دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی، خرداد و تیر ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

JNRM

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

یک ساختار نرم-چندگانه روی جبرهای فوریه و فوریه اشتیل یس

مرضیه شمس یوسفی*

گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۰۵/۱۵   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۶/۳۱

چکیده

در این مقاله شرط تجزیه‌پذیری برای گروه‌های موضعاً فشرده را معرفی و یک ساختار نرم-چندگانه برپایه جبرهای فوریه و فوریه اشتیل یس روی گروه‌های دارای شرط تجزیه پذیری ارایه می‌کنیم. نشان می دهیم گروه‌های فشرده در این شرط صدق می‌کنند. این ساختار، نتایج شناخته شده در حالت L^1-جبرهای روی گروه‌های فشرده و آبلی را تعمیم می‌بخشد. در انتها نگاشت‌های چندگانه-کراندار خاصی را روی جبرهای فوریه مطالعه می‌کنیم و برخی نتایج در این نظریه را بهبود می‌بخشیم.

واژه‌های کلیدی: فضاهای نرم-چندگانه، جبر فوریه، جبر فوریه اشتیل یس، تجزیه متعامد، خاصیت تجزیه پذیری گروه‌های موضعا فشرده.

*. عهده‌دار مکاتبات:
Email: m.shams@guilan.ac.ir

۱. مقدمه

نظریه نرم–چندگانه و فضاهای نرم–چندگانه مبحث تقریباً جدیدی در آنالیز تابعی است. این نظریه توسط دیلز و پولیاکف معرفی شد. این نظریه، شبیه اما متفاوت با نظریه فضاهای عملگری موجود است. با توجه به این که فضاهای عملگری ارتباط بین فضاهای نرم‌دار و L^2-فضاها را میسر می‌کنند، نظریه فضاهای نرم–چندگانه برای این طراحی شد که فضاهای نرمدار را به L_p-فضاها، برای $p\in[1,\infty]$ و به طور خاص به L^1-فضاها مربوط کند.

تکنیک‌ها و ابزارهای موجود در این نظریه به شکل وسیعی در شناسایی انژکتیو بودن $L^p(G)$ به عنوان $L^1(G)$- مدول برای یک گروه موضعاً فشرده به کار رفت، [۱] را ببینید. دیلز و همکارانش ثابت کردند که $L^p(G)$ به عنوان $L^1(G)$–مدول چپ باناخ انژکتیو است اگر و تنها اگر G میانگین‌پذیر باشد. نویسندگان در خلال برهان‌ها، از مبحث نرم چندگانه بهره جستند و این نظریه را توسیع دادند. رامسدن در رساله دکتری خویش، ساختاری را که فضاهای نرم–چندگانه p-گونه خوانده می‌شود، برای $1\le p\le\infty$ معرفی کرد [۲ و ۳]. معرفی وی ساختار دیلز و پولیاکف را تعمیم می‌بخشد. از این نظریه برای تعریف جدیدی از میانگین‌پذیری که $(1,p)$ میانگین‌پذیری گروه‌های موضعاً فشرده نامیده می‌شود، بهره گرفته شده است [۴].

نظریه نرم–چندگانه برای بررسی رفتارهای همانستگی مدول‌ها روی جبرهای گروهی مناسب است. افق هندسه فضاهای باناخ نوری در نظریه عملگرهای به طور مطلق جمعی پرتاب می‌کند و به نتایجی در مورد شبکه‌های باناخ و تجزیه فضاهای باناخ منجر می‌شود.

تکنیک تجزیه فضاهای باناخ مهم‌ترین ابزار این مقاله است.

دیلز و پولیاکف ساختار نرم–چندگانه L^1-فضاها را ارایه دادند. [۴] را ببینید، که در بخش ۲.۱ به آن می‌پردازیم. ساختار نرم–چندگانه‌های متعددی روی L^1-فضاها موجود است. علاوه بر این، ایشان ثابت کردند که قضیه نمایش عام برای فضاهای نرم چندگانه موجود است، که نشان می‌دهد نرم چندگانه از نوع L^1، ساختار جامع برای همه فضاهای نرم–چندگانه است.

در این مقاله به جبرهای گروهی $L^1(G)$، جبرهای فوریه $A(G)$ و فوریه اشتیل یس $B(G)$ روی گروه موضعاً فشرده G می‌پردازیم. جبر فوریه $A(G)$ برای گروه موضعاً فشرده G توسط ایمارد معرفی شده است [۵]. برای گروه موضعاً فشرده آبلی G تبدیل فوریه یکریختی طولپایی از $L^1(G)$ به روی $A(\widehat{G})$، که در آن $\widehat{G}$ دوگان پونتریاگین G است، فراهم می‌کند. جبر گروهی دیگر، جبر فوریه اشتیل یس است که برای گروه موضعاً فشرده آبلی G تبدیل فوریه اشتیل یس آن را به صورت طولپا با $M(\widehat{G})$، جبر اندازه‌های مختلط منظم بورل روی $\widehat{G}$، یکریخت می‌کند. در این مقاله، برای گروه‌های موضعا فشرده خاصی، ساختار نرم–چندگانه‌ای روی $A(G)$ و $B(G)$ معرفی می‌کنیم که در حالت گروه‌های آبلی بر ساختار نرم–چندگانه استاندارد $L^1(\widehat{G})$ و $M(\widehat{G})$ منطبق است. مقاله حاضر به صورت زیر سازمان یافته است. در بخش ۱ و زیربخش‌های آن مروری بر نظریه نرم چندگانه و برخی نتایج شناخته‌شده آن انجام خواهیم داد. در بخش ۲ شرط تجزیه‌پذیری گروه‌های موضعاً فشرده را معرفی می‌کنیم. نشان می‌دهیم اگر G دارای این خاصیت باشد، آن گاه $B(G)$ و لذا $A(G)$ دارای ساختار نرم چندگانه‌ای است که حالت آبلی را تعمیم می‌دهد. ثابت خواهیم کرد گروه‌های فشرده دارای این خاصیت هستند و در بخش ۳ نگاشت‌های چندگانه کراندار روی جبرهای فوریه به طور مختصر مطالعه خواهد شد.

۱.۱. فضاهای نرم-چندگانه

در این بخش به ارایه تعریف و برخی خواص کلی فضاهای نرم-چندگانه می‌پردازیم. در نمادگذاری و علائم از [۴] پیروی می‌کنیم.

تعریف ۱.۱. فرض می‌کنیم E یک فضای برداری باشد و $n\in\mathbb{N}$. منظور از E^n فضای برداری $E\times\cdots\times E$ است. برای جایگشت σ از n نماد ($\sigma\in S_n$) تعریف می‌کنیم

$$A_\sigma(x)=(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}),\quad x=(x_1,\dots,x_n)\in E^n$$

برای $\alpha=(\alpha_i)\in\mathbb{C}^n$ تعریف می‌کنیم

$$M_\alpha(x)=(\alpha_i x_i),\qquad x=(x_1,\dots,x_n)\in E^n$$

مجموعه $\{1,\dots,n\}$ را با $\mathbb{N}_n$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنید $(E,\|.\|)$ یک فضای نرم‌دار باشد و $n\in\mathbb{N}$. یک نرم-چندگانه از مرتبه n روی $\{E^k:k\in\mathbb{N}\}$ عبارت است از یک دنباله

$$\left(\|.\|_k\right)=\left(\|.\|_k:k\in\mathbb{N}_n\right)$$

به طوری که برای هر $k\in\mathbb{N}_n$، روی E^k یک نرم باشد و برای هر $x\in E$، $\|x\|_1=\|x\|$ و شرایط (۱) تا (۴) ذیل روی هر $k\in\mathbb{N}_n$ و $n\geq 2$ برقرار باشد.

(۱) برای هر $\sigma\in S_k$ و $x\in E^k$ داریم

(۲) برای اعداد مختلط $\alpha_k,\dots,\alpha_1$ و $x\in E^k$ داریم

$$\|M_\alpha(x)\|_k\leq\left(\max_{i\in\mathbb{N}_k}|\alpha_i|\right)\|x\|_k$$

(۳) برای هر $x_k,\dots,x_1$ از E داریم

$$\|(x_1,\dots,x_{k-1},0)\|_k=\|(x_1,\dots,x_{k-1})\|_{k-1}.$$

(۴) برای هر $x_k,\dots,x_1$ از E داریم

$$\|(x_1,\dots,x_{k-2},x_{k-1},x_k)\|_k=$$
$$\|(x_1,\dots,x_{k-2},x_{k-1})\|_{k-1}.$$

در این حالت، می‌گوییم $\left(\left(E^k,\|.\|_k\right):k\in\mathbb{N}_n\right)$ یک فضای نرم-چندگانه از مرتبه n است. یک نرم چندگانه روی $\{E^k:k\in\mathbb{N}\}$ یک دنباله $\left(\|.\|_k\right)=\left(\|.\|_k:k\in\mathbb{N}\right)$ است، به طوری که برای هر $n\in\mathbb{N}$، $\left(\|.\|_k:k\in\mathbb{N}_n\right)$ یک نرم-چندگانه از مرتبه n باشد. در این حالت می‌گوییم که $\left(\left(E^n,\|.\|_n\right):n\in\mathbb{N}\right)$ یک فضای نرم-چندگانه است.

فرض کنیم E و F فضاهای نرم-چندگانه و $T:E\to F$ یک نگاشت خطی باشد. در این صورت

$$T^{(n)}:E^n\to F^n,$$
$$T^n(x_1,\dots,x_n)=(T(x_1),\dots,T(x_n))$$

n-امین بسط T است.

تعریف ۱.۳. برای فضاهای نرم-چندگانه E و F، نگاشت خطی $T:E\to F$ چندگانه-کراندار خوانده می‌شود، هرگاه

$$\|T\|_{mb}:=\sup_{n\geq 1}\left\|T^{(n)}\right\|<\infty.$$

اگر $\|T\|_{mb}\leq 1$ می‌گوییم T چندگانه-انقباضی و اگر برای هر $n\in\mathbb{N}$، $T^{(n)}$ طولپایی باشد، می‌گوییم T چندگانه- طولپایی است.

همچنین فضاهای نرم‌دار-چندگانه به وسیله یک نرم روی یک فضای ضرب تانسوری نیز شناسایی می‌شوند. از قضیه ذیل به طور مستقیم در این مقاله استفاده نمی‌کنیم، اما برای ذکر در اینجا به قدر کافی زیباست.

قضیه ۱.۴. (**[قضیه ۴. ۳ :۶]**) فرض کنیم E یک فضای نرم‌دار باشد. در این صورت یک تناظر دوسویی بین خانواده نرم‌های-چندگانه روی E و خانواده C_0-نرم‌های روی $C_0 \otimes E$ برقرار است.

فرض کنیم $\left(\left(E^n,\|\cdot\|_n\right):n\in\mathbb{N}\right)$ یک فضای نرم‌دار-چندگانه، $k\in\mathbb{N}$ و $\{E_1,\ldots,E_k\}$ یک خانواده از زیرفضاهای بسته E باشد. در این صورت $\{E_1,\ldots,E_k\}$ یک خانواده متعامد در E نامیده می‌شود، هرگاه برای هر افراز $S_1,\ldots,S_j$ از $\mathbb{N}_k$ از مجموعه‌های متناهی داشته باشیم

$$\|(x_1,\ldots,x_k)\|_k = \|(y_1,\ldots,y_k)\|_j$$
$$x_1\in E_1,\ldots,x_1\in E_1$$

که در آن برای $i\in\mathbb{N}_j$، $y_i=\sum\{x_r, r\in S_i\}$.

مجموعه $\{x_1,\ldots,x_k\}$ از اعضای E متعامد نامیده می‌شود، هرگاه خانواده $\{\mathbb{C}x_1,\ldots,\mathbb{C}x_k\}$ از زیرفضاها یک خانواده متعامد در E باشد.

تعریف ۱.۵. فرض کنیم $\left(\left(E^n,\|\cdot\|_n\right):n\in\mathbb{N}\right)$ یک فضای نرم‌دار-چندگانه، $k\in\mathbb{N}$ و $\{E_1,\ldots,E_k\}$ یک خانواده از زیرفضاهای خطی بسته E باشند، به طوری که $E=E_1\oplus\cdots\oplus E_k$ یک تجزیه به صورت جمع مستقیم باشد. در این صورت تجزیه را یک تجزیه متعامد می‌نامیم، هرگاه $\{E_1,\ldots,E_k\}$ یک خانواده متعامد باشند.

تعریف ۱.۶. فرض کنیم $\left(\left(E^n,\|\cdot\|_n\right):n\in\mathbb{N}\right)$ یک فضای نرم‌دار-چندگانه و $E=E_1\oplus\cdots\oplus E_k$ یک تجزیه جمع مستقیم از E باشد. در این صورت تجزیه را کوچک می‌نامیم، هرگاه

$$\|p_1x_1,\ldots,p_kx_k)\| \le \|(x_1,\ldots,x_k)\|_k,$$

که در آن برای $i=1,\ldots,k$، $x_i\in E_i$ و p_i تصویر طبیعی از E به روی E_i است.

تعریف ۱.۷. فرض کنیم $(E,\|\cdot\|)$ یک فضای نرم‌دار و $E=E_1\oplus\cdots\oplus E_k$ یک تجزیه جمع مستقیم از E باشد. در این صورت تجزیه را هرمیتی می‌نامیم، اگر برای هر $i=1,\ldots,n$، $|\eta_i|\le 1$ و $x_i\in E$ داشته باشیم

$$\|\eta_1x_1+\cdots+\eta_kx_k\| \le \|x_1+\cdots+x_k\|.$$

تعریف ۱.۸. فرض کنیم $(E,\|\cdot\|)$ یک فضای نرم‌دار باشد. خانواده‌ی $\Re$ از تجزیه‌های جمع مستقیم E را در نظر بگیرید. خانواده $\Re$ بسته نامیده می‌شود، هرگاه شرایط ذیل برای هر $n\in\mathbb{N}$ برقرار باشد:

- برای $\sigma\in S_n$ و $E_1\oplus\cdots\oplus E_k$ داشته باشیم، $E_{\sigma(1)}\oplus\cdots\oplus E_{\sigma(n)}\in\Re$؛
- برای $n\ge 3$ و $F=F_1\oplus F_2$ و $E_1\oplus\cdots\oplus E_n\in\Re$ داشته باشیم، $F\oplus E_3\oplus\cdots\oplus E_n\in\Re$؛
- $\Re$ شامل همه‌ی تجزیه‌های بدیهی باشد.

تجزیه‌ی بدیهی نامیده می‌شود، هرگاه برای یک $j\in\mathbb{N}_k$، $E=E_j$.

خواننده علاقه‌مند می‌تواند اطلاعات کامل‌تری را در مورد مبحث تعامد در [۴] بیابد.

یک قضیه نمایش عام برای فضاهای نرم‌دار-چندگانه موجود است. این قضیه نشان می‌دهد ساختار نرم چندگانه مشبکه‌ای، که در [۲] تشریح شده است، دارای خاصیت جامع است.

قضیه ۱.۹. (**[قضیه ۹ .۳ و ۶]**) فرض کنیم $\left(\left(E^n,\|\cdot\|_n\right):n\in\mathbb{N}\right)$ یک فضای نرم‌دار-چندگانه باشد. در این صورت فضای باناخ مشبکه‌ای X و

یک نگاشت نشاندن $J: E \to X$ چنان موجود است که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\left\|(Jx_1,\ldots,Jx_n)\right\|_n^L = \left\|(x_1,\ldots,x_n)\right\|_n,$$

که در آن $\left\|(.)\right\|_n^L$ نمایشگر نرم-چندگانه مشبکه‌ای روی X است.

۲. جبر فوریه و نرم-چندگانه

فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده باشد. جبرهای فوریه به نوعی صورت غیر جابجایی L^1-جبرها هستند. در این بخش به مطالعه جبرهای فوریه از منظرگاه فضاهای نرم‌دار-چندگانه علاقه‌مندیم، به نوعی که نتایج شناخته شده حالت آبلی را تعمیم بخشیم. فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده آبلی و $\widehat{G}$ دوگان پونتریاگین آن باشد. تبدیل گلفند روی $L^1(\widehat{G})$ را در نظر بگیرید

$$\widehat{\ }: L^1(\widehat{G}) \to C_0(G),\ f \to \widehat{f}(a) = \int \delta(\xi)\overline{\xi(a)}d\xi.$$

این نگاشت که تبدیل فوریه خوانده می‌شود، نگاشتی یک‌به‌یک و با برد چگال است. تصویر تبدیل فوریه را در نظر بگیرید

$$\{\widehat{f} : f \in L^1(\widehat{G})\}.$$

تعریف کنید

$$\left\|\widehat{f}\right\| := \left\|f\right\|_{L^1(\widehat{G})}.$$

با این نرم تصویر تبدیل فوریه یک فضای باناخ است. بررسی این که این فضا با ضرب نقطه‌ای و نرم بالا یک جبر باناخ است، راحت است. این جبر باناخ، جبر فوریه نامیده و با $A(G)$ نمایش داده می‌شود.
به زودی تعریف $A(G)$ برای گروه موضعاً فشرده غیرآبلی را نیز یادآوری خواهیم کرد.

۲.۱. ساختار نرم-چندگانه

فرض کنید (Ω,μ) یک فضای اندازه باشد. ساختار نرم-چندگانه شناخته شده‌ای برای $L^1(\Omega)$ موجود است. در ادامه به آن اشاره می‌کنیم. برای زیرمجموعه اندازه‌پذیر X از Ω، نیم‌نرم r_X روی $L^1(\Omega)$ را به صورت

$$r_X(f) = \int_X |f|$$

در نظر می‌گیریم. برای $n \in \mathbb{N}$ و افراز $X = \{X_1,\ldots,X_n\}$ از زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر Ω و $f_i \in L^1(\Omega)$ به ازای $i = 1,\ldots,n$ قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} r_X\left((f_1,\ldots,f_n)\right) &= r_{X_1}(f_1) + \cdots + r_{X_n}(f_n) \\ &= \int_{X_1}|f_1| + \cdots + \int_{X_n}|f_n| \end{aligned}$$

و در نهایت تعریف می‌کنیم

$$\left\|(f_1,\ldots,f_n)\right\|_n = \sup_X r_X\left((f_1,\ldots,f_n)\right),$$

که در آن سوپریمم روی همه افرازهای اندازه‌پذیر از X گرفته می‌شود. این تعریف ساختار نرم-چندگانه استاندارد $L^1(\Omega)$ نامیده می‌شود.

حال برای $(f_1,\ldots,f_n)$ در $A(G)^n$ اعضای g_1، ...، g_n در $L^1(\widehat{G})$ را به گونه‌ای می‌یابیم که برای $i = 1,\ldots,n$، $f_i = \hat{g}_i$. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$\left\|(f_1,\ldots,f_n)\right\|_n^{A(G)} := \left\|(g_1,\ldots,g_n)\right\|_n.$$

با این تعریف $A(G)$ نیز یک فضای نرم‌دار-چندگانه خواهد بود.

برای تعریف $A(G)$ و $B(G)$ درحالی‌که G یک گروه موضعاً فشرده دلخواه است، [۷] را ببینید.

در ادامه در حالتی خاص ساختار نرم‌-چندگانه را برای جبرهای فوریه و فوریه-اشتیل‌یس در حالت کلی ارایه می‌کنیم.

فرض می‌کنیم G یک گروه موضعاً فشرده دلخواه باشد. Σ_G را مجموعه همه (کلاس‌های هم‌ارزی) نمایش‌های یکانی پیوسته از گروه G در نظر بگیرید. برای هر $\pi \in \Sigma_G$، $\mathcal{H}_\pi$ نمایشگر فضای هیلبرت متناظر π است. هر نمایش یکانی

$$\pi : G \to B(\mathcal{H}_\pi)$$

یک نمایش ناتبهگون روی $L^1(G)$ با تعریف

$$f \to \int f(x)\pi(x)dx,$$

القاء می‌کند. سمت راست انتگرال بوخنر به معنای ضعیف است.

حال برای هر مجموعه $\Sigma_G \supseteq \Sigma_1$ تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_{\Sigma_1} := \sup_{\pi \in \Sigma_1} \||\pi(f)\||$$

که در آن $\||\pi(f)\||$ نمایشگر نرم عملگری $\pi(f)$ در $\beta(\mathcal{H}_\pi)$ است. نگاشت $f \to \|f\|_{\Sigma_1}$ یک نیم‌نرم روی فضای برداری $L^1(G)$ است. منظور از N_{Σ_1} همه توابع f در $L^1(G)$ است به طوری که برای هر $\pi \in \Sigma_1$ داشته باشیم $\pi(f) = 0$. حال برای هر $f \in {L^1(G)}/{N_{\Sigma_1}}$ تعریف می‌کنیم

$$\|\dot{f}\| := \|f\|_{\Sigma_1} \quad f \in L^1(G)$$

که در آن $\dot{f}$ نمایشگر کلاس $f \in L^1(G)$ در ${L^1(G)}/{N_{\Sigma_1}}$ است. از [۷] می‌دانیم این نرم در شرط نرمِ C^*-جبری صادق است.

کامل‌سازی ${L^1(G)}/{N_{\Sigma_1}}$ با این نرم را با $C^*_{\Sigma_1}(G)$ نمایش می‌دهیم. برای $\Sigma_1 = \Sigma_G$ این کامل‌سازی با $C^*(G)$ نمایش داده می‌شود که C^*-جبر گروهی پر روی گروه موضعاً فشرده G نامیده می‌شود. بنا بر [۷] فضای باناخ $B_{\Sigma_1}(G)$ را دوگان $C^*_{\Sigma_1}(G)$ تعریف می‌کنیم و برای $u \in B_{\Sigma_1}(G)$ داریم

$$\|u\|_{B_{\Sigma_1}(G)} = \sup_{f \in L^1(G), \|f\|_{\Sigma_1} \le 1} \left| f(x)u(x)dx \right|.$$

برای هر زیرمجموعه $\Sigma_G \supseteq \Sigma_1$، $\mathcal{N}'_{\Sigma_1}$ را اشتراک هسته همه نمایش‌های π در Σ_1 در $C^*(G)$ معرفی می‌کنیم. در این صورت بنا بر [گزاره ۱٫۱۵؛ ۷] $*$-همریختی پوشای

$$\varphi : C^*(G) \to C^*_{\Sigma_1}(G), \quad f \mapsto \dot{f},$$

با هسته $\mathcal{N}'_{\Sigma_1}$ موجود است.

حال فرض می‌کنیم Σ_1، ... و Σ_n اعضای یک افراز از Σ_G باشد. C^*-جبرهای $C^*_{\Sigma_1}(G)$، ... و $C^*_{\Sigma_n}(G)$ را در نظر بگیرید.

در این صورت بنا بر تساوی $\mathcal{N}_{\Sigma_i \cap \Sigma_j} = \mathcal{N}_{\Sigma_i \cap \Sigma_j}$ برای زیرمجموعه‌های Σ_i و Σ_j از Σ_G، نگاشت نشاندن طبیعی زیر را داریم

$$C^*(G) \to c_0 - \bigoplus_{i=1}^{n} C^*_{\Sigma_i}(G).$$

زیرمجموعه‌های φ و ψ از Σ_G را هم‌تراز می‌نامیم هرگاه $\mathcal{N}'_\psi = \mathcal{N}'_\varphi$. در این صورت برای هر $f \in L^1(G)$ داریم $\|f\|_\varphi = \|f\|_\psi$ و $C^*_\varphi(G)$ و $C^*_\psi(G)$ با هم یکریخت هستند [۷].

بنابر [۱.۲۴؛ ۷] برای هر $\varphi \subseteq \Sigma_G$ زیرمجموعه

بسته یکتایی از $\hat{G}$ (نمایش‌های تحویل‌ناپذیر یکانی از گروه (G) چنان موجود است که با φ هم‌تراز است و همچنین $C^*(G) = C^*_{\hat{G}}(G)$.

تعریف ۲.۱. الف) گوییم گروه G خاصیت تجزیه‌پذیری دارد هرگاه برای هر افراز دلخواه $\{\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n\}$ از $\hat{G}$ داشته باشیم

$$C^*(G) \overset{\text{iso}}{\cong} c_0 - \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} C^*_{\Sigma_i}(G).$$

ب) گوییم گروه G خاصیت تجزیه‌پذیری وابسته به $\varphi \subseteq \hat{G}$ دارد هرگاه برای هر افراز دلخواه $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$ از φ داشته باشیم

$$C^*_{\varphi}(G) \overset{\text{iso}}{\cong} c_0 - \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} C^*{}_{\varphi_i}(G).$$

در این حالت فرض می‌کنیم u_1 ، ... و u_n در $B(G)$ و p_i تصویر پوشای $B(G)$ به روی $B_{\Sigma_i}(G)$ برای $i = 1,\ldots,n$ باشد.
تعریف می‌کنیم

$$\left\|(u_1,\ldots,u_n)\right\|_n = \sup\left\|p_1u_1 + \cdots + p_nu_n\right\|_{B(G)},$$

که در آن سوپریمم روی همه افرازهای بسته از $\hat{G}$ صورت می‌گیرد.
بررسی این که این تجزیه جمع مستقیم از $B(G)$ هرمیتی است، آسان است. قضیه ذیل نشان می‌دهد این خانواده از نرم‌ها یک ساختار نرم–چندگانه روی $B(G)$ تعریف می‌کند.

قضیه ۲.۲. (**[قضیه ۴.۷ ؛ ۴]**) فرض کنیم $(E;\|.\|)$ یک فضای نرم‌دار و $K = \left\{\left\{E_{1,\alpha},\ldots,E_{n_\alpha,\alpha}\right\} : \alpha \in A\right\}$ یک خانواده بسته از تجزیه‌های هرمیتی E باشد. برای $n \in \mathbb{N}$ و $x_1,\ldots,x_n \in E$، قرار می‌دهیم

$$\left\|x_1,\ldots,x_n\right\|_n = \sup_{\alpha\in A}\{\|p_{1,\alpha}x_1+\ldots+p_{n_\alpha,\alpha}x_n\|; n_\alpha = n\}.$$

در این صورت $\left(\left(E^n,\|.\|_n\right) : n\in\mathbb{N}\right)$ یک فضای نرم‌دار–چندگانه است و هر عضو K نسبت به این نرم–چندگانه یک تجزیه متعامد از E است.
بنا بر قضیه بالا، اگر گروه موضعاً فشرده G دارای خاصیت تجزیه‌پذیری باشد، با تعریفی که پیش از این ارایه شد $((B(G)^n,\|.\|_n), n \in \mathbb{N})$ یک فضای نرم‌دار–چندگانه است و هر تجزیه معرفی‌شده نسبت به این نرم–چندگانه یک تجزیه متعامد از $B(G)$ است. این ساختار نرم–چندگانه را ساختار استاندارد می‌نامیم. از آنجا که $A(G)$ زیرفضای (ایده‌آل) بسته $B(G)$ است. می‌توان این ساختار را بر $A(G)$ نیز القاء نمود [۴].
با استدلال مشابهی اگر G دارای خاصیت تجزیه‌پذیری وابسته به $\varphi \subseteq \hat{G}$ داشته باشد، آن گاه فضای باناخ $B_{\varphi}(G)$ دارای ساختار نرم–چندگانه استاندارد خواهد بود.

قضیه ۲.۳. فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده باشد. در این صورت G دارای خاصیت تجزیه‌پذیری است، اگر و تنها اگر برای هر $\varphi \subseteq \hat{G}$، گروه G خاصیت تجزیه‌پذیری وابسته به φ داشته باشد.

برهان: کفایت واضح است. برای اثبات لزوم، فرض کنیم G دارای خاصیت تجزیه‌پذیری و $\varphi \subseteq \hat{G}$ و Σ_1 ، ... و Σ_n اعضای یک افراز از $\hat{G}$ باشد. بنا بر فرض

$$C^*(G) \overset{\text{iso}}{\cong} c_0 - \bigoplus_{i=1}^{n} C^*_{\Sigma_i}(G).$$

حال با اعمال خارج قسمت بر طرفین خواهیم داشت

$$C_{\varphi}^{*}(G)\underset{\text{iso}}{\overset{\text{iso}}{\cong}}\frac{C^{*}(G)}{\mathcal{N}_{\varphi}'}\cong\frac{C_0-\bigoplus_{i=1}^{n}C_{\Sigma_i}^{*}(G)}{\mathcal{N}_{\varphi}'}\underset{\text{iso}}{\overset{\text{iso}}{\cong}}C_0-\bigoplus_{i=1}^{n}\frac{C^{*}(G)}{\mathcal{N}_{\Sigma_i\cap\varphi}'}\underset{\text{iso}}{\overset{\text{iso}}{\cong}}C_0-\bigoplus_{i=1}^{n}C_{\Sigma_i\cap\varphi}^{*}(G)$$

و برهان کامل می‌شود.

قضیه ۲.۴. فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده و H یک زیرگروه نرمال و بسته آن باشد. اگر $B(G)$ دارای ساختار نرم–چندگانه استاندارد باشد، آن گاه $B(G/_H)$ نیز چنین است.

برهان. همریختی طبیعی پیوسته و پوشای $\sigma : G \to G/_H$ را در نظر بگیرید. در این صورت بنا بر [نتیجه ۳ و۲۶. ۲؛ ۷]، برای هر $\varphi \subseteq \widehat{G/_H}$ نگاشت $u \to u\circ\sigma$ یک یکریختی طولپا از $B_{\varphi}(G/_H)$ به $B_{\varphi\circ\sigma}(G)$ القاء می‌کند، که در آن $\varphi\circ\sigma$ مجموعه همه $\pi\circ\sigma$ها به ازای $\pi\in\varphi$ است. حال بنا بر قضیه ۲.۳ برهان کامل است.

بررسی این که همه گروه‌های آبلی فشرده دارای خاصیت تجزیه‌پذیری هستند، آسان است؛ زیرا بنا بر [۶] برای گروه فشرده و آبلی G با گروه دوگان پونتریاگین گسسته $\hat{G}$ و $\varphi\subseteq\hat{G}$ داریم

$$C_{\varphi}^{*}(G)\overset{\text{iso}}{\cong}C_0(\overline{\varphi})\overset{\text{iso}}{\cong}C_0(\varphi).$$

مایلیم ساختار معرفی‌شده در بالا برای $A(G)$ را در حالت گروه آبلی برای L^1–جبرهای متناظر بررسی کنیم. فرض کنیم G یک گروه فشرده و آبلی و u_1، ... و u_n در $B(G)$ باشند و فرض کنیم $\{X_1,\dots,X_n\}$ یک افراز از $\hat{G}$ باشد. در این صورت بنا بر [۵]، μ_1، ... و μ_n در $M(\hat{G})$ چنان موجودند که برای $i\in\mathbb{N}_n$ داریم $u_i=\hat{\mu}_i$. حال داریم

$$r_{X_1,\dots,X_n}(u_1,\dots,u_n) = sup_{f\in L^1(G),\|\hat{f}_{|\,x_1}\|\ \le 1}|\int p_1(u_1)f| + \cdots + sup_{f\in L^1(G),\|\hat{f}_{|\,x_n}\|\ \le 1}|\int p_n(u_n)f| = sup_{f\in L^1(G),\|\hat{f}_{|\,x_1}\|\ \le 1}\left|\int \hat{f}d_{\mu_{p_1(u_1)}}\right| + \cdots + sup_{f\in L^1(G),\|\hat{f}_{|\,x_n}\|\ \le 1}\left|\int \hat{f}d_{\mu_{p_n(u_n)}}\right| = \left\|\mu_{p_1(u_1)_{|\,X_1}}\right\|_{\mu(x_1)} + \cdots + \left\|\mu_{p_n(u_n)_{|\,X_n}}\right\|_{\mu(x_n)}$$

بنابراین یک طولپایی–چندگانه بین این دو ساختار در این حالت وجود دارد. همچنین در این حالت به دلیل گسسته بودن $\hat{G}$ از اندازه‌پذیری افرازها که در تعریف ساختار نرم–چندگانه دارای اهمیت است، مطمئن هستیم.

قضیه ۲.۵. گروه‌های فشرده خاصیت تجزیه‌پذیری دارند.

برهان: فرض کنیم G یک گروه فشرده باشد در این صورت همه نمایش‌های تحویل‌ناپذیر G از بعد متناهی هستند. فرض کنیم $\pi\in\widehat{G}$ از بعد n_{π} باشد. در این صورت $\pi(G)$ و $\pi(L^1(G))$ دارای بستار عملگری ضعیف یکسان در $\mathrm{M}_{n_{\pi}}$ هستند. همچنین بنا بر قضیه پیتر–وایل بسط خطی $\pi(G)$ با $\mathrm{M}_{n_{\pi}}$ یکسان است. دلیل این حقیقت را در ذیل ارایه می‌کنیم.

برای نمایش یکانی $(\pi,\mathcal{H}_{\pi})$ از گروه موضعاً فشرده G و $u,v\in\mathcal{H}_{\pi}$ تابع $\Phi_{u,v}(x)=\langle\pi(x)u,v\rangle$، تابع اعضای ماتریسی وابسته به نمایش π خوانده می‌شود. فضای خطی تولیدشده توسط توابع اعضای ماتریسی نمایش π را با $\mathcal{E}_{\pi}$ نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم $\mathcal{E}=\bigcup_{[\pi]\in\hat{G}}\mathcal{E}_{\pi}$. بنابر قضیه پیتر

وایل، [قضیه ۵,۱۲ ؛ ۷]، می‌دانیم اگر G فشرده باشد، آن گاه ε یک $*$-زیرجبر $C(G)$ است که برای $1\leq p<\infty$ در $L^p(G)$ چگال است. همچنین در این حالت بنا برقضیه تعامدی شور [قضیه ۵,۸ ؛ ۵]، برای هر دو نمایش غیر هم‌ارز π و π' در $\hat{G}$ با ضرب داخلی القائی از $L^2(G)$، ε_π و $\varepsilon_{\pi'}$ متعامد هستند.

می‌دانیم $C_\pi^*(G)=\overline{\pi\left(L^1(G)\right)}^{\|\cdot\|}=\overline{\pi(\varepsilon)}^{\|\cdot\|}$ که در آن بستار در نرم فضای عملگری متناظر نمایش π، $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$ گرفته می‌شود. چون π تحویل ناپذیر است پس جابجا گر آن ضریب ثابتی از عملگر همانی است و لذا جابجاگر دوم آن $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$ است. اما π از بعد متناهی است، لذا بردش با توپولوژی عملگری ضعیف و لذا با توپولوژی نرم بسته است. بنابراین داریم:

$$C_\pi^*(G)\underset{iso}{\overset{iso}{\cong}}\overline{\pi(L^1(G))}\underset{iso}{\overset{iso}{\cong}}\mathrm{M}_{n_\pi}.$$

همچنین اگر π_1 و ... و π_n نمایش‌های یکانی دلخواه باشند، آن گاه برای $\pi=\pi_1\oplus\cdots\oplus\pi_n$ داریم $\varepsilon_\pi=\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{\pi_j}$، و مجموع بالا لزوماً مستقیم نیست. بنابراین در این حالت مشابه استدلال بالا، اگر عدد تکرار نمایش تحویل‌ناپذیر π_0 برابر با k_{π_0} باشد، آن گاه $C_{\pi_0}^*(G)$ با $k_{\pi_0}\mathbb{M}_{n_{\pi_0}}$ یکریخت خواهد بود که در آن منظور از $k_{\pi_0}\mathbb{M}_{n_{\pi_0}}$ عبارت است از همه ماتریس‌های به فرم $T\oplus\cdots\oplus T$ برای $T\in\mathbb{M}_{n_{\pi_0}}$. حال فرض کنیم $\varphi\subset\widehat{G}$ در این صورت

$$\begin{aligned}C_\varphi^*(G)&\underset{iso}{\overset{iso}{\cong}}\overline{\underset{\pi\in\varphi}{\oplus}\pi(L^1(G))}\\&\underset{iso}{\overset{iso}{\cong}}\overset{c_0}{\underset{\pi\in\varphi}{\oplus}}k_\pi\overline{\pi(L^1(G))}\\&\underset{iso}{\overset{iso}{\cong}}\overset{c_0}{\underset{\pi\in\varphi}{\oplus}}\mathrm{M}_{n_\pi}.\end{aligned}$$

یکریختی آخر به این دلیل است که ضریب تاثیری در نرم c_0 ندارد. حال برای هر افراز دلخواه $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ از $\widehat{G}$، داریم

$$C^*(G)\underset{iso}{\overset{iso}{\cong}}\underset{\pi\in\widehat{G}}{\oplus}\mathrm{M}_{n_\pi}\underset{iso}{\overset{iso}{\cong}}C_{\varphi_1}^*(G)\oplus\cdots\oplus C_{\varphi_n}^*(G).$$

مثال ۲.۶. فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده و دارای خاصیت تجزیه‌پذیری و H یک زیرگروه بسته و نرمال آن باشد به نحوی که G/H یک گروه فشرده باشد (به عنوان مثال گروه‌های مرکزی از این دسته اند). با در نظر گرفتن هم‌ریختی طبیعی پوشای $\sigma:G\to G/H$ و با استفاده از [نتیجه ۳ و ۲,۲۶ و ۷]، برای هر نگاشت $\varphi\subseteq\sum_{G/H}$ یکریختی طولپای $u\to u\circ\sigma$ از $B_\varphi(G/H)$ به $B_{\varphi\circ\sigma}(G)$ را القاء می‌کند.

حال فرض کنیم $\{\Sigma_n,\dots,\Sigma_1\}$ یک افراز از $\widehat{G/H}$ باشد، در این صورت

$$\begin{aligned}B_{\widehat{G/H}\circ\sigma}(G)&\cong B(G/H)\\&\cong\ell^1-\widehat{\bigoplus_{i=1}}B_{\Sigma_i}(G/H)\\&\cong\ell^1-\widehat{\bigoplus_{i=1}}B_{\Sigma_{i\circ\sigma}}(G)\end{aligned}$$

در این حالت G دارای خاصیت تجزیه‌پذیری وابسته به $\widehat{G/H}\circ\sigma$ است و بنابراین $B_{\widehat{G/H}\circ\sigma}(G)$ دارای ساختار نرم-چندگانه است.

قضیه ۲.۷. فرض کنیم G دارای خاصیت تجزیه‌پذیری و $x_n,\dots,x_1$ اعضای $A(G)$ باشد. همچنین فرض کنیم $(\|.\|_n,n\in\mathbb{N})$ و $(\|.\|_n^{\max},n\in\mathbb{N})$ به ترتیب نمایشگر نرم-چندگانه استاندارد و ماکسیمم بر پایه $A(G)$ باشند.

در این صورت

$$\left\|(x_1,\ldots,x_n)\right\|_n=\sup\left\|(p_1(x_1),\ldots,p_n(x_n))\right\|_n^{\max}$$

که در آن p_i ها نمایشگر تصویر طبیعی از $B(G)$ به روی مؤلفه i-ام در جمع مستقیم متناظر با افرازهای $\widehat{G}$ هستند و سوپریمم‌گیری روی همه تجزیه‌های ممکن از $B(G)$ گرفته می‌شود.

برهان: بنا بر [قضیه ۳.۳۳ و ۲۴] برای $x_k,\ldots,x_1$ در $A(G)$ می‌دانیم

$$\|(x_1,\ldots,x_k)\|_k^{max}=sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{k}\langle x_j,\lambda_j\rangle\right|,\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in VN(G),\mu_{1,k}(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\leq 1\right\}$$

که در آن

$$\mu_{1,n}(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)=\sup\left\{\sum_{j=1}^{n}\left|\left\langle x,\lambda_j\right\rangle\right|,x\in A(G)_{[1]}\right\}.$$

حال فرض کنیم $p_n,\ldots,p_1$ تصاویر معرفی‌شده در صورت قضیه و $\lambda_n,\ldots,\lambda_1$ در $VN(G)$ باشند به طوری که $\mu_{1,n}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\leq 1$ به وضوح در این حالت برای $i=1,\ldots,n$ ، $\|\lambda_i\|\leq 1$. داریم

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n}\left\langle p_jx_j,\lambda_j\right\rangle\right| &\leq \sum_{j=1}^{n}\left|\left\langle p_jx_j,\lambda_j\right\rangle\right|\\ &\leq \sum_{j=1}^{n}\left\|p_jx_j\right\|\left\|\lambda_j\right\|\\ &\leq \sum_{j=1}^{n}\left\|p_jx_j\right\|\\ &=\left\|p_1x_1+\cdots+p_nx_n\right\|_{B(G)}\\ &\leq \left\|(x_1,\ldots,x_n)\right\|_n.\end{aligned}$$

لذا

$$\sup\left\|(p_1x_1,\ldots,p_nx_n)\right\|_n^{\max}\leq\left\|(x_1,\ldots,x_n)\right\|_n$$

که در آن سوپریمم روی همه تجزیه‌های ممکن از $B(G)$ اخذ می‌شود. با کمک [قضیه ۷.۴ و۲] و محاسبه کوچکی می‌توان نشان داد که هر تجزیه متعامد نسبت به ساختار نرم-چندگانه $B(G)$، نسبت به ساختار نرم-چندگانه ماکسیمم کوچک است. بنابراین داریم

$$\|(p_1x_1,\ldots,p_nx_n)\|_{B(G)}\leq\|(p_1(x_1),\ldots,p_n(x_n))\|_n^{max}\leq\|(x_1,\ldots,x_n)\|_n$$

و بنا بر تعریف ساختار نرم-چندگانه استاندارد $B(G)$ تساوی حاصل می‌شود.

۳. نگاشت‌های چندگانه-کراندار روی جبرهای فوریه

بنا بر [نتیجه ۶٫۳۴ و ۲] برای گروه‌های موضعاً فشرده و آبلی G و H داریم

$$\mu(L^1(G),L^1(H))\cong B_r(L^1(G),L^1(H)),$$

که در آن $B_r(L^1(G),L^1(H))$، شبکه باناخ شامل همه نگاشت‌های خطی منظم از $L^1(G)$ بر $L^1(H)$ است. برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد مشبکه‌های باناخ و نگاشت‌های منظم، [۸] را ببینید. در رابطه بالا، L^1-جبرهای باناخ با ساختار نرم چندگانه استاندارد مشبکه ای در نظر گرفته شده‌اند. در این بخش، قصد داریم رابطه بالا را در حالت ناآبلی مورد مطالعه قرار دهیم. همان گونه که قبلاً هم ذکر کردیم، تعمیم طبیعی L^1-جبرها در حالت ناآبلی، جبرهای فوریه هستند. می‌دانیم جبرهای فوریه مشبکه باناخ نیستند، مگر در حالتی که گروه زمینه آن‌ها آبلی باشد؛ زیرا اگر $A(G)$ مشبکه باشد، در این صورت دوگان آن نیز چنین است. در حالی که بنا بر قضیه شناخته‌شده‌ای در [۹] C^*-جبرهای باناخ مشبکه هستند اگر و تنها اگر جابجایی باشند، بنابراین در این حالت $VN(G)$ باید جابجایی باشد. برای هر $g\in G$، همریختی $\lambda_g:\underset{f\to f(g)}{A(G)\to\mathbb{C}}$ را در نظر بگیرید که به $VN(G)$ متعلق است. بنابراین برای $VN(G)$ جابجایی باید

داشته باشیم

$$\lambda_{g_1}\lambda_{g_2} = \lambda_{g_1 g_2} = \lambda_{g_2}\lambda_{g_1}, \quad g_1, g_2 \in G.$$

از آنجا که $A(G)$ نقاط g را جدا می‌کند، باید داشته باشیم $g_1 g_2 = g_2 g_1$ و بنابراین G آبلی است.

در ادامه، تا اندازه‌ای به مقوله فضاهای عملگری نیازمندیم که این نظریه در اواسط سال‌های ۷۰ میلادی، پس از مثال‌های استینسبرگ و آرویسون معرفی و در کنگره ریاضی سال ۱۹۸۸ به وسیله افراس ارایه شد.

هر فضای عملگری را می‌توان به عنوان زیرفضای نرم-بسته $B(H)$، C^*-جبر نگاشت‌های خطی و کراندار، روی یک فضای هیلبرت H دانست [قضیه ۲.۳۵؛ ۳].

برای فضاهای هیلبرت H_1 و H_2 فرض کنیم، $E_i \subseteq B(H_i)$، $i=$۱و۲، فضاهای عملگری باشند. نگاشت خطی $\varphi : E_1 \to E_2$، کاملاً مثبت خوانده می‌شود هرگاه

$$\varphi^{(n)} : \mathcal{M}_n(E_1) \to \mathcal{M}_n(E_2), \quad \varphi^{(n)}([x_{ij}]) = \left[\varphi(x_{ij})\right]$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$، مثبت باشد؛ به این معنی که اعضای مثبت را به مثبت می‌نگارد و در آن در ترتیب القایی از C^*-جبر $B(H_i)$، $i=$۱و۲ مورد نظر است.

منابع و مراجع زیادی برای فضاهای عملگری موجود است؛ خواننده را به [10] ارجاع می‌دهیم.

قضیه۳.۱. فرض کنیم H و G گروه‌های موضعاً فشرده و دارای خاصیت تجزیه‌پذیری باشند و فرض کنید $\varphi : A(G) \to A(H)$ همریختی کاملاً مثبت (و کاملاً کراندار) و یک به یک باشد. اگر G میانگین‌پذیر باشد، آن گاه φ^{-1} انقباضی است و اگر علاوه بر این φ پوشا نیز باشد، آن گاه φ چندگانه-طولپایی است.

برهان. بنا بر [نتیجه ۳.۱۱؛ ۱۱]، همریختی پیوسته $\alpha : H \to G$ چنان موجود است که $\phi = \phi_\alpha$؛ به این معنی که برای هر $u \in A(G)$، $\phi_\alpha(u) = u \circ \alpha$. از آنجایی که جبر فوریه نقاط و مجموعه‌های بسته را جدا می‌کند، از یک به یک بودن Φ به راحتی نتیجه می‌شود که α دارای برد چگال است. حال اگر Σ_1، ... و Σ_n افرازی برای $\hat{G}$ و برای $i = 1,\cdots,n$، p_i تصویر طبیعی از $B(G)$ به روی $B_{\Sigma_i}(G)$ باشد، بنا بر [قضیه ۲.۲؛ 6] به راحتی نتیجه می‌شود که $\Sigma_1 \circ \alpha$ ، ... و $\Sigma_n \circ \alpha$ زیرمجموعه‌های $\hat{H}$ و با توجه به چگال‌بودن برد α، افراز نیز هستند. همچنین اگر $P_i(u_i) \in B_{\Sigma_i}(G)$، آن گاه $P_i(u_i) \circ \alpha \in B_{\Sigma_i}(H)$، $i = 1,\ldots,n$. این نشان می‌دهد که اگر $v \in A(G)$ و $v = v_1 + \cdots + v_n$ برای $v_i \in B_{\Sigma_i}(G)$، آن گاه $v \circ \alpha = v_1 \circ \alpha + \cdots + v_n \circ \alpha$ تجزیه $v \circ \alpha$ در $B(H)$ ($A(H)$) به مؤلفه‌هایی در $B_{\Sigma_i \circ \alpha}(H)$ برای $i \in \{1,\ldots,n\}$ است.

حال بنا بر توضیحات بالا به ازای هر $i = 1,\ldots,n$ داریم $P_i(u_i) \circ \alpha = P_i(u_i \circ \alpha)$ و

$$r_{\Sigma_1 o\alpha,\ldots,\Sigma_n o\alpha}(\varphi(u_1),\ldots,\varphi(u_n)) = \|P_1\,\varphi(u_1)\|_{B_{\Sigma_1 o\alpha}(H)} + \cdots + \|P_n\,\varphi(u_n)\|_{B_{\Sigma_n o\alpha}(H)} = \|P_1\,(u_1 o\alpha)\|_{B_{\Sigma_1 o\alpha}(H)} + \cdots + \|P_n\,(u_n o\alpha)\|_{B_{\Sigma_n o\alpha}(H)} = \|P_1\,(u_1) o\alpha)\|_{B_{\Sigma_1 o\alpha}(H)} + \cdots + \|P_n\,(u_n) o\alpha)\|_{B_{\Sigma_n o\alpha}(H)} = \|P_1\,(u_1))\|_{B_{\Sigma_1}(G)} + \cdots + \|P_n\,(u_n)\|_{B_{\Sigma_n}(G)}.$$

تساوی آخر بنا بر [قضیه ۲٫۲؛ ۶] برقرار است و بنابراین داریم:

$$r_{\Sigma_1 o\alpha,\ldots,\Sigma_n o\alpha}\left(\varphi(u_1),\ldots,\varphi(u_n)\right) = r_{\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n}(u_1,\ldots,u_n),$$

که نتیجه می‌دهد

$$\left\|(u_1,\ldots,u_n)\right\|_n \leq \left\|(\varphi(u_1),\ldots,\varphi(u_n))\right\|.$$

حال فرض می‌کنیم Φ پوشا باشد و $x,y \in H$ و $x \neq y$. بنابر [قضیه ۲.۱۵؛ ۱۳]، $g \in A(H)$ چنان موجود است که $g(x) = 1$ و $g(y) = 0$. بنابراین $f \in A(G)$ چنان داریم که

$$f \circ \alpha(x) = 1, \quad f \circ \alpha(y) = 0,$$

و این نشان می‌دهد که $\alpha(y) \neq \alpha(x)$. بنابراین α یک به یک است. بنابراین هر نمایش یکانی تحویل‌ناپذیر H را می‌توان به یک چنین نمایشی به G گسترش داد و لذا سوپریمم‌گیری از رابطه (۱) طولپایی را نتیجه می‌دهد.

تذکر ۳.۲. جالب است بدانیم که نگاشت‌های چندگانه کرانداری روی جبرهای فوریه موجودند که کاملاً کراندار نیستند.

فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده باشد. در این صورت نگاشت

$$v : A(G) \to A(G)$$
$$f \to \check{f}(x) = f(x^{-1})$$

کاملاً کراندار است اگروتنها اگر G زیرگروه آبلی با اندیس متناهی داشته باشد[12]. اما بررسی این که این نگاشت چندگانه-کراندار است آسان است.

از [6] می‌دانیم هر نگاشت کاملاً کراندار $T : A(G) \to A(H)$ به روی گروه میانگین‌پذیر G را می‌توان به صورت $T = T_1 - T_2 + i(T_3 - T_4)$ نوشت که در آن برای $i = 1,\ldots,4$، T_i کاملاً مثبت هستند. این توضیحات نشان می‌دهد نتیجه‌ای که در مورد گروه‌های آبلی و L^1-جبرها برقرار است، با جایگزینی نگاشت‌های منظم با نگاشت‌های قابل تجزیه به کاملاً مثبت‌ها در مورد جبر فوریه لزوماً برقرار نیست.

فهرست منابع

[1] Dales H. G., Daws M., Pham H. L., Ramsden P., Multi-norms and the injectivity of Lp(G) , J. Lond. Math. Soc., 86 (2012) , 779-809.

[2] Ramsden P., Homological properties of semigroup algebras, J. Funct. Anal. 258 (2010), 3988–4009.

[3] Ramsden P., Multi-norms and modules over group algebras, **arXiv:0909.4854 [math.FA]**.

[4] Dales H. G., Polyakov M., Multi-normed spaces, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 488 (2012) ,1-165.

[5] Haagerup U., Injectivity and decomposition of completely bounded maps, Unpublished notes.

[6] Eymard P., Lalgebra de Fourier dun groupe localment compact, Bull. Soc. Math. France, 92,(1964), 181-236.

[7] Folland J. B., A Course in Abstract Harmonic Analysis, CRC Press, 1995.

[8] Schaefer H. H., Banach Lattices and Positive Operators, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[9] Sherman S.,Order in operator algebras, Amer. J. Math., 73 (1951), 227-232.

[10] Effros E. G., Ruan Z. J., Operator Spaces, London Math. Soc. Monogr., Clarendon Press, Oxford, 2000.

[11] Ilie M., Spronk N., Completely Bounded Homomorphisms of the Fourier Algebras, J. Funct. Anal., 213 (2004) , 88-110.

[12] Forrest B. E., Runde V., Amenability and weak amenability of the Fourier algebra, Math. Z., 250 (2005) , 731-744.

[13] Ulger A., Some results about the spectrum of commutative Banach algebras under the weak topology and application, Monatsh. Math., 121 (1996), 353-379.