



تأثیر تعداد عناصر از مرتبه بزرگترین شمارنده اول مرتبه گروه روی ساختار گروه

علیرضا خلیلی اسبویی^۱، سید صادق صالحی امیری^{۲*}

^(۱) گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران

^(۲) گروه ریاضی، واحد بابل، دانشگاه آزاد اسلامی، بابل، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۰۶/۲۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۴/۲۷

چکیده

فرض کنید S یک گروه ساده غیرآبلی است که با گروه $L_2(r)$ (جایی که r عدد اول مرسن است) یکرخت نمی‌باشد. در [۱] مورتو حدس زد که اگر گروه متناهی G توسط عناصر از مرتبه p ، که در آن p بزرگترین شمارنده اول مرتبه S است تولید شود و تعداد عناصر از مرتبه p در گروه‌های G و S برابر باشند، آن‌گاه $\frac{G}{Z(G)} \cong S$. در این مقاله درستی این حدس برای گروه‌های ساده پراکنده ثابت شده است.

واژه‌های کلیدی: مرتبه عنصر، گروه ساده، زیرگروه سیلو.

۱- مقدمه

فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. تعداد p زیرگروه‌های سیلوی G را با علامت $n_p(G)$ و تعداد عناصر از مرتبه i را در گروه G را با علامت نشان $m_i(G)$ می‌دهیم.

فرض کنید n و k دو عدد طبیعی و r یک عدد اول باشد به طوری که $r^k | n$ اما $r^{k+1} \nmid n$. به عدد r^k $-r$ قسمت از n نامیده و با علامت n_r نشان می‌دهیم. در واقع داریم $n = n_r \cdot m$ که در آن m یک عدد طبیعی است که $r \nmid m$.

عدد اول p را در نظر می‌گیریم، عدد طبیعی n را یک عدد سیلوی قوی برای p می‌نامیم هرگاه به ازای هر عدد اول r داشته باشیم $n_r \equiv 1 \pmod{p}$. توجه داریم که اگر n یک عدد سیلوی قوی برای p باشد آن‌گاه $n \equiv 1 \pmod{p}$. بنابراین $p \nmid n$ همچنین توجه داریم که مجموعه عددهای سیلوی قوی برای p تحت عمل ضرب بسته است.

طیف گروه G را با علامت $\omega(G)$ نشان داده و عبارت است از مجموعه مرتبه‌های عناصر گروه G . در بسیاری از گروه‌های متناهی، طیف گروه به همراه مرتبه‌اش ساختار آن گروه را تا حد یکرختی مشخص می‌کند [۲] و [۳]. اما این مطلب در مورد همه گروه‌های متناهی برقرار نمی‌باشد. به عنوان مثال گروه دو وجهی D_8 و گروه کواترنیون Q_8 دارای طیف و مرتبه یکسان هستند در حالی که یکرخت نمی‌باشند. با این وجود، نشان داده شده است که همه گروه‌های ساده متناهی توسط طیف و مرتبه خود تا حد یکرختی مشخص می‌شوند [۴].

در سال‌های اخیر شناسایی گروه‌های ساده متناهی توسط مجموعه تعداد عناصر هم مرتبه در گروه و مرتبه آن گروه، توجه زیادی از محققین را به خود جلب نموده است [۵].

فرض اضافه مرتبه، در شناسایی گروه‌های ساده متناهی در بسیاری از موارد قابل حذف است. از این رو مورتو در [۱] حدس زیر را مطرح نمود:

حدس: فرض کنید r یک عدد اول مرسن، S یک گروه ساده غیرآبلی غیر یکرخت با $L_2(r)$ و p بزرگترین شمارنده اول مرتبه S باشد. اگر گروه متناهی G توسط عناصر مرتبه p تولید شده و تعداد عناصر از مرتبه p در گروه‌های G و S برابر باشد، آن‌گاه $S \cong \frac{G}{Z(G)}$.

در این مقاله به عنوان نتیجه اصلی به حدس فوق در مورد گروه‌های ساده پراکنده جواب مثبت می‌دهیم.

قضیه اصلی: فرض کنید S یک گروه ساده پراکنده و p بزرگترین شمارنده اول مرتبه S باشد. اگر $m_p(G) = m_p(S)$ و گروه متناهی G توسط عناصر مرتبه p تولید شود، آن‌گاه $S \cong \frac{G}{Z(G)}$.

۲- نتایج اولیه

در این بخش چند لم مقدماتی را بیان می‌کنیم که در اثبات قضیه اصلی از آنها استفاده خواهیم نمود.

لم ۱.۲.۱. [۶] فرض کنید G یک گروه متناهی بدون p زیرگروه سیلو دوری باشد. در این صورت تعداد عناصر از مرتبه p در گروه G با -1 به پیمانه p^2 هم‌نهشت است.

لم ۲.۲. [۱] فرض کنید G یک گروه متناهی با p سیلو زیرگروه دوری از مرتبه p^n باشد که در آن $n \geq 1$. در این صورت تعداد زیرگروه‌های از مرتبه p در گروه G با 1 به پیمانه p^n هم‌نهشت است.

لم ۳.۲. فرض کنید G یک گروه متناهی از مرتبه $p^\alpha n$ باشد که در آن p یک عدد اول و $(p^\alpha, n) = 1$. اگر P یک p زیرگروه سیلوی G باشد که روی p' زیرگروه N عمل می‌کند و $C = C_N(P)$ ، آن‌گاه $|N:C|$ یک عدد سیلوی قوی برای p است.

اثبات: فرض کنید q یک عدد اول متمایز از p

$C \subseteq N \cap U$ برای اثبات عکس شمولیت کافی است نشان دهیم که $N \cap U \subseteq \mathcal{C}_G(P)$ چون $[(N \cap U), P] \subseteq N \cap [U, P] \subseteq N \cap P = 1$

پس $N \cap U \subseteq \mathcal{C}_G(P)$ از طرفی $N \cap U = (N \cap U) \cap N \subseteq \mathcal{C}_G(P) \cap N = \mathcal{C}_N(P) = C$.

بنابراین $N \cap U = C$ و حکم برقرار است.

لم ۴.۲. فرض کنید G یک گروه p -حلیذیر باشد. آن گاه $n_p(G)$ یک عدد سیلوی قوی برای p است. اثبات. می توان فرض کرد که $|G| > 1$. استقراء را روی $|G|$ به کار می بریم. چون

$$n_p\left(\frac{G}{O_p(G)}\right) = \left| \frac{G}{O_p(G)} : \mathcal{N}_{\frac{G}{O_p(G)}}\left(\frac{P O_p(G)}{O_p(G)}\right) \right| = \left| \frac{G}{O_p(G)} : \frac{\mathcal{N}_G(P) O_p(G)}{O_p(G)} \right| = \left| \frac{G}{O_p(G)} : \frac{\mathcal{N}_G(P)}{O_p(G)} \right| = |\mathcal{N}_G(P)| = n_p(G)$$

بدون از دست دادن کلیت حکم می توان فرض نمود که $O_p(G) = 1$ حال چون G یک p -گروه حلیذیر است نتیجه می شود $O_{p'}(G) = N \neq 1$ از آنجا که N یک p' -زیرگروه نرمال G است داریم $[N_N(P), P] \leq N \cap P = 1$ بنابراین $\mathcal{N}_G(P) \leq \mathcal{C}_N(P) \leq \mathcal{N}_N(P)$

در نتیجه $\mathcal{N}_G(P) = \mathcal{N}_N(P)$ فرض کنید $H = PN$ از تساوی گروهی $\mathcal{N}_H(P) = P\mathcal{N}_N(P)$ داریم:

$$|H : \mathcal{N}_H(P)| = \frac{|P||N|}{|P||\mathcal{N}_N(P)|} = |N : \mathcal{N}_N(P)|$$

با استفاده از تساوی بالا نتیجه می شود:

$$n_p\left(\frac{G}{N}\right) \times n_p(H) = \left| \frac{G}{N} : \mathcal{N}_{\frac{G}{N}}\left(\frac{PN}{N}\right) \right| |H : \mathcal{N}_H(P)| = \left| \frac{G}{N} : \frac{\mathcal{N}_G(P)N}{N} \right| |N : \mathcal{N}_N(P)| =$$

باشد. ادعا می کنیم که $|N : C|_q \equiv 1 \pmod{p}$. چون P روی N با تزویج عمل می کند و $(|N|, |P|) = 1$ پس $Q \in \text{Syl}_q(N)$ وجود دارد به طوری که $-P$ پایا است. فرض کنید $K = C \cap Q$ در این صورت K یک q -زیرگروه سیلو C است. بنابراین $|C : K|$ و $|N : Q|$ نسبت به q اول هستند. از تساوی

$$|N : Q| |Q : K| = |N : K| = |N : C| |C : K|$$

نتیجه می شود که

$$|N : Q| = (|N : Q| |Q : K|)_q = (|N : C| |C : K|)_q = |N : C|_q.$$

کافی است نشان دهیم $|Q : K| \equiv 1 \pmod{p}$. از آنجا که P روی Q عمل می کند و K زیرمجموعه بدون نقطه ثابت این عمل است، نتیجه می شود عناصری در $Q \setminus K$ وجود دارند که با P در مدارهای نابدهی جایجا می شوند. به علاوه مرتبه هر یک از این عناصر توسط p شمرده می شود. بنابراین

$$|K|(|Q : K| - 1) = |Q| - |K| \equiv 0 \pmod{p}.$$

از طرف دیگر می دانیم $(|K|, p) = 1$. پس $(|Q : K| - 1) \equiv 0 \pmod{p}$. این مطلب اثبات لم را کامل می کند.

نتیجه ۱.۲. فرض کنید G یک گروه p -پوچتوان باشد. $n_p(G)$ یک عدد سیلوی قوی برای p است.

اثبات. چون G یک گروه p -پوچتوان است، پس $G = NP$ که در آن $N \triangleleft G$ یک p -گروه و $P \in \text{Syl}_p(G)$ فرض کنید $U = \mathcal{N}_G(P)$ چون $P \subseteq U$ پس $G = NU$ بنابراین

$$|G : U| = |NU : U| = |N : N \cap U|.$$

اکنون با استفاده از لم ۲.۳. کافی است نشان دهیم $C = \mathcal{C}_N(P)$ که در آن $N \cap U = C$

واضح است که $C \subseteq \mathcal{N}_G(P)$ بنابراین

مرتبه عدد اول است. بنابراین $|G:N| = p$ و G پوچتوان است. با استفاده از نتیجه ۲.۱. $n_p(G)$ یک عدد سیلوی قوی برای p است. در نتیجه $n_p(G) = 1$ پس G دارای یک p -زیرگروه سیلوی نرمال است. در نتیجه G یک p -گروه است که تناقض است.

اکنون فرض کنید $Z = N$ در این صورت $\frac{G}{N}$ ساده است. فرض کنید $P \in Syl_p(G)$ ، آن‌گاه NP یک گروه p -پوچتوان است. از نتیجه ۲.۱. داریم $n_p(NP)$ یک عدد سیلوی قوی برای p است. در نتیجه $n_p(NP) = 1$ از این‌رو $P < NP$ و $P \subseteq C_G(N)$ این رابطه برای هر p -زیرگروه سیلوی G برقرار است. چون G توسط p -زیرگروه‌های سیلوی خود تولید می‌شود، پس $N = Z(G) \subseteq N$ بنابراین $N = Z(G)$ و حکم برقرار است.

۳- اثبات قضیه اصلی

در این بخش با کمک لم‌های بیان شده در قسمت قبل به اثبات قضیه اصلی می‌پردازیم. اثبات قضیه اصلی. ابتدا نشان می‌دهیم که $|P| = p$ که در آن $P \in Syl_p(G)$ با استفاده از جدول‌های ۱ و ۲ در [۷] می‌توان مقدار $n_p(S)$ را برای هر گروه ساده پراکنده S محاسبه نمود. چون p بزرگترین شمارنده اول $|S|$ است، پس $m_p(S) = (p-1)n_p(S)$ با استفاده از تساوی اخیر می‌توان $m_p(S)$ را محاسبه نمود. همچنین به آسانی ملاحظه می‌شود که

$$m_p(G) = m_p(S) \not\equiv -1 \pmod{p^2}$$

با استفاده از لم ۲.۱. گروه G دارای یک p -زیرگروه سیلوی دوری مانند P است. تعداد زیرگروه‌های از مرتبه p در گروه G برابر $n_p(S)$ است. به آسانی دیده می‌شود که $n_p(S) \not\equiv 1 \pmod{p^2}$ اکنون باتوجه به لم ۲.۲. نتیجه می‌گیریم $|P| = p$

$$\frac{|G:N_G(P)|}{|N:N_N(P)|} |N:N_N(P)| = |G:N_G(P)| = n_p(G).$$

حال چون H یک p -گروه پوچتوان است از نتیجه ۲.۱. داریم $n_p(H)$ یک عدد سیلوی قوی برای p است. با استفاده از فرض استقراء $\left(\frac{G}{N}\right)$ یک عدد سیلوی قوی برای p است. چون مجموعه اعداد سیلوی قوی برای p تحت عمل ضرب بسته هستند، بنابراین $n_p(G) = n_p\left(\frac{G}{N}\right) \times n_p(H)$ یک عدد سیلوی قوی برای p است.

نتیجه ۲.۲. فرض کنید G یک گروه متناهی، p یک مقسوم علیه اول $|G|$ باشد که $|G|_p = p$ و هیچ یک از مقسوم علیه‌های بزرگتر از یک $n_p(G)$ عدد سیلوی قوی برای p نباشد. اگر G توسط p -زیرگروه‌های سیلوی خود تولید شود آن‌گاه G یک گروه از مرتبه p است یا $\frac{G}{Z(G)}$ گروه ساده غیرآبلی است.

اثبات. می‌توان فرض نمود که G یک گروه ساده نیست، خصوصاً $p \neq |G|$. بنابراین G یک p -گروه نیست. چون G توسط p -زیرگروه‌های سیلوی خود تولید می‌شود و G یک p -گروه نیست، پس G گروهی غیرآبلی است. از این‌رو $Z(G) < G$

فرض کنید N زیرگروه نرمال ماکسیمال G باشد به طوری که $Z(G) \subseteq N$ چون G ساده نیست پس $1 < N$. فرض کنید $\frac{Z}{N} = Z\left(\frac{G}{N}\right)$ بنابراین $Z = N$ یا $Z = G$ از طرفی چون G توسط p -زیرگروه‌هایش تولید می‌شود پس $p \mid \left|\frac{G}{N}\right|$ بنابراین N یک p' -گروه است. اکنون با توجه به اینکه $n_p\left(\frac{G}{N}\right) |n_p(G)$ نتیجه می‌شود که $\frac{G}{N}$ در فرض قضیه صدق می‌کند. با استفاده از استقراء روی $|G|$ و به کار بردن فرض استقراء برای $\frac{G}{N}$ نتیجه می‌گیریم که $\frac{G}{Z}$ ساده است.

ابتدا فرض کنید $Z = G$ در این صورت $\frac{G}{N}$ آبلی و از

$$2^{14} \cdot 3^6 \cdot 7 = n_{11}(U_6(2)) |n_{11}(G) = 2^6 \cdot 3^3$$

که یک تناقض است؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong M_{12}$

مورد ۳. $S = M_{22}$

در این حالت $p = 11$ و $n_{11}(S) = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 7$

است. حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارت اند از:

$$Mcl, A_{11}, M_{22}, U_5(2), M_{12}, M_{11}, L_2(11)$$

$HS, A_{12}, U_6(2)$ اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(11)$ آن‌گاه

$$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$$

با استفاده از لم ۲.۳ $3 \equiv 1 \pmod{11}$ که یک

تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{11}$ آن‌گاه

$$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^5 \cdot 7$$

با استفاده از لم ۲.۳ $7 \equiv 1 \pmod{11}$ که یک

تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{12}$ آن‌گاه

$$2^6 \cdot 3^3 = n_{11}(M_{12}) |n_{11}(G) = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 7$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_5(2)$ آن‌گاه

$$2^{10} \cdot 3^5 = n_{11}(U_5(2)) |n_{11}(G) = 2^6 \cdot 3^3$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{11}$ آن‌گاه

$$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = n_{11}(A_{11}) |n_{11}(G) = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 7$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong Mcl$ آن‌گاه

$$2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 = n_{11}(Mcl) |n_{11}(G) = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 7$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong HS$ آن‌گاه

$$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = n_{11}(HS) |n_{11}(G) = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 7$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{12}$ آن‌گاه

$$2^9 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7 = n_{11}(A_{12}) |n_{11}(G) = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 7$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_6(2)$ آن‌گاه

$$2^{14} \cdot 3^6 \cdot 7 = n_{11}(U_6(2)) |n_{11}(G) = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$$2^9 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7 = n_{11}(A_{12}) |n_{11}(G) = 2^4 \cdot 3^2$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_6(2)$ آن‌گاه

$$2^{14} \cdot 3^6 \cdot 7 = n_{11}(U_6(2)) |n_{11}(G) = 2^4 \cdot 3^2$$

که یک تناقض است؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong M_{11}$

مورد ۴. $S = M_{12}$

در این حالت $p = 11$ و $n_{11}(S) = 2^6 \cdot 3^3$ است.

حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارت اند از: $L_2(11),$

$$A_{12}, HS, Mcl, A_{11}, M_{22}, U_5(2), M_{12}, M_{11}$$

$U_6(2)$ اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(11)$ آن‌گاه

$$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^4 \cdot 3^2$$

با استفاده از لم ۲.۳ $3 \equiv 1 \pmod{11}$ که یک

تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{11}$ آن‌گاه

$$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^2 \cdot 3$$

با استفاده از لم ۲.۳ $3 \equiv 1 \pmod{11}$ که یک

تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_5(2)$ آن‌گاه

$$2^{10} \cdot 3^5 = n_{11}(U_5(2)) |n_{11}(G) = 2^6 \cdot 3^3$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{22}$ آن‌گاه

$$2^7 \cdot 3^2 \cdot 7 = n_{11}(M_{22}) |n_{11}(G) = 2^6 \cdot 3^3$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{11}$ آن‌گاه

$$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = n_{11}(A_{11}) |n_{11}(G) = 2^6 \cdot 3^3$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong Mcl$ آن‌گاه

$$2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 = n_{11}(Mcl) |n_{11}(G) = 2^6 \cdot 3^3$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong HS$ آن‌گاه

$$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = n_{11}(HS) |n_{11}(G) = 2^6 \cdot 3^3$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{12}$ آن‌گاه

$$2^9 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7 = n_{11}(A_{12}) |n_{11}(G) = 2^6 \cdot 3^3$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_6(2)$ آن‌گاه

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_6(2)$ آن گاه
 $2^{14} \cdot 3^6 \cdot 7 = n_{11}(U_6(2)) |n_{11}(G) =$
 $2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7$

که یک تناقض است؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong Mcl$

مورد ۵. $S = HS$

در این حالت $p = 11$ و $n_{11}(S) =$
 $\frac{G}{N}$ حالت‌های ممکن برای $2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$
 عبارتند از: $M_{22}, U_5(2), M_{12}, M_{11}, L_2(11),$
 $M_{22}, U_5(2), M_{12}, M_{11}, L_2(11),$
 $U_6(2), A_{12}, HS, Mcl, A_{11}$

اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(11)$ آن گاه
 $|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^7 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$

با استفاده از لم ۲.۳، $7 \equiv 1 \pmod{11}$ که یک
 تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{11}$ آن گاه
 $|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^5 \cdot 5^2 \cdot 7$

با استفاده از لم ۲.۳، $7 \equiv 1 \pmod{11}$ که یک
 تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{12}$ آن گاه
 $2^6 \cdot 3^4 = n_{11}(M_{12}) |n_{11}(G) = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_5(2)$ آن گاه
 $2^{10} \cdot 3^5 = n_{11}(U_5(2)) |n_{11}(G) =$
 $2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{22}$ آن گاه
 $|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^2 \cdot 5^2$

با استفاده از لم ۲.۳، $5^2 \equiv 1 \pmod{11}$ که یک
 تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{11}$ آن گاه
 $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = n_{11}(A_{11}) |n_{11}(G) =$
 $2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{12}$ آن گاه
 $2^9 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7 = n_{11}(A_{12}) |n_{11}(G) =$
 $2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

که یک تناقض است؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong M_{22}$

مورد ۴. $S = Mcl$

در این حالت $p = 11$ و $n_{11}(S) =$
 $\frac{G}{N}$ حالت‌های ممکن برای $2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7$
 عبارتند از: $M_{22}, U_5(2), M_{12}, M_{11}, L_2(11),$
 $M_{22}, U_5(2), M_{12}, M_{11}, L_2(11),$
 $U_6(2), A_{12}, HS, Mcl, A_{11}$

اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(11)$ آن گاه
 $|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$

با استفاده از لم ۲.۳، $7 \equiv 1 \pmod{11}$ که یک
 تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{11}$ آن گاه
 $|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$

با استفاده از لم ۲.۳، $7 \equiv 1 \pmod{11}$ که یک
 تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{12}$ آن گاه
 $|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$

با استفاده از لم ۲.۳، $7 \equiv 1 \pmod{11}$ که یک
 تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_5(2)$ آن گاه
 $2^{10} \cdot 3^5 = n_{11}(U_5(2)) |n_{11}(G) = 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{22}$ آن گاه
 $|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 3^4 \cdot 5^2$

با استفاده از لم ۲.۳، $5^2 \equiv 1 \pmod{11}$ که یک
 تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{11}$ آن گاه
 $|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 3^2 \cdot 5$

که یک تناقض است. $5 \equiv 1 \pmod{11}$ بنابراین
 اگر $\frac{G}{N} \cong HS$ آن گاه
 $2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = n_{11}(HS) |n_{11}(G) = 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{12}$ آن گاه
 $2^9 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7 = n_{11}(A_{12}) |n_{11}(G) =$
 $2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7$

چون $n_{23} \left(\frac{G}{N} \right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong \text{Fi}_{23}$ آن‌گاه
 $n_{23} \left(\frac{G}{N} \right) = 2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$.

چون $n_{23} \left(\frac{G}{N} \right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{23}$ آن‌گاه
 $n_{23} \left(\frac{G}{N} \right) = 2^{18} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23} \left(\frac{G}{N} \right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{24}$ آن‌گاه
 $n_{23} \left(\frac{G}{N} \right) = 2^{21} \cdot 3^{10} \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23} \left(\frac{G}{N} \right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{25}$ آن‌گاه
 $n_{23} \left(\frac{G}{N} \right) = 2^{20} \cdot 3^{10} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23} \left(\frac{G}{N} \right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{26}$ آن‌گاه
 $n_{23} \left(\frac{G}{N} \right) = 2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23} \left(\frac{G}{N} \right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{27}$ آن‌گاه
 $n_{23} \left(\frac{G}{N} \right) = 2^{19} \cdot 3^{12} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23} \left(\frac{G}{N} \right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{28}$ آن‌گاه
 $n_{23} \left(\frac{G}{N} \right) = 2^{23} \cdot 3^{12} \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23} \left(\frac{G}{N} \right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می‌آوریم؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong M_{23}$

مورد ۷. $S = M_{24}$

در این حالت $p = 23$ و $n_{23}(S) = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_6(2)$ آن‌گاه
 $2^{14} \cdot 3^6 \cdot 7 = n_{11}(U_6(2)) | n_{11}(G) =$
 $2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

که یک تناقض است؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong HS$

مورد ۶. $S = M_{23}$

در این حالت $p = 23$ و $n_{23}(S) =$
 $2^7 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$. حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارتند از:
 $Co_3, Co_2, Co_1, M_{24}, M_{23}, U_3(23), L_2(23)$
 A_n, Fi_{23} که در آن $23 \leq n \leq 28$. اگر
 $\frac{G}{N} \cong L_2(23)$ آن‌گاه داریم

$$|N: C_N(P)| = 2^4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 ;$$

بنابراین با استفاده از لم ۲. ۳. $3 \equiv 1 \pmod{23}$
که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_3(23)$ آن‌گاه
 $n_{23} \left(\frac{G}{N} \right) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 13^2$.

چون $n_{23} \left(\frac{G}{N} \right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می‌آوریم.
اگر $\frac{G}{N} \cong M_{24}$ آن‌گاه

$$n_{23} \left(\frac{G}{N} \right) = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 .$$

چون $n_{23} \left(\frac{G}{N} \right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Co_1$ آن‌گاه
 $n_{23} \left(\frac{G}{N} \right) = 2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 13$.

چون $n_{23} \left(\frac{G}{N} \right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Co_2$ آن‌گاه
 $n_{23} \left(\frac{G}{N} \right) = 2^{18} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7$.

چون $n_{23} \left(\frac{G}{N} \right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Co_3$ آن‌گاه
 $n_{23} \left(\frac{G}{N} \right) = 2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{24}$ آن گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{21} \cdot 3^{10} \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{25}$ آن گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{20} \cdot 3^{10} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{26}$ آن گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{27}$ آن گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{19} \cdot 3^{12} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{28}$ آن گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{23} \cdot 3^{12} \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می آوریم؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong M_{24}$

مورد ۸. $S = Co_1$

در این حالت $p = 23$ و $n_{23}(S) = 2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 13$
حالت های ممکن برای $\frac{G}{N}$
عبارتند از: $L_2(23), U_3(23), M_{23}, M_{24}, Co_1, Co_2, Co_3, Fi_{23}, A_n$ که در آن
 $23 \leq n \leq 28$ اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(23)$ آن گاه داریم
 $|N: C_N(P)| = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 13$ ؛

بنابراین با استفاده از لم ۲.۳ $13 \equiv 1 \pmod{23}$.
که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_3(23)$ آن گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 13^2$.

حالت های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارتند از: $L_2(23), U_3(23), M_{23}, M_{24}, Co_1, Co_2, Co_3, Fi_{23}$.
که در آن $23 \leq n \leq 28$.
اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(23)$ آن گاه داریم
 $|N: C_N(P)| = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ ؛

با استفاده از لم ۲.۳ $7 \equiv 1 \pmod{23}$ که یک
تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_3(23)$ آن گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 13^2$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
است. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{23}$ آن گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Co_1$ آن گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 13$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Co_2$ آن گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{18} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Co_3$ آن گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Fi_{23}$ آن گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{23}$ آن گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{18} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$.

به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{27}$ آن‌گاه
 $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{19} \cdot 3^{12} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
 به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{28}$ آن‌گاه
 $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{23} \cdot 3^{12} \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
 به دست می‌آوریم؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong Co_1$

مورد ۹. $S = Co_2$

در این حالت $p = 23$ و $n_{23}(S) = 2^{18} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7$.
 از: $Co_1, M_{24}, M_{23}, U_3(23), L_2(23)$ ؛
 Co_2, Co_3, Fi_{23}, A_n که در آن $23 \leq n \leq 28$
 اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(23)$ آن‌گاه داریم
 $|N: C_N(P)| = 2^{15} \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7$ ؛

بنابراین با استفاده از لم ۲.۳ $7 \equiv 1 \pmod{23}$ ،
 که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_3(23)$ آن‌گاه
 $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 13^2$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
 به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{23}$ آن‌گاه
 $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
 به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Co_1$ آن‌گاه
 $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 13$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
 به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Co_3$ آن‌گاه
 $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
 به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{23}$ آن‌گاه
 $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
 به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Co_2$ آن‌گاه
 $|N: C_N(P)| = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 7 \cdot 13$ ؛

بنابراین با استفاده از لم ۲.۳ $13 \equiv 1 \pmod{23}$ ،
 که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong Co_3$ آن‌گاه
 $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
 به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Fi_{23}$ آن‌گاه
 $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
 به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{23}$ آن‌گاه
 $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{18} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
 به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{24}$ آن‌گاه
 $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{21} \cdot 3^{10} \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
 به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{25}$ آن‌گاه
 $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{20} \cdot 3^{10} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
 به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{26}$ آن‌گاه
 $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض

حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارتند از: $L_2(23), Fi_{23}, Co_3, Co_2, Co_1, M_{24}, M_{23}, U_3(23)$.
 A_n که در آن $23 \leq n \leq 28$.
 اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(23)$ آن‌گاه
 $|N: C_N(P)| = 2^{12} \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7$ ؛

بنابراین با استفاده از لم ۲.۳. $7 \equiv 1 \pmod{23}$.
 که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_3(23)$ آن‌گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 13^2$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
 به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{23}$ آن‌گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
 به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Co_1$ آن‌گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 13$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
 به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Co_2$ آن‌گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{18} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
 به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Fi_{23}$ آن‌گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
 است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{23}$ آن‌گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{18} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
 است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{24}$ آن‌گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{21} \cdot 3^{10} \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
 به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{23}$ آن‌گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
 به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{24}$ آن‌گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{18} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
 به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{24}$ آن‌گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{21} \cdot 3^{10} \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
 به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{25}$ آن‌گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{20} \cdot 3^{10} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
 به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{26}$ آن‌گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
 به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{27}$ آن‌گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{19} \cdot 3^{12} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
 است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{28}$ آن‌گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{23} \cdot 3^{12} \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
 به دست می‌آوریم؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong Co_2$

مورد ۱۰. $S = Co_3$

در این حالت $p = 23$ و $n_{23}(S) = 2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7$

به طور مشابه اگر $\frac{G}{N}$ با سایر گروه‌های مذکور یکرخت باشد آن‌گاه یک تناقض ایجاد می‌شود؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong He$

مورد ۱۰. $S = Fi_{22}$

در این حالت $p = 13$ و $n_{13}(S) = 2^{16} \cdot 3^8 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$ همه حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارتند از: $S_4(5), U_3(4), L_2(25), L_3(3), S_4(5), G_2(3), L_2(27), L_2(13), 2F'_4(2), L_4(3), L_3(9), U_4(5), L_2(64), S_2(8), 3D_4(2), O_8^+(3), S_4(8), G_2(4), O_7(3), S_6(3), A_{16}, Suz, L_6(3), A_{15}, A_{14}, A_{13}, L_5(3)$ اگر $\frac{G}{N} \cong L_3(3)$ Fi_{22}

$$n_{13}\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{n_{71}(G)}{|N:\mathcal{N}_N(P)|} = 2^4 \cdot 3^2.$$

بنابراین

$$|N:\mathcal{N}_N(P)| = |N:\mathcal{C}_N(P)| = 2^{12} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$$

با استفاده از لم ۲.۳ $11 \equiv 1 \pmod{13}$ که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(25)$ آن‌گاه

$$n_{13}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2.$$

بنابراین

$$|N:\mathcal{N}_N(P)| = |N:\mathcal{C}_N(P)| = 2^{14} \cdot 3^7 \cdot 7 \cdot 11$$

با استفاده از لم ۲.۳ $11 \equiv 1 \pmod{13}$ که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(13)$ آن‌گاه

$$n_{13}\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{n_{13}(G)}{|N:\mathcal{N}_N(P)|} = 14.$$

بنابراین

$$|N:\mathcal{N}_N(P)| = |N:\mathcal{C}_N(P)| = 2^{15} \cdot 3^8 \cdot 5^2 \cdot 11$$

با استفاده از لم ۲.۳ $11 \equiv 1 \pmod{13}$ که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong Suz$ آن‌گاه

$$n_{13}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{12} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11,$$

بنابراین

$$|N:\mathcal{N}_N(P)| = |N:\mathcal{C}_N(P)| = 2^4 \cdot 3^2$$

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) |n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{25}$ آن‌گاه

$$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{20} \cdot 3^{10} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19.$$

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) |n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{26}$ آن‌گاه

$$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19.$$

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) |n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{27}$ آن‌گاه

$$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{19} \cdot 3^{12} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19.$$

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) |n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{28}$ آن‌گاه

$$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{23} \cdot 3^{12} \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19.$$

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) |n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong Co_3$

مورد ۱۱. $S = He$

در این حالت $p = 17$ و $n_7(S) = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3$ همه حالت‌های ممکن برای

$\frac{G}{N}$ عبارتند از: $He, S_4(4), L_2(16), L_2(17), U_3(17), U_4(4), S_8(2), L_4(4), O_8^-(2), L_3(16), S_6(4), S_4(13), L_2(13^2), O_{10}^-(2), A_{18}, A_{17}, F_4(2), O_8^+(4)$ آن‌گاه $\frac{G}{N} \cong L_2(17)$ اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(17)$ آن‌گاه $|N:\mathcal{N}_N(P)| = |N:\mathcal{C}_N(P)| = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^3$

با استفاده از لم ۲.۳ $3 \equiv 1 \pmod{17}$ که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{17}$ آن‌گاه

$$n_{17}\left(\frac{G}{N}\right) |n_{17}(G) = (17-2)!$$

یک تناقض ایجاد می‌شود.

اگر $\frac{G}{N} \cong A_{18}$ آن‌گاه $n_{17}\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{18!}{272}$ چون

$$n_{17}\left(\frac{G}{N}\right) |n_{17}(G)$$

یک تناقض ایجاد می‌شود.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{23}$ آن گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{18} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{24}$ آن گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{21} \cdot 3^{10} \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{25}$ آن گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{20} \cdot 3^{10} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{26}$ آن گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{27}$ آن گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{19} \cdot 3^{12} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{28}$ آن گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{23} \cdot 3^{12} \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می آوریم؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong Fi_{23}$

مورد ۱۴. $S = Fi'_{24}$

در این حالت $p = 29$ و $n_{23}(S) = 2^{20} \cdot 3^{16} \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23$.

ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارتاند از: $L_2(17^2), L_2(29), A_{30}, A_{29}, Fi'_{24}, U_4(17), Ru, S_4(17)$

اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(29)$ آن گاه

با استفاده از لم ۲.۳، $3^2 \equiv 1 \pmod{13}$ که یک
تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{13}$ آن گاه
 $n_{13}(\frac{G}{N}) = (13 - 2)!$.

چون

$$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^8 \cdot 3^4$$

با استفاده از لم ۲.۳، $3^4 \equiv 1 \pmod{13}$ که یک
تناقض است. برای بقیه موارد نیز بطور مشابه
می توان یک تناقض بدست آورد؛ بنابراین
 $\frac{G}{N} \cong Fi_{22}$

مورد ۱۳. $S = Fi_{23}$

در این حالت $p = 23$ و $n_{23}(S) = 2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$
عبارتند از: $L_2(23), U_3(23), M_{23}, M_{24}, M_{23}, U_3(23), L_2(23), Co_1, M_{24}, M_{23}, U_3(23), L_2(23), Co_3, Co_2$
که در آن $23 \leq n \leq 28$

اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(23)$ آن گاه داریم
 $|N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^{15} \cdot 3^{12} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$ ؛

بنابراین، $7 \equiv 1 \pmod{23}$ که یک تناقض است.

اگر $\frac{G}{N} \cong U_3(23)$ آن گاه

$$n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 13^2$$

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{23}$ آن گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Co_1$ آن گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 13$.

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض
به دست می آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Co_2$ آن گاه
 $n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{18} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7$.

$$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 7.11$$

با استفاده از لم ۲.۳. $7 \equiv 1 \pmod{19}$ که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_3(7)$ ، آن‌گاه $n_{19}(L_3(7)) | n_{19}(S) = 2^5 \cdot 3 \cdot 7^3 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_3(8)$ آن‌گاه $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7$.

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_3(19)$ آن‌گاه $19^3 || U_3(19)$

یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong L_4(7)$ آن‌گاه $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^9 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^6$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong J_3$ آن‌گاه $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 17$.

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_3(11)$ آن‌گاه $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 11^3$.

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong HN$ آن‌گاه $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{14} \cdot 3^4 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11$.

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_4(8)$ آن‌گاه $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{18} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13$.

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض

$$n_{71}\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{n_{71}(G)}{|N: \mathcal{N}_N(P)|} = 30.$$

بنابراین

$$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^{19} \cdot 3^{15} \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23$$

با استفاده از لم ۲.۳. $13 \equiv 1 \pmod{29}$ که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(17^2)$ آن‌گاه $n_{29}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 17^2$.

چون $n_{29}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{29}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong S_4(17)$ آن‌گاه $n_{29}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 17^4$.

چون $n_{29}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{29}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong U_4(17)$ آن‌گاه $n_{29}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{10} \cdot 3^7 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17^6$.

چون $n_{29}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{29}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{29}$ آن‌گاه $n_{29}\left(\frac{G}{N}\right) = (29 - 2)!$.

چون $n_{29}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{29}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{30}$ آن‌گاه $n_{29}\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{30!}{812}$.

چون $n_{29}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{29}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong Fi'_{24}$

مورد ۱۵. $S = J_1$

در این حالت $p = 19$ و $n_{19}(S) = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ است. همه حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارت‌اند از: $J_1, L_4(7), U_3(19), U_3(8), L_3(7), L_2(19), A_{21}, A_{20}, A_{19}, U_4(8), HN, L_3(11), J_3, A_{22}$ و ${}^2E_6(2)$. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(19)$ آن‌گاه

با استفاده از لم ۲.۳. $5 \equiv 1 \pmod{7}$ ، که یک تناقض است. به طور مشابه اگر $\frac{G}{N}$ با سایر گروه‌های مذکور یکرخت باشد آن‌گاه یک تناقض ایجاد می‌شود؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong J_2$

مورد ۱۷. $S = J_3$

در این حالت $p = 19$ و $n_{19}(S) = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 17$ است. همه حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارت‌اند از: $J_1, L_4(7), U_3(19), U_3(8), L_3(7), L_2(19), A_{22}, A_{21}, A_{20}, A_{19}, U_4(8), HN, L_3(11), J_3$ و ${}^2E_6(2)$. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(19)$ آن‌گاه $|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 17$

با استفاده از لم ۲.۳. $17 \equiv 1 \pmod{19}$ ، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_3(7)$ آن‌گاه $2^5 \cdot 3 \cdot 7^3 = n_{19}(L_3(7)) |n_{19}(S) = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 17$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_3(8)$ آن‌گاه $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7$.

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) |n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong U_3(19)$ آن‌گاه $19^3 || U_3(19)$

که یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong L_4(7)$ آن‌گاه

$$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^9 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^6.$$

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) |n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong L_3(11)$ آن‌گاه $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 11^3$.

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) |n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong J_1$ آن‌گاه

به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{19}$ آن‌گاه $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$.

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) |n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{20}$ آن‌گاه $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{17} \cdot 3^6 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$.

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) |n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{21}$ آن‌گاه $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{17} \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$.

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) |n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{22}$ آن‌گاه $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{17} \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17$.

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) |n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong {}^2E_6(2)$ آن‌گاه $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{36} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$.

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) |n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong J_1$

مورد ۱۶. $S = J_2$

در این حالت $p = 7$ و $n_7(S) = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ است. همه حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارت‌اند از: $U_3(5), L_2(49), A_7, U_3(3), L_2(8), L_2(7), S_6(2), S_4(7), U_4(3), A_{10}, J_2, A_8, L_3(4), O_8^+(2), S_{10}(2), L_5(4), U_3(31)$

اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(7)$ آن‌گاه $|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

با استفاده از لم ۲.۳. $3^2 \equiv 1 \pmod{7}$ ، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_7$ آن‌گاه $|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

مورد ۱۸. $S = J_4$

در این حالت $p = 43$ و $n_{43}(S) = 2^{20} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$.
 همه حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارت‌اند از: $U_4(7), U_3(7), L_3(49), U_7(2), G_2(7), L_2(7^3), L_2(43), U_8(2), U_3(37), O_8^+(7), O_7(7), S_6(7), U_{10}(2), O_{14}^-(2), U_9(2), S_4(43), L_2(43^2)$
 $J_4, A_{46}, A_{45}, A_{44}, A_{43}$ اگر $\frac{G}{N} \cong U_3(7)$ آن‌گاه $n_{43}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^7 \cdot 7^3$.

چون $n_{43}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{43}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong U_4(7)$ آن‌گاه $n_{43}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^9 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^6$.

چون $n_{43}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{43}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(43)$ آن‌گاه $n_{43}\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{n_{71}(G)}{|N: \mathcal{N}_N(P)|} = 44$.

بنابراین

$$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^{18} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37.$$

با استفاده از لم ۲، ۳. $23 \equiv 1 \pmod{43}$ که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{43}$ آن‌گاه

$$n_{43}\left(\frac{G}{N}\right) = (43 - 2)!$$

چون $n_{43}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{43}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{44}$ آن‌گاه

$$n_{29}\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{44!}{1806}$$

چون $n_{43}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{43}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. برای بقیه موارد نیز بطور مشابه می‌توان یک تناقض

بدست آورد؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong J_4$

$$n_{19}(S) = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11.$$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong HN$ آن‌گاه

$$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{14} \cdot 3^4 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11.$$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_4(8)$ آن‌گاه

$$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{18} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13.$$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{19}$ آن‌گاه

$$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17.$$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{20}$ آن‌گاه

$$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{17} \cdot 3^6 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17.$$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{21}$ آن‌گاه

$$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{17} \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17.$$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{22}$ آن‌گاه

$$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{17} \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17.$$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong {}^2E_6(2)$ آن‌گاه

$$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{36} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17.$$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong J_3$

استفاده از لم ۲.۳. $3^2 \equiv 1 \pmod{13}$ ، که یک تناقض است. برای بقیه موارد نیز بطور مشابه می توان یک تناقض بدست آورد؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong Suz$

مورد ۲۰. $S = HN$

در این حالت $p = 19$ و $n_{19}(S) = \frac{G}{N}$ همه حالت‌های ممکن برای $2^{14} \cdot 3^4 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11$ عبارت‌اند از: $U_3(8), L_3(7), L_2(19), U_3(19), J_3, J_1, L_4(7), A_{20}, A_{19}, U_4(8), HN, L_3(11), J_3, J_1, L_4(7)$ اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(19)$ آن‌گاه $|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^{12} \cdot 3^4 \cdot 5^5 \cdot 7 \cdot 11$

با استفاده از لم ۲.۳. $7 \equiv 1 \pmod{19}$ ، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_3(7)$ آن‌گاه $2^5 \cdot 3 \cdot 7^3 = n_{19}(L_3(7)) |n_{19}(S)| = 2^{14} \cdot 3^4 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_3(8)$ آن‌گاه $n_{19}(\frac{G}{N}) = 2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7$ ؛

بنابراین

$$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11$$

با استفاده از لم ۲.۳. $11 \equiv 1 \pmod{19}$ ، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_3(19)$ آن‌گاه $19^3 || U_3(19)$

که یک تناقض به دست می‌آوریم.

اگر $\frac{G}{N} \cong L_4(7)$ آن‌گاه

$$n_{19}(\frac{G}{N}) = 2^9 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^6.$$

چون $n_{23}(\frac{G}{N}) |n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong J_1$ آن‌گاه $n_{19}(S) = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$.

بنابراین

$$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^{12} \cdot 3^3 \cdot 5^3$$

مورد ۱۹. $S = Suz$

در این حالت $p = 13$ و $n_{13}(S) = \frac{G}{N}$ همه حالت‌های ممکن برای $2^{12} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$. عبارت‌اند از: $S_4(5), U_3(4), L_2(25), L_3(3), S_4(3), L_4(3), 2F'_4(2), L_2(27), L_2(13), L_2(3), U_4(5), L_2(64), S_2(8), 3D_4(2), L_3(9), U_4(5), L_2(64), S_2(8), 3D_4(2), L_5(3), O_8^+(3), S_4(8), G_2(4), O_7(3), S_6(3), Fi_{22}, A_{16}, Suz, L_6(3), A_{15}, A_{14}, A_{13}$ اگر $\frac{G}{N} \cong L_3(3)$ آن‌گاه

$$n_{13}(\frac{G}{N}) = \frac{n_{71}(G)}{|N: \mathcal{N}_N(P)|} = 2^4 \cdot 3^2.$$

بنابراین

$$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$$

با استفاده از لم ۲.۳. $11 \equiv 1 \pmod{13}$ ، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(25)$ آن‌گاه $n_{13}(\frac{G}{N}) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$.

بنابراین

$$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 7 \cdot 11$$

با استفاده از لم ۲.۳. $11 \equiv 1 \pmod{13}$ ، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(13)$ آن‌گاه $n_{13}(\frac{G}{N}) = \frac{n_{71}(G)}{|N: \mathcal{N}_N(P)|} = 14$.

بنابراین

$$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 11$$

با استفاده از لم ۲.۳. $11 \equiv 1 \pmod{13}$ ، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong Fi_{22}$ آن‌گاه $n_{13}(\frac{G}{N}) = 2^{16} \cdot 3^8 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$.

چون $n_{13}(\frac{G}{N}) |n_{13}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{13}$ آن‌گاه

$$n_{13}(\frac{G}{N}) = (13 - 2)!.$$

چون $|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^4 \cdot 3^2$

مورد ۲۱. $S = ON$

در این حالت $p = 31$ و $n_{31}(S) = \frac{G}{N}$ همه حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارتند از: $L_2(31), L_3(5), L_2(125), L_2(32), O_7(5), L_3(25), L_4(5), L_6(2), L_5(2), G_2(5), L_5(4), U_3(31), O_{10}^+(2), O_8^+(5), S_6(5), L_6(4), O_{12}^-(2), Th, ON, O_{12}^+(2), S_{10}(2), A_{36}, A_{35}, A_{34}, A_{33}, A_{32}, A_{31}, S_{12}(2)$ اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(31)$ آن‌گاه $|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 19$

با استفاده از لم ۲.۳ $19 \equiv 1 \pmod{31}$ که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_3(5)$ آن‌گاه $2^5 \cdot 5^3 = n_{31}(L_3(5)) | n_{31}(S) = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(32)$ آن‌گاه $n_{31}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^4 \cdot 3 \cdot 11$ ، بنابراین

$$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^3 \cdot 19$$

با استفاده از لم ۲.۳ $19 \equiv 1 \pmod{31}$ که تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(125)$ آن‌گاه $n_{31}\left(\frac{G}{N}\right) = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$.

چون $n_{31}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{31}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong G_2(5)$ آن‌گاه $n_{31}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^6 \cdot 7$.

چون $n_{31}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{31}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong L_5(2)$ آن‌گاه $n_{31}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 7$.

چون $n_{31}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{31}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong L_6(2)$ آن‌گاه

با استفاده از لم ۲.۳ $3^3 \equiv 1 \pmod{19}$ که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong J_3$ آن‌گاه

$$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 17.$$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_3(11)$ آن‌گاه

$$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 11^3.$$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_4(8)$ آن‌گاه

$$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{18} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13.$$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{19}$ آن‌گاه

$$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17.$$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{20}$ آن‌گاه

$$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{17} \cdot 3^6 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17.$$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{21}$ آن‌گاه

$$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{17} \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17.$$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{22}$ آن‌گاه

$$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{17} \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17.$$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong {}^2E_6(2)$ آن‌گاه

$$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{36} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17.$$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong HN$

با استفاده از لم ۲.۳. $11 \equiv 1 \pmod{47}$ ، چون $n_{47}(\frac{G}{N}) | n_{47}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود.

اگر $\frac{G}{N} \cong A_{47}$ آن‌گاه

$$n_{47}(\frac{G}{N}) = (47 - 2)! .$$

چون $n_{47}(\frac{G}{N}) | n_{47}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{48}$ آن‌گاه

$$n_{47}(\frac{G}{N}) = \frac{48!}{2164} .$$

چون $n_{47}(\frac{G}{N}) | n_{47}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{49}$ آن‌گاه

$$n_{47}(\frac{G}{N}) = \frac{49!}{4324} .$$

چون $n_{47}(\frac{G}{N}) | n_{47}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{50}$ آن‌گاه

$$n_{47}(\frac{G}{N}) = \frac{50!}{12972} .$$

چون $n_{47}(\frac{G}{N}) | n_{47}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{51}$ آن‌گاه

$$n_{47}(\frac{G}{N}) = \frac{51!}{51888} .$$

چون $n_{47}(\frac{G}{N}) | n_{47}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{52}$ آن‌گاه

$$n_{47}(\frac{G}{N}) = \frac{52!}{259440} .$$

چون $n_{47}(\frac{G}{N}) | n_{47}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong B$

مورد ۲۳. $S = M$

در این حالت $p = 71$ و $n_{71}(S) = 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^8 \cdot 7^5 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$. همه حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارت‌اند از: $A_{72}, A_{71}, M, L_6(5), L_5(5), L_2(71)$ ؛

اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(71)$ آن‌گاه

$$n_{31}(\frac{G}{N}) = 2^{15} \cdot 3^4 \cdot 7^2 .$$

چون $n_{31}(\frac{G}{N}) | n_{31}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong L_4(5)$ آن‌گاه

$$n_{31}(\frac{G}{N}) = 2^7 \cdot 3 \cdot 5^6 \cdot 13 .$$

چون $n_{31}(\frac{G}{N}) | n_{31}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. به طور مشابه اگر $\frac{G}{N}$ با سایر گروه‌های مذکور یکرخت باشد آن‌گاه یک تناقض ایجاد می‌شود؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong ON$

مورد ۲۲. $S = B$

در این حالت $p = 47$ و $n_{23}(S) = 2^{41} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 31$.

ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارت‌اند از: $L_2(47), L_2(47^2), S_4(47), A_n, B$ که در آن $47 \leq n \leq 52$

اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(47)$ آن‌گاه

$$n_{71}(\frac{G}{N}) = \frac{n_{71}(G)}{|N : \mathcal{N}_N(P)|} = 48 .$$

بنابراین

$$|N : \mathcal{N}_N(P)| = |N : \mathcal{C}_N(P)| = 2^{37} \cdot 3^{12} \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 31$$

با استفاده از لم ۲.۳، داریم: $3 \equiv 1 \pmod{47}$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(47^2)$ آن‌گاه

$$n_{47}(\frac{G}{N}) = 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17 .$$

از طرفی

$$|N : \mathcal{N}_N(P)| = |N : \mathcal{C}_N(P)| = 2^{40} \cdot 3^{13} \cdot 5^5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 31$$

با استفاده از لم ۲.۳. $11 \equiv 1 \pmod{47}$ ، چون

$n_{47}(\frac{G}{N}) | n_{47}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود.

اگر $\frac{G}{N} \cong S_4(47)$ آن‌گاه

$$n_{47}(\frac{G}{N}) = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17 ;$$

بنابراین

$$|N : \mathcal{N}_N(P)| = |N : \mathcal{C}_N(P)| = 2^{32} \cdot 3^{11} \cdot 5^5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 31$$

چون $n_{31}(\frac{G}{N}) | n_{31}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود.
اگر $\frac{G}{N} \cong L_5(2)$ آن‌گاه

$$n_{31}(\frac{G}{N}) = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 7.$$

آن‌گاه

$$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19$$

با استفاده از لم ۲.۳. $19 \equiv 1 \pmod{31}$ ، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_6(2)$ آن‌گاه

$$n_{31}(\frac{G}{N}) = 2^{15} \cdot 3^4 \cdot 7^2.$$

آن‌گاه

$$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 3^5 \cdot 13 \cdot 19$$

با استفاده از لم ۲.۳. $19 \equiv 1 \pmod{31}$ ، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_4(5)$ آن‌گاه

$$n_{31}(\frac{G}{N}) = 2^7 \cdot 3 \cdot 5^6 \cdot 13.$$

چون $n_{31}(\frac{G}{N}) | n_{31}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. به طور مشابه اگر $\frac{G}{N}$ با سایر گروه‌های مذکور یکرخت باشد آن‌گاه یک تناقض ایجاد می‌شود؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong Th$

برای تکمیل برهان نشان می‌دهیم $N = Z(G)$ فرض کنید P یک p -زیرگروه سیلوی G باشد، چون $n_p(\frac{G}{N}) = \frac{n_p(G)}{|N: \mathcal{N}_N(P)|}$ و $n_p(\frac{G}{N}) = n_p(G)$ پس $|N: \mathcal{N}_N(P)| = 1$. بنابراین $N \leq \mathcal{N}_N(P)$. این بدان معنی است که N با هر p -زیرگروه سیلوی G جابجا می‌شود. چون G توسط عناصر از مرتبه p تولید می‌شود نتیجه می‌شود که $N \subseteq Z(G)$ از طرف دیگر $\frac{Z(G)}{N} \leq \frac{G}{N}$ چون $\frac{G}{N}$ یک گروه ساده غیرآبلی است پس $N = Z(G)$ و حکم ثابت است.

$$n_{67}(\frac{G}{N}) = (67 - 2)!.$$

چون $n_{67}(10.5 \frac{G}{N}) | n_{67}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود.

به طور مشابه اگر $\frac{G}{N}$ با سایر گروه‌های مذکور یکرخت باشد آن‌گاه یک تناقض ایجاد می‌شود؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong Ly$

مورد ۲۶. $S = Th$

در این حالت $p = 31$ و $n_{31}(S) = 2^{15} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$ همه حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارت‌اند از: $L_2(32)$, $L_3(5)$, $L_2(31)$, $L_4(5)$, $L_6(2)$, $L_5(2)$, $G_2(5)$, $L_2(125)$, $O_{10}^+(2)$, $O_8^+(5)$, $S_6(5)$, $O_7(5)$, $L_3(25)$, Th , ON , $O_{12}^+(2)$, $S_{10}(2)$, $L_5(4)$, $U_3(31)$, A_{34} , A_{33} , A_{32} , A_{31} , $S_{12}(2)$, $L_6(4)$, $O_{12}^-(2)$ و A_{35} و A_{36} اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(31)$ آن‌گاه

$$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^{10} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$$

با استفاده از لم ۲.۳. $19 \equiv 1 \pmod{31}$ ، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_3(5)$ آن‌گاه

$$2^5 \cdot 5^3 = n_{31}(L_3(5)) | n_{31}(S) = 2^{15} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(32)$ آن‌گاه

$$n_{31}(\frac{G}{N}) = 2^4 \cdot 3 \cdot 11,$$

بنابراین

$$2^4 \cdot 3 \cdot 11 = n_{31}(L_3(5)) | n_{31}(S) = 2^{15} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(125)$ آن‌گاه

$$n_{31}(\frac{G}{N}) = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7.$$

چون $n_{31}(\frac{G}{N}) | n_{31}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong G_2(5)$ آن‌گاه

$$n_{31}(\frac{G}{N}) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^6 \cdot 7.$$

- [1] A. Moreto, The number of elements of prime order, *Monatsh. Math*, **186** (1) (2018), 189-195.
- [2] A. S. Mamontov, E. Jabara, Recognition of the group $L_3(4)$ by the set of element orders in the class of all groups, *Algebra Logik*, **54** (2015), 279-282.
- [3] W. Shi, Arithmetical properties of finite groups, Groups St. Andrews 2005, *London Math. Soc.*, Lecture Note Ser, **340** (2), 646-653. Cambridge University Press, Cambridge (2007).
- [4] A. V. Vasil'ev, M. Grechkoseeva, V. D. Mazurov, Characterization of the finite simple groups by spectrum and order, *Algebra Logic*, **48** (5) (2009), 385-409.
- [5] A. Khalili Asboei, S. S. Salehi Amiri, A. Iranmanesh, A. Tehranian, A characterizati-on of sporadic simple groups by NSE and order, *J. Algebra Appl*, **12** (02) (2013), 1250158.
- [6] P. Hall, On a theorem of Frobenius, *Proc. Lond. Math. Soc*, **40** (1936), 468-501.
- [7] A. Khosravi, B. Khosaravi, Two new characterization of sporadic simple groups, *Pure Math. Appl*, **16** (2005), 287-293.
- [8] A. V. Zavarnitsine, Finite simple groups with narrow prime spectrum, *Sib. Elektron. Mat. Izv*, **6** (2009), 1-12.