عین‌الله دیری*[۱]، عزت‌الله بالوئی جامخانه[۱]

(۱) گروه آمار، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قائم‌شهر، قائم‌شهر، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۸/۰۷/۱۱   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۲/۰۷

چکیده

هدف اصلی ما در این مقاله تحلیل برآوردگرهای بیز انقباضی پارامتر مقیاس توزیع نمایی دوپارامتری تحت تابع زیان آنتروپی تعمیم‌یافته براساس توزیع پیشین مزدوج و داده‌های سانسورشده نوع دوم فزاینده در حضور پارامتر مکان می‌باشد. به همین منظور در این مقاله ابتدا برآوردگر انقباضی پارامتر مقیاس را بر اساس برآوردگر بیزی که تحت تابع زیان تعمیم یافته آنتروپی و توزیع پیشین مزدوج به دست آمده ارائه داده و سپس کارایی برآوردگر پیشنهادی را با سایر برآوردگرها مثل، برآوردگر درستنمایی ماکزیمم، برآوردگر بیز، برآوردگر بیز تجربی و برآوردگر بیز انقباضی تجربی مورد بررسی قرار می‌دهیم. روشی که ما در این مقاله برای بدست آوردن برآوردگر بیز تجربی و برآوردگر بیز انقباضی تجربی استفاده شده، روش حدسی است. با استفاده از شش طرح مختلف و داده‌های شبیه سازی شده و توزیع‌های پیشین جفری و هارتیگان، کارایی برآوردگرهای پیشنهادی با هم مقایسه می‌شوند، نهایتاً با استفاده از داده‌های واقعی کارایی برآوردگرهای پیشنهادی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: برآوردگر بیزی انقباضی، توزیع نمایی دوپارامتری، تابع زیان آنتروپی تعمیم یافته، طرح سانسور نوع دوم فزاینده.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email:e.deiri53@qaemiau.ac.ir

۱. مقدمه

توزیع نمایی تنها توزیع پیوسته‌ای است که خاصیت بی‌حافظی دارد، این ویژگی تابع را می‌توان این‌طور تفسیر کرد که رویدادهایی را که در گذشته اتفاق افتاده می‌توانیم در نظر نگیریم و از زمان حال به بعد را مبدأ زمان قرار بدهیم. از این رو بیشتر در حل مسائل احتمال و تئوری صف به کار گرفته می‌شود. هم‌چنین از این توزیع برای مدل‌سازی کردن و آسان ساختن شیوه حل مسائل واقعی استفاده می‌کنند. همچنین توزیع نمایی برای تجهیزاتی کاربرد دارد که از کار افتادگی و شکست هر یک از قطعات آن باعث از کار افتادگی کل دستگاه می‌گردد و نیز در تجهیزاتی که علل عمده شکست و از کار افتادگی‌ها به صورت تصادفی بوده، از این توزیع احتمال می‌تواند بکار گرفته شود. گوئیم متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی دو پارامتری است هرگاه تابع چگالی احتمال و نمودار این تابع به صورت زیر باشد.

$$f_X(x|\beta) = \frac{1}{\beta}\exp\left\{-\frac{1}{\beta}(x-\alpha)\right\} I(x > \alpha) \quad (1)$$

تابع توزیع تجمعی نمایی دو پارامتری[1] و نمودار این تابع توزیع برای مقادیر مختلف پارامترها به صورت زیر می‌باشد،

$$F_X(x|\beta) = 1 - \exp\left\{-\frac{1}{\beta}(x-\alpha)\right\}$$

تحقیقات گسترده‌ای در زمینه برآورد و پیش‌بینی و سایر نکات دیگر، مربوط به توزیع نمایی دوپارامتری در سال‌های اخیر مورد توجه نویسندگان متعددی قرار گرفته شده است. [۱۲] برآوردگر بیزی پارامتر مقیاس و همچنین تابع قابلیت اطمینان و تابع نرخ شکست را با استفاده از توزیع پیشین جفری (ناآگاهی‌بخش) و پیشین هارتیگان[2] بر اساس مقادیر رکوردها بدست آوردند. [۳] برآورد بیزی پارامترهای توزیع نمایی دوپارامتری را بر اساس k-رکورد تحت تابع زیان لاینکس مورد بررسی قرار دادند. اما هدف اصلی ما در این مقاله به دست آوردن، برآوردگر بیزی انقباضی[3] پارامتر مقیاس توزیع نمایی دو پارامتری است که متفاوت از رویکردهای ذکر شده می‌باشد. چون در روش محاسبه برآوردگرهای انقباضی از تکنیک کمترین رسیک استفاده می‌شود، بنابراین در بسیاری از شرایط عملی این برآوردگر، در کلاس برآوردگرهای پیشنهادی تحت تابع زیان آنتروپی تعمیم‌یافته[4] برآوردکننده بهتری خواهد بود. در این روش، آزمایش‌گر با استفاده از اطلاعات قبلی درباره مقدار پارامتر، آنرا در فرم یک مقدار حدس می‌زند و این مقدار می‌تواند برای نتیجه‌گیری و استنباط پارامتر مورد نظر استفاده شود. در این مقاله، پارامتر مورد نظر β است و از این جهت مقدار حدس زده شده از این پارامتر را با β نشان داده و این مقداری است که می تواند برای استنباط و نتیجه‌گیری برای β استفاده شود. همچنین در این مقاله، از روش برآورگرهای بیز تجربی برای برآورد β_0 بر اساس مشاهدات نمونه استفاده شده است. نویسندگان زیادی، از روش مقدار حدسی که از فضای پارامتر اختیار می‌شود را، برای استنباط پارامتر توزیع‌ها مورد مطالعه قرار دادند. [۱۸] برآوردکننده‌های انقباضی را برای پراکندگی معکوس $\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i} - \frac{1}{\bar{X}}\right)}$ در توزیع گوسین معکوس تحت تابع زیان لینکس مورد مطالعه قرار دادند. [۲۰] برآوردگرهای بیزی تابع نرخ شکست و تابع قابلیت اطمینان تحت توزیع نمایی یک پارامتری را با استفاده از مقدار حدسی، مطالعه کردند. پراکاش و سینگ برخی از برآوردگرهای انقباضی و برآوردگرهای بیزی را برای پارامتر شکل توزیع پارتو

[1] Two Parameter Exponential Distribution
[2] Hartigan Prior
[3] Bayes Shrinkage Estimation
[4] General Entropy Loss Function (GELF)

تحت تابع زیان انتروپی تعمیم یافته بدست آورده است. [۲۴] مطالعاتی در مورد برآورد پارامتر شکل، تحت کلاسی از برآوردگرهای انقباضی را برای مدل‌های طول عمر با استفاده از توزیع وایبول انجام دادند. [۱۹] مطالعه‌ای برای آزمون‌های ساده بر اساس برآوردگرهای بیزی انقباضی، برای پارامتر مقیاس، توزیع نمایی، با توزیع پیشین ناسره تحت تابع زیان توان دوم خطا انجام دادند.

شاید محبوب‌ترین تکنیکی که از روش، مقدار نقطه حدسی استفاده می شود، تکنیک برآوردگرهای انقباضی است، که ابتدا توسط تامپسون[1] [۲۱] پیشنهاد شده است. برآوردگرهای انقباضی زمانی، بهتر از برآوردگرهای متداول (MME، Unbiased، MLE، BLUE، UMVUE، Bayes)، عمل می‌کنند که مقدار حدسی به مقدار واقعی آن تقریبا نزدیک باشد حتی وقتی که حجم نمونه کوچک باشد زیرا، این نزدیکی همان مفهوم کمترین مخاطره می‌باشد. مساله برآوردگرهای انقباضی که تامپسون [۲۱] آن را پیشنهاد داد، بدین صورت بوده که، ابتدا یک برآوردگر ناریب (متداول) $\hat{\beta}$ از پارامتر β را انتخاب سپس β_0 را به عنوان یک مقدار حدسی که نزدیک به پارامتر β (برحسب تجربه) پیشنهاد می‌شود در نهایت ترکیب خطی (ترکیب محدب) از این دو برآوردگر را برآوردگر انقباضی به صورت زیر تعریف کرد،

$$\hat{\beta}_S = k\hat{\beta} + (1-k)\beta_0, (0 \le k \le 1) \quad (۲)$$

تکنیک انقباض در مطالعات متعددی مورد استفاده قرار گرفته است به عنوان مثال؛ [۱۱] مطالعه‌ای تحت عنوان "استفاده از توزیع جمعیت برای بهبود متوسط زمان زنده ماندن فرد در مطالعات اپیدمیولوژیک" را با استفاده از سازگاری بیز تجربی انجام دادند. تسو[2] [۲۲] برآورد انقباضی چندگانه در پیش‌بینی عرضه پول در کشور هنگ کنگ را مورد بررسی قرار دادند. مارشال[3] [۱۷] بررسی شاخص‌های بیماری و میزان مرگ و میر و بهبود آن با استفاده از برآوردگرهای بیزی تجربی مورد استفاده قرار دادند.

در آزمون‌های طول عمر و قابلیت اطمینان، واحدهایی که مورد آزمایش قرار می‌گیرند گاهی قبل از شکست (از کار افتادگی) گم می‌شوند و یا از آزمایش خارج می‌شوند، چنین واحدهایی معمولاً واحدهای سانسور شده نامیده می‌شوند. معروف‌ترین طرح های سانسور عبارتند از، طرح سانسور نوع اول و طرح سانسور نوع دوم، اما یکی از نقاط ضعف روش‌های سانسور معمول نوع اول و نوع دوم این است که آنها در حذف واحدها در نقطه شکست انعطاف‌پذیر نیستند، در همین راستا نوع جدیدی از طرح های سانسور که تعمیم یافته طرح سانسور نوع دوم است این مشکل را برطرف کرد و آن را طرح سانسور فزاینده نوع دوم[4] می‌نامند و این امر در سال‌های اخیر موجب محبوبیت آن شده است.

۱-۱. سانسورهای فزاینده نوع دوم

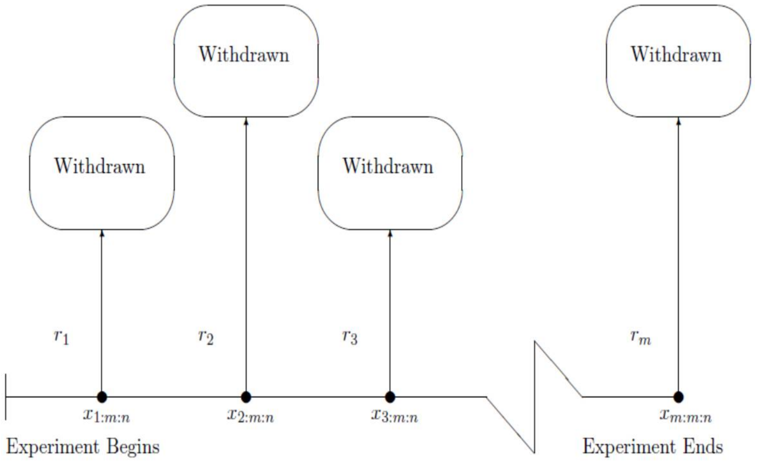
طرح نمونه‌گیری سانسور فزاینده نوع دوم به غیر از آزمون‌های طول عمر صنعتی بلکه در روانشناسی بالینی نیز به کار گرفته می‌شود. حذف واحدها در طرح نمونه‌گیری سانسورهای فزاینده نوع دوم این اجازه را به ما می‌دهد که تا قبل از پایان آزمایش، واحدها را حذف کنیم. بالاکریشنان و آگگاروالا[5] [۵] کتابی تحت عنوان داده های سانسور شده نوشته‌اند که در آن انواع سانسورها و کاربردهایشان مورد مطالعه قرار گرفت. هم‌چنین برای مطالعه بیشتر می توان به [۱۳، ۱۴، ۱۶، ۱ و ۲] و منابع ذکر شده مراجعه کرد. [۸] یک طرح کلی را برای

1 Thompson
2 Tso
3 Marshall
4 Progressive Type-II Censored Data
5 Balakrishnan and Aggarwala

داده‌های سانسور شده فزاینده نوع دوم ارائه کردند که در شکل ۱ نشان داده شده است.

طرح نمونه‌گیری سانسور فزاینده نوع دوم بدین صورت می‌باشد، فرض کنید در یک آزمایش طول عمر، n واحد تحت آزمایش در زمان صفر قرار دارند و می‌خواهیم m تا شکست (مرگ) مشاهده شود. هنگامی که اولین شکست مشاهده شد (یعنی زمان مشاهده اولین واحد نمونه $x_{r_1:m,n}$)، r_1 تا از واحدهای باقی مانده به طور تصادفی انتخاب شده و از آزمایش خارج می‌شوند. در زمان مشاهده دومین شکست (یعنی زمان مشاهده دومین واحد نمونه $x_{r_2:m,n}$)، r_2 تا از $n-r_1-1$ واحدهای باقیمانده به طور تصادفی انتخاب شده و از آزمایش خارج می‌شوند. در نهایت، در زمان مشاهده شکست mام (یعنی زمان مشاهده m-امین واحد نمونه $x_{r_m:m,n}$)، تمام واحدهای باقی مانده یعنی $r_m = n-m-r_1-r_2-\cdots-r_{m-1}$ تا از واحدهای آزمایش حذف می‌شوند. در این طرح سانسور، تمامی مقادیر سانسور یعنی $r_1, r_2, \dots, r_m$ همه از پیش مشخص شده‌اند.

هدف اصلی ما در این مقاله، بدست آوردن برآوردگر بیز و برآوردگر انقباضی بیزی برای پارامتر توزیع نمایی دو پارامتری با استفاده از توزیع پیشین مزدوج بر اساس طرح نمونه‌گیری سانسور شده فزاینده نوع دوم است. از آنجایی که ما در مورد مقدار واقعی پارامتر β و در نتیجه مقدار حدسی β_0 هیچ نظری نداریم، بنابراین در این مقاله پیشنهاد می‌کنیم برآوردگرهای بیز تجربی از β_0 را بر اساس مشاهدات نمونه به دست آوریم تا مقدار حدس زده شده از پارمتر β_0 مقداری معقول باشد (تا حد امکان به پارامتر نزدیک باشد). برخلاف مقالات ذکر شده در بالا که در آن‌ها تمرکز بر محاسبه برآوردگر انقباضی بر اساس نمونه های کامل یا سانسور شده نوع دوم با استفاده از توزیع‌های نمایی، پارتو یا وایبول است، در اینجا ما توزیع نمایی دو پارامتری را با طرح سانسور شده فزاینده نوع دوم مورد بررسی قرار می‌دهیم.



شکل ۱. نمایش نمونه m تایی از طرح سانسور شده فزاینده نوع دوم، که در آن $x_{r_1:m,n}, x_{r_2:m,n}, \dots, x_{r_m:m,n}$ زمان‌های شکست (واحدهای نمونه) و $r_1, r_2, \dots, r_m$ بیانگر اعداد متناظر از واحدهای حذف شده در آزمایش

علاوه بر این، از برآوردگر بیز تجربی برای بدست آوردن مقدار حدسی β_0 استفاده کرده و بر اساس آن برآوردگر انقباضی بیزی را محاسبه می‌کنیم. سپس برای مقایسه برآوردگرها، تابع مخاطره از برآوردگر بیز تجربی و برآوردگر انقباضی بیز تجربی براساس توزیع نمایی دو پارامتری را محاسبه کردیم. در بخش ۲، به معرفی تابع زیان و کلاس توزیع‌های پیشین برای برآوردگر بیزی می‌پردازیم. در بخش ۳، برآوردگرهای بیز و بیز تجربی براساس β_0 و همچنین تابع مخاطره برآوردگر درستنمایی ماکزیمم، برآوردگر بیز و برآوردگر انقباضی بیزی را به دست آوردیم. در بخش ۴، مطالعه شبیه‌سازی در حالت $p = 1,2$ پرداخته شد. و سپس در بخش ۵، با استفاده از داده‌های واقعی طول عمر از توزیع نمایی دو پارامتری به ارزیابی تابع مخاطره برآوردگر بیز کلاسیک و برآوردگر انقباضی بیزی پرداختیم.

۲. تابع مخاطره و توزیع پیشین

در رویکرد بیزی، β به عنوان یک متغیر تصادفی با توزیع معلوم (توزیع پیشین) در نظر گرفته می‌شود. در این مقاله، توزیع پیشین مزدوج به فرم زیر در نظر گرفته شده است.

$$\pi(\beta|\lambda,\gamma) \propto \beta^{-(\lambda+1)} exp\left\{-\frac{\gamma}{\beta}\right\}, \beta > 0 \quad (۳)$$

که در آن $\gamma > 0$ و $\lambda > 0$.

مزیت استفاده از توزیع پیشین مزدوج این است که توزیع پسین به‌طور طبیعی متعلق به همان خانواده از توزیع‌هاست، علاوه بر این، در خانواده توزیع‌های پیشین (۳) با قرار دادن $\lambda = \gamma = 0$ توزیع پیشین جفری تولید شده و با قرار دادن $\lambda = 2, \gamma = 0$ توزیع پیشین هارتیگان تولید می‌شود.

در بسیاری از مواقع نیاز به بررسی نسبت برآوردگر به پارامتر می‌باشد بنابراین می‌توان تابع زیانی تعریف کرد که شامل $\frac{\hat{\beta}}{\beta}$ شود. به همین منظور، [۷] تابع زیان آنتروپی را به صورت زیر تعمیم دادند،

$$l(\hat{\beta},\beta) \propto \left[\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right)^p - p ln\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right) - 1\right]; \quad p \neq 0 \quad (۴)$$

حداقل مقدار این تابع درنقطه $\hat{\beta} = \beta$ رخ می‌دهد. اگر در این تابع قرار دهیم $p = 1$ آنگاه تابع زیان آنتروپی حاصل می‌شود، نویسندگان زیادی از تابع زیان آنتروپی استفاده کرده‌اند به‌عنوان مثال [۹و۱۰]. با فرض $ln\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right) = \hat{\beta} - \beta$ یا $\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right) = exp\{\hat{\beta} - \beta\}$، آنگاه تابع زیان فوق به تابع زیان لاینکس به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\left[exp\{p(\hat{\beta} - \beta)\} - p(\hat{\beta} - \beta) - 1\right]$$

تبدیل می‌شود که توسط زلنر[1] [۲۳] پیشنهاد شده است. [۷] نشان دادند که تحت تابع زیان آنتروپی تعمیم یافته، برآوردگر بیز پارامتر β با معلوم بودن نمونه $\underline{x}$ به صورت زیر بدست می‌آید

$$\hat{\theta}_{GB} = \left[E\left(\beta^{-p}|\underline{x}\right)\right]^{-\frac{1}{p}}$$

۳. برآورد

فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ نمونه تصادفی به حجم n از توزیع نمایی دو پارامتری با تابع چگالی احتمال داده شده در (۱) باشد. فرض کنید نمونه $X = (X_{1:m:n}, X_{2:m:n}, \dots, X_{m:m:n})$ نمونه‌ای مرتب شده از داده‌های طول عمر و حاصل از سانسور فزاینده نوع دوم به حجم m با طرح سانسور $R = (R_1 = r_1, R_2 = r_2, \dots, R_m = r_m)$ باشد.

در این صورت تابع درستنمایی از β برابر است با،

$$\iota(\beta) = A \prod_{i=1}^{m} f\left(x_{(i)}|\beta\right)\left[1 - F\left(x_{(i)}|\beta\right)\right]^{r_i}$$
$$= A\beta^{-m} \exp\{-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{m}(1 + r_i)$$
$$\left(x_{(i)} - \alpha\right)I_{(\alpha,+\infty)}\left(x_{(i)}\right)\}$$

[1] Zellner

$$= A\beta^{-m}e^{-\frac{T}{\beta}}\prod_{i=1}^{n} I_{(\alpha.+\infty)}\left(x_{(i)}\right) \qquad (۵)$$

که در آن $x_{(i)}$ مشاهده iام از $X_{(i)} = X_{i:m:n}$ برای $i = 1,2,\dots,m$ می‌باشد و

$$T = \sum_{i=1}^{m}(1 + r_i)\left(x_{(i)} - \alpha\right)$$
$$A = n(n - r_1 - 1)\dots\left(n - \sum_{i=1}^{m-1} r_i - m + 1\right)$$

در این صوت اگر برآوردگر نااریب درستنمایی ماکزیمم را با $\hat{\beta}_{MLE}$ نشان دهیم خواهیم داشت (T برآوردگر درستنمایی ماکزیمم):

$$\hat{\theta}_{MLE} = \frac{T}{m} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(1 + r_i)\left(x_{(i)} - \alpha\right) = T_1$$

لم ۳-۱. آماره $\frac{2m}{\beta}T_1$ تحت نمونه سانسور فزاینده نوع دوم دارای توزیع دو با $2m$ درجه آزادی است.

اثبات. فرض کنید $Z_i = \frac{1}{\beta}\left(x_{(i)} - \alpha\right)$, $i = 1,2,\dots,m$ آنگاه، آماره‌های مرتب $Z_1 < Z_2 < \cdots < Z_m$ نمونه سانسور شده فزاینده نوع دوم از توزیع نمایی استاندارد می‌باشد (نمایی با پارامتر ۱). فرض کنید

$$W_1 = Z_1$$
$$W_2 = (n - r_1 - 1)(Z_2 - Z_1)$$
$$W_3 = (n - r_1 - r_2 - 2)(Z_3 - Z_2)$$
$$\vdots$$
$$W_m = (n - r_1 - r_2 - \cdots - r_m - m + 1)(Z_m - Z_{m-1})$$

در این صورت $W_1, W_2, \dots, W_m$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با توزیع نمایی استاندارد می‌باشند، بنابراین

$$2\sum_{i=1}^{m} W_i \backsim \chi^2_{2m}$$

که در آن

$$2\sum_{i=1}^{m} W_i = 2\sum_{i=1}^{m}(1 + r_i)Z_i = \frac{2}{\beta}\sum_{i=1}^{m}(1 + r_i)\left(x_{(i)} - \alpha\right) = \frac{2m}{\beta}T_1 = T^* \backsim \chi^2_{2m}$$

با استفاده از چگالی پیشین (۳) و تابع درستنمایی (۵) و بکارگیری قضیه بیز، توزیع پسین توام به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\Pi(\beta|\underline{x}) \propto f(\underline{x}|\beta)\Pi(\beta|\gamma,\lambda) = \frac{(\gamma+T)^{m+\lambda}\beta^{-(m+\lambda+1)}e^{-\frac{1}{\beta}(\gamma+T)}}{\Gamma(m+\lambda)}$$

توزیع پسین بدست آمده توزیع گامای معکوس با پارامترهای $\acute{\alpha} = \lambda + m$ و $\acute{\beta} = \gamma + T$ است. بنابراین برآوردگر بیز β تحت تابع زیان آنتروپی تعمیم یافته به صورت زیر بدست می‌آید

$$\hat{\beta}_{GB} = \left[E\left((\beta^{-p})|T\right)\right]^{-\frac{1}{p}} = \left[\int_0^{\infty}\beta^{-p}\Pi(\beta|t_1)d\beta\right]^{-\frac{1}{p}} = \left[\int_0^{\infty}\beta^{-p}\ \pi(\beta|\underline{x})\right]^{-\frac{1}{p}} = \left[\frac{\Gamma(m+\lambda)}{\Gamma(m+\lambda+p)}\right]^{\frac{1}{p}}(\gamma + T) \qquad (۶)$$

برای بدست آوردن برآوردگر انقباضی بیزی با در نظر گرفتن نقطه حدسی، ابتدا باید پارامترهای توزیع پیشین را براساس β_0 بدست آوریم، به همین منظور باید معادله $\beta_0 = E\left[\hat{\beta}_{GB}\right]$ را حل کنیم،

$$\beta_0 = E\left[\hat{\beta}_{GB}\right] \Rightarrow \ \gamma = \left(\frac{1}{c} - m\right)\beta_0$$

که در آن $c = \left[\frac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda+m+p)}\right]^{\frac{1}{p}}$.

با قرار دادن مقدار γ در $\hat{\beta}_{GB}$، برآوردگر انقباضی بیزی پارامتر β تحت تابع زیان آنتروپی تعمیم یافته به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\hat{\beta}_{GBS} = c\left(\beta_0\left(\frac{1}{c} - m\right) + mT_1\right) = cmT_1 + (1 - cm)\beta_0 = k_1T_1 + (1 - k_1)\beta_0 \qquad (۷)$$

که در آن $k_1 = cm = \left[\frac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda+m+p)}\right]^{\frac{1}{p}} m$ و $T_1 = \frac{T}{m} = \hat{\beta}_{MLE}$.

برای محاسبه تابع مخاطره برآوردگر بیزی و برآوردگر انقباضی بیزی باید تابع چگالی احتمال این برآوردگرها را بدست آوریم. به همین منظور قرار می‌دهیم،

$$W=\frac{\hat{\beta}_{GB}}{\beta}=a(\beta)+b\frac{T}{\beta}$$
$$=a(\beta)+bT^*$$

که در آن $a(\beta)=\frac{c\gamma}{\beta}$ و $T^*=\frac{2mT_1}{\beta}$ ($T^*\sim\chi^2_{2m}$ و $b=\frac{c}{2}$، در این صورت،

$$f_W(w)=$$
$$\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{w-a(\beta)}{b}\right)}\left(\frac{w-a(\beta)}{b}\right)^{m-1}}{b2^m\Gamma(m)}, & w>a(\beta)\\ 0 & O.w.\end{cases}$$

تابع مخاطره برآوردگر بیزی تحت تابع زیان آنتروپی تعمیم یافته به صورت زیر بدست می‌آید،

$$R_{GB}(\beta)=E\left[L\left(\hat{\beta}_{GB},\beta\right)\right]$$
$$=E\left[\left(\frac{\hat{\beta}_{GB}}{\beta}\right)^p-pln\left(\frac{\hat{\beta}_{GB}}{\beta}\right)-1\right]$$
$$=E[\left(a(\beta)+b\frac{2mT_1}{\beta}\right)^p$$
$$-pln\left(a(\beta)+b\frac{2mT_1}{\beta}\right)-1]$$
$$=\int_{a(\beta)}^{\infty}w^p\frac{1}{\mathrm{b}\Gamma(m)2^m}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{w-a(\beta)}{b}\right)}$$
$$\left(\frac{w-a(\beta)}{b}\right)^{m-1}dw$$
$$-p\int_{a(\theta)}^{\infty}ln(w)\frac{1}{\mathrm{b}\Gamma(m)2^m}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{w-a(\theta)}{b}\right)}$$
$$\left(\frac{w-a(\theta)}{b}\right)^{m-1}dw-1$$

قرار می‌دهیم $\frac{w-a(\beta)}{b}=t^*$،

$$=\int_0^{\infty}[(a(\beta)+bt^*)^p$$
$$-pln(a(\beta)+bt^*)-1]f_{\chi^2_{2m}}(t^*)dt^*$$
$$=\int_0^{\infty}[\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\left(a(\beta)\right)^p\left(\frac{bt^*}{a(\beta)}\right)^j$$
$$-(pln(a(\beta)+bt^*)-1)]$$
$$\times\frac{1}{\Gamma(m)2^m}t^{*m-1}e^{-\frac{t^*}{2}}dt^*$$
$$=\sum_{j=0}^{p}\frac{p(p-1)\ldots.(p-j+1)}{j!}$$
$$(2b)^j\left(a(\beta)\right)^{p-j}\frac{\Gamma(m+j)}{\Gamma(m)}$$
$$-p\int_0^{\infty}ln(a(\beta)+bt^*)\frac{1}{\Gamma(m)2^m}$$
$$t^{*m-1}e^{-\frac{t^*}{2}}dt^*-1\quad,p>0 \qquad (۸)$$

به طور متشابه قرار می‌دهیم،

$$V=\frac{\hat{\beta}_{GBS}}{\beta}=\frac{1-k_1}{\beta}\beta_0+\frac{k_1}{2m}\frac{2mT_1}{\beta}$$
$$=e(\beta)+dT^*$$

که در آن $e(\beta)=\frac{1-k_1}{\beta}\beta_0$ و $T^*=\frac{2mT_1}{\theta}$ ($T^*\sim\chi^2_{2m}$ و $d=\frac{k_1}{2m}$، در این صورت،

$$f_V(v)=$$
$$\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-e(\beta)}{d}\right)}\left(\frac{v-e(\beta)}{d}\right)^{m-1}}{d\Gamma(m)2^m} & v>e(\beta)\\ 0 & o.w\end{cases}$$

تابع مخاطره برآوردگر انقباضی بیزی تحت تابع زیان آنتروپی تعمیم یافته به صورت زیر بدست می‌آید،

$$R_{GBS}(\beta)=E\left[L\left(\hat{\beta}_{GBS},\beta\right)\right]$$
$$=E\left[\left(\frac{\hat{\beta}_{GBS}}{\beta}\right)^p-pln\left(\frac{\hat{\beta}_{GBS}}{\beta}\right)-1\right],$$
$$p>0$$
$$=E[\left(\frac{1-k_1}{\beta}\beta_0+\frac{k_1}{2m}\frac{2mT_1}{\beta}\right)^p$$
$$-pln\left(\frac{1-k_1}{\beta}\beta_0+\frac{k_1}{2m}\frac{2mT_1}{\beta}\right)-1]$$
$$=\int_{e(\beta)}^{\infty}[v^p-pln(v)-1]\frac{1}{\mathrm{d}\Gamma(m)2^m}$$
$$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-e(\beta)}{d}\right)}\left(\frac{v-e(\beta)}{d}\right)^{m-1}dv$$

قرار می‌دهیم $\frac{v-e(\beta)}{d}=t^*$،

$$=\int_0^{\infty}[(e(\beta)+dt^*)^p$$
$$-pln(e(\beta)+dt^*)-1]f_{\chi^2_{2m}}(t^*)dt^*$$
$$=\sum_{j=0}^{p}\frac{p(p-1)\ldots.(p-j+1)}{j!}\left(\frac{k_1}{m}\right)^j$$
$$\left(\frac{(1-k_1)\beta_0}{\beta}\right)^{p-j}\frac{\Gamma(m+j)}{\Gamma(m)} \qquad (۹)$$
$$-p\int_0^{\infty}ln\left(\left(\frac{(1-k_1)\beta_0}{\beta}\right)+\left(\frac{k_1}{2m}\right)t^*\right)$$
$$\frac{1}{\Gamma(m)2^m}t^{*m-1}e^{-\frac{t^*}{2}}dt^*-1$$

تابع مخاطره برآوردگر نااریب درستنمایی ماکزیمم تحت تابع زیان آنتروپی تعمیم یافته به صورت زیر بدست می‌آید

$$R_{MLE}(\beta) = E\left[L\left(\hat{\beta}_{MLE}, \beta\right)\right] = E\left[\left(\frac{\hat{\beta}_{MLE}}{\beta}\right)^p - pln\left(\frac{\hat{\beta}_{MLE}}{\beta}\right) - 1\right] = \int_0^\infty \left[\left(\frac{t_1}{\beta}\right)^p - pln\left(\frac{t_1}{\beta}\right) - 1\right] f_{T_1}(t_1)\, dt_1$$

بنابر لم (۳-۱) داریم $T^* = \frac{2mT_1}{\beta} \sim \chi^2_{2m}$،

$$= \frac{\beta}{2m} \int_0^\infty \left[\left(\frac{t^*}{2m}\right)^p - pln\left(\frac{t^*}{2m}\right) - 1\right] f_{T^*}(t^*)\, dt^* = \frac{\beta}{2m} \Big(\frac{1}{m^p}\frac{\Gamma(m+p)}{\Gamma(m)} - p\big(\psi(m) - ln(2m)\big) - 1\Big), \quad p > 0 \qquad (۱۰)$$

که $\psi(m) = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(m)2^m} e^{-\frac{t}{2}} t^{m-1} ln(t) dt$ تابع دایگاما می‌باشد.

برای پیدا کردن برآوردگر بیز انقباضی از روش مقدار حدسی برای β_0 استفاده کردیم، اما گاهی اوقات این مقدار نیز می‌تواند مجهول باشد. بنابراین برای برآورد β_0 از برآوردگر بیز تجربی β استفاده می‌کنیم. برآوردگر $\hat{\beta}_{GB}$ در (۶) وابسته به پارامترهای λ و γ است و برآوردگر $\hat{\beta}_{GBS}$ در (۷) فقط به λ وابسته است این پارامترها وابسته به توزیع پیشین β هستند. استفاده از برآوردگر بیز تجربی برای برآورد پارامترهای λ و γ را می‌توان در مقالات لیندلی[1] [۱۵] و آواد و گاراف[2] [۴] مشاهده کرد. بر اساس نمونه تصادفی داده شده $\underline{x}$، تابع درستنمایی از β در (۵) یک تابع چگالی احتمال گامای معکوس با پارامتر شکل $m-1$ و پارامتر مقیاس T می‌باشد. بنابراین پارامترهای توزیع پیشین یعنی λ و γ را می‌توان بر اساس اطلاعات نمونه تصادفی با استفاده از $m-1$ و T برآورد کنیم،

$$\hat{\beta}_0 = \hat{\beta}_{GB.emp} = \left[\frac{\Gamma(m+\lambda)}{\Gamma(p+\lambda+m)}\right]^{\frac{1}{p}} (\gamma + mT_1) = \left[\frac{\Gamma(2m-1)}{\Gamma(p+2m-1)}\right]^{\frac{1}{p}} 2T = c_{emp}T \sim c_{emp}\frac{\beta}{2}\chi^2_{2m} \qquad (۱۱)$$

که در آن $c_{emp} = 2\left[\frac{\Gamma(2m-1)}{\Gamma(p+2m-1)}\right]^{\frac{1}{p}}$.

برای پیدا کردن $\hat{\beta}_{GBs.emp}$، از جایگزین کردن $\hat{\beta}_0$ بجای β_0 استفاده می‌کنیم. بنابراین داریم،

$$\hat{\beta}_{GBS.emp} = c_{emp}mT_1 + \left(1 - c_{emp}m\right)\hat{\beta}_0 = k_{1.emp}T_1 + \left(1 - k_{1.emp}\right)\hat{\beta}_0 = k_{1.emp}\,\hat{\beta}_{MLE} + \left(1 - k_{1.emp}\right)\hat{\beta}_0 = c_{emp}\mathrm{T} + \left(1 - c_{emp}m\right)c_{emp}T = \left(2c_{emp} - mc^2_{emp}\right)T = k_{emp}T \sim k_{emp}\frac{\beta}{2}\chi^2_{2m} \qquad (۱۲)$$

توابع مخاطره برآوردگر بیز تجربی و برآوردگر انقباضی بیز تجربی به ترتیب به صورت زیر بدست می‌آیند،

$$R_{\hat{\theta}_{GB.emp}}(\beta) = E\left[L\left(\hat{\beta}_{GB.emp}, \beta\right)\right] = E\left[\left(\frac{\hat{\beta}_{GB.emp}}{\beta}\right)^p - pln\left(\frac{\hat{\beta}_{GB.emp}}{\beta}\right) - 1\right] = E\left[\left(\frac{c_{emp}T}{\beta}\right)^p - pln\left(\frac{c_{emp}T}{\beta}\right) - 1\right] = \frac{\Gamma(m+p)}{\Gamma(m)}c^p_{emp} - p\left(ln\psi(m) + ln\left(\frac{c_{emp}}{2}\right)\right) - 1 \qquad (۱۳)$$

و به طور متشابه داریم،

$$R_{\hat{\theta}_{GBS.emp}}(\beta) = E\left[L\left(\hat{\beta}_{GBS.emp}, \beta\right)\right] = \frac{\Gamma(m+p)}{\Gamma(m)}k^p_{emp} - p\left(ln\psi(m) + ln\left(\frac{k_{emp}}{2}\right)\right) - 1 \qquad (۱۴)$$

۴. مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش، با استفاده از یک شبیه‌سازی مونت کارلو کارآیی برآوردگرهای پیشنهاد شده مورد

---
[1] Lindley
[2] Awad and Gharraf

بررسی قرار می‌گیرید. به همین منظور، برای بررسی کارایی برآوردگرهای β از توزیع‌های پیشین جفری و هارتیگان (۳) و نمونه‌هایی با اندازه‌های مختلف و نمونه‌های مطلوب با اندازه‌های مختلف برای شش طرح سانسور استفاده می‌شود.

به همین منظور در این بررسی، اندازه نمونه‌های مورد نظر $n = 20, 25, 30, 35$ و اندازه نمونه‌های مطلوب $m = 10, 15, 20$ و مقادیر ابر پارامتر مختلف برای λ و β و شش طرح سانسور نمونه گیری که در جدول ۱ ارایه شده در نظر می‌گیریم.

در جدول ۱، طرح سانسور $R = (0\ \ 0\ \ m)$ نشان دهنده این است که در شکست‌های اول، دوم و سوم هیچ واحد فعالی حذف نشده است (سه شکست به عنوان واحدهای نمونه سانسور می‌باشد)، اما در شکست چهارم، m واحد فعال حذف و یا از آزمون خارج می‌شود.

در شبیه سازی طرح‌های نمونه‌گیری سانسور نوع دوم از الگوریتم پیشنهادی [۶] از توزیع رایلی با پارامتر مقیاس $\beta = 2$ استفاده نمودیم. برآوردگرها براساس مقدار میانگین برآوردها و کارایی مربوط به مخاطره آنها مقایسه می‌شود. در روش بیزی از توزیع‌های پیشین جفری ($\lambda = \gamma = 0$) و پیشین هارتیگان ($\lambda = \gamma = 2$) استفاده کردیم.

برای محاسبه تابع زیان از دو مقدار مختلف ($p = 1,2$) استفاده شده است. نتایج شبیه‌سازی در جدول‌های (۲) و (۳) خلاصه شده است. همه نتایج براساس نمونه‌گیری با تکرار ۱۰۰۰۰ می‌باشند. از نتایج جدول‌های ۲ و ۳ مشاهده می‌شود که مقادیر مخاطره به اندازه نمونه n بستگی ندارد، اما به اندازه نمونه مطلوب m بستگی دارد، با افزایش اندازه نمونه مطلوب m، مقادیر مخاطره کاهش می‌یابد و مقادیر برآوردگرهای بیزی به مقدار واقعی β نزدیک‌تر می‌شود. در نتیجه انتظار می‌رود وقتی که مقدار حدسی β_0 در همسایگی β انتخاب شود آنگاه مخاطره در کمترین مقدار قرار گیرند و برآوردگر انقباضی بیزی بهتر عمل کند. اما در عمل، β نامشخص(مجهول) است و این موضوع انتخاب مقدار حدسی را دشوار می‌سازد. از نتایج جدول‌های ۲ و ۳ با وجود اینکه مقادیر مخاطره برای برآوردگرهای بیز تجربی کمی بیشتر از دیگر برآوردگرهاست، اما از دیدگاه عملی، برآوردگر انقباضی بیز تجربی ارزشمند است.

جدول ۱: شش طرح نمونه‌گیری سانسور که در مطالعات شبیه سازی شده مورد استفاده قرار گرفت

طرح	طرح نمونه‌گیری سانسور
اول	$R = (0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,10)$
دوم	$R = (0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,15)$
سوم	$R = (0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,10)$
چهارم	$R = (0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,20)$
پنجم	$R = (0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,15)$
ششم	$R = (0\,2\,1\,0\,0\,2\,1\,2\,1\,1\,0\,0\,2\,0\,8)$

جدول ۲: میانگین درستنمایی ماکزیمم و برآوردگرهای بیز β از روش‌های مختلف برآورد، تحت تابع زیان آنتروپی تعمیم-یافته با $p = 1$، مخاطره واقعی (به صورت پررنگ) و مخاطره برآورد شده در داخل پرانتز ارائه شده است.

		(طرح سانسور، اندازه مطلوب Tm اندازه نمونه n)					
توزیع پیشین	برآوردگر	(20,10, [1])	(25,10, [2])	(25,15, [3])	(30,10, [4])	(30,15, [5])	(35,15, [6])
جفری	$\hat{\beta}_{MLE}$	4.985 (**0.049**,9.050)	4.99 (**0.05**,9.05)	5.00 (**0.03**,14.03)	4.99 (**0.05**,9.05)	4.99 (**0.03**,14.03)	6.04 (**0.06**,14.03)
	$\hat{\beta}_{GB}$	4.065 (**0.063**,0.325)	4.07 (**0.06**,0.32)	4.33 (**0.04**,0.28)	4.06 (**0.06**,0.32)	4.32 (**0.04**,0.28)	5.20 (**0.04**,0.08)
	$\hat{\beta}_{GBS}$	5.046 (**0.049**,1.519)	5.05 (**0.05**,1.52)	5.03 (**0.03**,1.66)	5.05 (**0.05**,1.52)	5.02 (**0.03**,1.65)	6.07 (**0.06**,2.165)
	$\hat{\beta}_{GBemp}$	5.248 (**0.050**,1.916)	5.25 (**0.05**,1.91)	5.17 (**0.03**,2.18)	5.25 (**0.05**,1.91)	5.16 (**0.03**,2.18)	6.25 (**0.07**,2.18)
	$\hat{\beta}_{GBSemp}$	4.971 (**0.049**,1.915)	4.97 (**0.05**,1.91)	4.99 (**0.03**,2.18)	4.97 (**0.05**,1.91)	4.98 (**0.03**,2.18)	6.03 (**0.06**,2.18)
هارتیگان	$\hat{\beta}_{GB}$	4.70 (**0.04**,0.01)	4.75 (**0.04**,0.01)	4.79 (**0.03**,0.05)	4.72 (**0.54**,0.01)	4.82 (**0.03**,0.05)	5.79 (**0.05**,0.05)
	$\hat{\beta}_{GBS}$	5.00 (**002**,0.08)	5.05 (**0.05**,0.09)	4.98 (**0.03**,0.05)	5.01 (**0.05**,0.08)	5.02 (**0.03**,0.06)	6.05 (**0.06**,0.24)
	$\hat{\beta}_{GBemp}$	5.24 (**0.05**,1.91)	3.30 (**0.05**,1.91)	5.14 (**0.03**,2.18)	5.25 (**0.05**,1.91)	5.01 (**0.03**,2.18)	6.25 (**0.07**,2.18)
	$\hat{\beta}_{GBSemp}$	4.96 (**0.05**,1.91)	5.02 (**0.05**,1.91)	4.96 (**0.03**,2.18)	4.97 (**0.05**,1.91)	5.00 (**0.03**,2.18)	6.03 (**0.06**,2.18)

جدول۳: میانگین درستنمایی ماکزیمم و برآوردگرهای بیز β از روش های مختلف برآورد، تحت تابع زیان آنتروپی تعمیم-یافته با $p = 2$، مخاطره واقعی (به صورت پررنگ) و مخاطره برآورد شده در داخل پرانتز ارائه شده است.

		(طرح سانسور، اندازه مطلوب m، اندازه نمونه n)					
توزیع پیشین	برآوردگر	(20,10, [1])	(25,10, [2])	(25,15, [3])	(30,10, [4])	(30,15, [5])	(30,20, [6])
جفری	$\hat{\beta}_{MLE}$	5.01 (**0.20**,109)	4.98 (**0.20**,109)	4.98 (**0.13**,239)	4.99 (**0.20**,109)	4.99 (**0.13**,239)	6.05 (**0.31**,239)
	$\hat{\beta}_{GB}$	3.93 (**0.24**,0.68)	3.92 (**0.24**,0.68)	4.20 (**0.15**,0.59)	3.92 (**0.24**,0.68)	4.21 (**0.15**,0.59)	5.07 (**0.18**,0.59)
	$\hat{\beta}_{GBS}$	5.04 (**0.20**,8.01)	5.02 (**0.20**,7.93)	5.00 (**0.13**,8.73)	5.02 (**0.20**,7.95)	5.01 (**0.13**,8.78)	6.07 (**0.32**,13.5)
	$\hat{\beta}_{GBemp}$	5.14 (**0.20**,3.93)	5.11 (**0.20**,3.93)	5.07 (**0.13**,4.44)	5.12 (**0.21**,3.93)	5.08 (**0.03**,2.18)	6.16 (**0.34**,4.44)
	$\hat{\beta}_{GBSemp}$	5.00 (**0.20**,3.93)	4.98 (**0.20**,3.93)	4.98 (**0.13**,4.44)	4.98 (**0.21**,3.93)	4.99 (**0.03**,2.18)	6.05 (**0.31**,4.44)
هارتیگان	$\hat{\beta}_{GB}$	4.53 (**0.18**,0.07)	4.51 (**0.18**,0.07)	4.68 (**0.12**,0.06)	4.50 (**0.18**,0.07)	4.67 (**0.12**,0.06)	5.63 (**0.37**,0.12)
	$\hat{\beta}_{GBS}$	5.02 (**0.19**,1.45)	5.00 (**0.20**,1.44)	5.02 (**0.13**,1.41)	4.98 (**0.20**,1.42)	5.01 (**0.13**,1.39)	6.06 (**0.37**,0.12)
	$\hat{\beta}_{GBemp}$	5.13 (**0.20**,3.93)	5.11 (**0.20**,3.93)	5.10 (**0.13**,4.44)	5.10 (**0.20**,3.93)	5.09 (**0.13**,4.44)	6.16 (**0.33**,4.44)
	$\hat{\beta}_{GBSemp}$	5.00 (**0.20**,3.93)	4.98 (**0.20**,3.93)	5.02 (**0.13**,4.44)	4.96 (**0.20**,3.93)	5.00 (**0.13**,4.44)	6.05 (**0.31**,4.44)

۵. تحلیل داده‌ها

داده‌های واقعی که ما در تحلیل داده از آن استفاده کردیم از مقاله علیزاده و دیگران (۲۰۱۶) استخراج شده است. آنها نشان دادند که برآوردگر درستنمایی ماکزیمم بهتر از دیگر برآوردگرهاست. بنابراین برای برآورد مقدار λ از برآوردگر درستنمایی ماکزیمم پارامتر β استفاده کردند. بنابر نتایج جدول ۵ واضح است که برآوردگرهای انقباطی بیزی تجربی β دارای کمترین مخاطره در میان برآوردگرهای پیشنهادی است. همچنین با افزایش p مقدار برآوردها کاهش یافته ولی مقدار مخاطره افزایش می‌یابد.

جدول ۴: مثال نمونه‌گیری سانسور فزاینده نوع دوم (r_i زمان شکست نمونه iام)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_{(i)}$	0.8	0.8	1.3	1.5	1.8	1.9	1.9	2.1	2.6	2.7
r_i	0	0	3	0	0	2	0	0	2	0
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$x_{(i)}$	2.9	3.1	3.2	3.3	3.5	3.6	4	4.1	4.2	4.2
r_i	2	1	0	0	4	0	0	2	0	0
i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$x_{(i)}$	4.3	4.3	4.4	4.4	4.6	4.7	4.7	4.8	4.9	4.9
r_i	3	0	1	0	0	2	0	4	0	0
i	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$x_{(i)}$	5	5.3	5.5	5.7	5.7	6.1	6.2	6.2	6.2	6.3
r_i	3	3	0	0	3	0	0	2	0	0
i	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
$x_{(i)}$	6.7	6.9	7.1	7.1	7.1	7.1	7.4	7.6	7.7	8
r_i	2	0	2	1	0	0	4	0	0	2
i	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
$x_{(i)}$	8.2	8.6	8.6	8.6	8.8	8.8	8.9	8.9	9.5	9.6
r_i	0	0	4	0	0	2	0	0	3	0
i	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
$x_{(i)}$	8.2	8.6	8.6	8.6	8.8	8.8	8.9	8.9	9.5	9.6
r_i	0	0	4	0	0	2	0	0	3	0
i	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
$x_{(i)}$	8.2	8.6	8.6	8.6	8.8	8.8	8.9	8.9	9.5	9.6
r_i	0	0	4	0	0	2	0	0	3	0
i	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
$x_{(i)}$	8.2	8.6	8.6	8.6	8.8	8.8	8.9	8.9	9.5	9.6
r_i	0	0	4	0	0	2	0	0	3	0
i	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
$x_{(i)}$	8.2	8.6	8.6	8.6	8.8	8.8	8.9	8.9	9.5	9.6
r_i	0	0	4	0	0	2	0	0	3	0
i	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
$x_{(i)}$	8.2	8.6	8.6	8.6	8.8	8.8	8.9	8.9	9.5	9.6
r_i	0	0	4	0	0	2	0	0	3	0

جدول ۵: برآورد بیز تجربی و برآورد انقباضی بیز تجربی و مقادیر مخاطره آن‌ها

p	برآورد بیز تجربی	مخاطره بیز تجربی	برآورد انقباضی بیز تجربی	مخاطره انقباضی بیز تجربی
1	17.07043	17.34568	17.2696	17.34469
2	16.9967	17.34468	17.19386	17.34273

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله، با استفاده از توزیع پیشین مزدوج و تابع زیان آنتروپی تعمیم یافته، برآورد انقباضی بیزی، پارامتر مقیاس، توزیع احتمال نمایی دوپارامتری را بدست آوردیم. برآورد بیزی و برآورد انقباضی بیزی که در این مقاله محاسبه شده، با استفاده از یک مقدار حدسی از فضای پارامتر بدست آمده است و نیز مقادیر ریسک این برآوردگرها را بدست آوردیم. بر اساس مقادیر ریسک‌های بدست آمده ریسک برآوردگر انقباضی بیزی نسبتاً قابل قبول بود. در عمل مقدار واقعی پارامتر، یک عدد نامعلوم است به همین علت یک مقدار حدسی از فضای پارامتر را برای آن انتخاب کردیم. از روش بیز تجربی برای برآورد مقدار حدسی از پارامتر استفاده کردیم و سپس مقادیر ریسک برآوردگرهای بیز تجربی و برآوردگر انقباضی بیزی تجربی را محاسبه کردیم. در مقایسه با برآوردگرهای دیگر، عملکرد برآورد انقباضی بیزی تجربی نسبتاً مناسب‌تر است به همین منظور پیشنهاد می شود که در عمل و اهداف بزرگتر، از برآوردگر انقباضی بیزی تجربی مورد استفاده قرار گیرد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از داوران محترم برای ارائه پیشنهادات سازنده‌شان در بهبود این مقاله سپاسگزاری می‌نمایند.

فهرست مراجع

[۱] محمدی منفرد، معصومه (۱۳۹۹) "استنباط‌های کلاسیک و بیزی، در توزیع پواسن-نمایی بر پایه‌ی داده‌های سانسور شده‌ی هیبرید فزاینده نوع دو"، پژوهش های نوین در ریاضی، پذیرش آنلاین آذر ۱۳۹۹.

[۲] اصل فلاح، نیلوفر، کهنسال، اکرم، کاظمی، رامین (۱۳۹۹) "برآورد پارامترهای توزیع رایلی دوپارامتری تحت سانسور فزاینده با حذفهای دوجمله‌ای"، پژوهش‌های نوین در ریاضی، اردیبهشت ۱۳۹۹.

[3] Ahmadi, J., Doostparast, M., Parsian, A., 2005. Estimation and prediction in a two-parameter exponential distribution based on K- Record values under LINEX loss function. Communication in Statistics. Theory and Methods, 34, 795–805.

[4] Awad, A. M., Gharraf, M. K., 1986. Estimation of P[Y < X] in the Burr case: A comparative study. Journal of Communications in Statistics- Simulation and Computation, 15(15), 389–403.

[5] Balakrishnan, N., & Aggarwala, R. (2000). *Progressive censoring: Theory, method and applications*. Boston: Birkhauser.

[6] Balakrishnan, N., Sandhu, R. A., 1995. A Simple Simulation algorithm for generating progressive type-II censored samples. Journal of the American Statistician, 49(2), 119–230.

[7] Calabria, R., Pulcini, G., 1996. Point estimation under asymmetric loss functions for left truncated exponential samples. Journal of Communications in Statistics-Theory & Methods, 25(3), 585–600.

[8] Cramer, E., Iliopoulos, G., 2010. Adaptive progressive type-II censoring. Test, 19(2), 342–358.

[9] Dey, D. K., Ghosh, M., Srinivasan, C., 1987. Simultaneous estimation of parameters under entropy loss. Journal of Statistical Planning and Inference, 15, 347–363.

[10] Dey, D. K., Liu, P. L., 1992. On comparison of estimators in a generalized life model. Journal of Microelectronics Reliability, 32, 207–221.

[11] Harris, E., Shakarki, G., 1979. Use of the population distribution to improve estimation of individual mean in epidemiological studies. Journal of Chronical Disease, 32, 233–243.

[12] Hendi, M. L., Abu-Youssef, A., Alraddadi, A., 2007. A Bayesian analysis of record statistics fro A.m the Weibull model. International Mathematical Forum, 2(13), 619–631.

[13] Kundu, D., 2008. Bayesian inference and reliability sampling plan for Weibull distribution. Journal of Technometrics, 50, 144–154.

[14] Kundu, D., Pradhan, B., 2009. Bayesian inference and life testing plans for generalized Exponential distribution. Journal of Science in China, Series A: Mathematics, 52(6), 1373–1388.

[15] Lindley, D. V. (1969). *Introduction to probability and statistics from a Bayesian view point*. Cambridge University Press.

[16] Ng, H. K. T., Kundu, D., Chan, P. S., 2009. Statistical analysis of Exponential lifetimes under an adaptive type-II progressive censoring scheme. Journal of Naval Research Logistics, 56, 687–698.

[17] Marshall, R. J., 1991. Mapping disease and mortality rates using empirical Bayes estimators. Journal of Applies Statistics, 40, 283–294.

[18] Prakash, G., Singh, D. C., 2006. Shrinkage estimators for the inverse dispersion of the inverse Gaussian distribution under the LINEX loss function. Austrian Journal of Statistics, 35(4), 463–470.

[19] Salman, A. N., Shareef, R. A., 2014. Bayesian shrinkage estimator for the scale parameter of Exponential distribution under improper prior distribution. International Journal of Statistics and Applications, 4(3), 135–143.

[20] Singh, G. P., Singh, S. K., Singh, U., Upadhyay S. K., 2008. Bayes estimators of Exponential parameters from a censored sample using a guess estimate. Data Science Journal, 7, 106–114.

[21] Thompson, J. R., 1968. Some shrinkage techniques for estimating the mean. Journal of American Statistical Association, 63, 113-122.

[22] Tso, G.(1990). *Forecasting money supply in Hong Kong with a multiple shrinkage estimator*. In Proceeding of the ASA Section on Business and Commerce. ASA.

[23] Zellner A., 1986. Bayesian estimation and prediction using asymmetric loss function. Journal of American statistical Association, 81, 446–451.

[24] Al-Hemyari, Z. A., Al-Dabag, H.A., 2012. A class of shrinkage T estimators for the shape parameter of the Weibull lifetime model. Pakistan Journal of Statistics and Operational Research, 8(2), 167–184.