دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی و یکم، مرداد و شهریور ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X
پژوهش‌های نوین در ریاضی
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

انعکاس پذیری از عملگرهای کاون– داگلاس

علی ایلون کشکولی[۱*]، زهرا فتاحی[۲]

[(۱و۲)] گروه ریاضی، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۲/۲۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۵/۰۶

چکیده

فرض کنید H یک فضای هیلبرت، Ω یک زیر مجموعه‌ی باز همبندی از صفحه‌ی مختلط $\mathbb{C}$، n یک عدد صحیح مثبت و $\mathrm{B_n}(\Omega)$ یک کلاس کاون-داگلاس شامل عملگر خطی کراندار T روی H باشد. در این مقاله برای یک حالت خاصی از Ω، نشان می‌دهیم که اگر $\mathrm{T} \in \mathrm{B_n}(\Omega)$ طوری باشد که مدل متعارفش یک عملگر ون– نیومن گردد، آنگاه T انعکاس پذیر است. به علاوه، در این مطالعه فرض می‌کنیم که الحاقی از مدل متعارف متناظر با هسته‌ی برگمن تعمیم یافته‌ی K، یک عملگر ون– نیومن باشد. ما می‌توانیم این را با فرضی که $\|\mathrm{M_P}\| \leq \mathrm{c}\|\mathrm{P}\|_\Omega$ یا $\|\mathrm{M_P}\| = \mathrm{c}\|\mathrm{P}\|_\Omega$، برای هر چند جمله‌ای P جایگزین کنیم. در حقیقت K یک هسته‌ی باز مولد برای فضای هیلبرت تابعک هم-تحلیلی $\mathcal{K}$ می‌باشد که ما می‌توانیم عملگر ضرب شده بوسیله‌ی $\bar{\mathrm{Z}}$ را روی آن تعریف کنیم. توجه به این نکته لازم است که اگر K یک تابع هسته‌ی اکیداً مثبت روی مجموعه‌ی Λ باشد آنگاه این هسته می‌تواند به یک فضای هیلبرت تابعکی بر Λ با هسته‌ی باز مولد K گسترش یابد. لازم به یادآوری است که عملگر خطی کراندار $\mathrm{T}: H \rightarrow H$ را یک عملگر ون-نیومن گوییم هرگاه جبر C^* تولید شده توسط T یک جبر ون-نیومن باسد. باید متذکر شد که در حالت کلی عملگرهایی از کلاس کاون–داگلاس انعکاس پذیر نیستند زیرا هر عملگری از این کلاس با الحاقی از عملگر ضربی غیر انعکاسی ضرب شده به وسیله‌ی $\bar{\mathrm{Z}}$ هم ارز یکانی است. ما نیازمند شرایط اضافی برای انعکاس پذیری T هستیم.

واژه‌های کلیدی: هسته‌ی برگمن، عملگر ون– نیومن، الحاق، هم ارز یکانی، عملگر ضربی.

*. عهده‌دار مکاتبات
Email: kashkooly@yu.ac.ir

۱- مقدمه

فرض کنید H یک فضای هیلبرت جدایی پذیر و $\mathrm{B}(H)$ جبری از همه‌ی عملگرهای خطی کراندار روی H باشد. برای یک زیر مجموعه‌ی باز همبند Ω از $\mathbb{C}$ و یک عدد صحیح مثبت n، فرض کنید $\mathrm{B_n}(H)$ نمایش عملگرهای T در $\mathrm{B}(H)$ باشد به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $\Omega \subseteq \sigma(\mathrm{T}) = \{\lambda \in \mathbb{C}: \mathrm{T}-\lambda$ معکوس پذیر نباشد$\}$

(۲) برای λ در Ω، $\mathrm{ran}(\mathrm{T}-\lambda) = \mathrm{H}$

(۳) $\bigvee_{\lambda \in \Omega} \ker(\mathrm{T}-\lambda) = \mathrm{H}$

(۴) برای λ در Ω، $\dim\ker(\mathrm{T}-\lambda) = \mathrm{n}$

فضاهای $\mathrm{B_n}(\Omega)$ به وسیله‌ی کاون و داگلاس معرفی شده است[۲]. شرط (۱) و (۲) اطمینان ایجاد می‌کند که Ω درون طیف نقطه‌ای از T قرار گرفته است و $\mathrm{T}-\lambda$ از راست معکوس پذیر است. هر عملگر در کلاس $\mathrm{B_n}(\Omega)$ هم ارز یکانی است با الحاقی از مدل متعارف متناظر با یک هسته‌ی برگمن تعمیم یافته‌ی K که به اختصار به صورت g.B.K. نوشته می‌شود [۳].

در حقیقت k یک هسته‌ی باز مولد برای یک فضای هیلبرت تابعکی هم-تحلیلی $\mathcal{K}$ می‌باشد که می‌توان عملگر $M_{\bar{z}}$ ضرب شده به وسیله‌ی $\bar{z}$ را روی آن تعریف کرد. عملگر $\mathrm{M}_{\bar{z}}^*$ عمل‌کننده روی K^* مدل متعارف متناظر با K نامیده می‌شود [۳،۸،۱۱،۱۴].

لازم به ذکر است که اگر $\mathrm{A} \in \mathrm{B(H)}$، آنگاه Lat(A) به وسیله‌ی شبکه‌ی همه‌ی زیر فضاهای پایایی از A تعریف می‌شود و AlgLat(A) جبر همه‌ی عملگرهای B در $\mathrm{B}(H)$ می‌باشد به طوری که $\mathrm{Lat(A)} \subset \mathrm{lat(B)}$.

عملگر A در $\mathrm{B}(H)$ انعکاسی گفته می‌شود اگر AlgLat(A)=W(A)، که W(A) کوچکترین زیر جبری از B(H) شامل A و همانی I و در توپولوژی عملگر ضعیف بسته می‌باشد.

فضای هیلبرت H از توابع تحلیلی روی دامنه‌ی صفحه‌ی Ω را در نظر بگیرید به طوری که برای هر $\lambda \in \Omega$ تابعک خطی e_λ از مقادیر در λ روی H کراندار باشد. به علاوه، فرض کنید H شامل توابع ثابت و ضرب شده به وسیله‌ی متغیر مستقل z باشد. پیوستگی از مقادیر نقطه‌ای در طول قضیه‌ی نمایش ریس بیان می‌کند که برای هر $\lambda \in \Omega$ یک تابع منحصر بفرد $\mathrm{K}_\lambda \in \mathrm{H}$ وجود دارد به طوری که

$$\mathrm{e}_\lambda(\mathrm{f}) = \mathrm{f}(\lambda) = <\mathrm{f}, \mathrm{K}_\lambda>, \quad \mathrm{f} \in \mathrm{H}.$$

فرض کنید برای $1 \leq \mathrm{n} \leq \infty$،

$$\mathrm{L}_\mathrm{n}^2 = \{\xi = \{\mathrm{a_k}\}_{\mathrm{k}=1}^{\infty}: \mathrm{a_k} \in \mathbb{C}, \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}|\mathrm{a_k}|^2 < \infty\}$$

۲- مفاهیم پایه

برای مجموعه‌ی داده شده Λ، یک فضای هیلبرت تابعکی روی Λ فضای هیلبرتی است که زیر فضای خطی از $\mathfrak{I}(\mathrm{L}_\mathrm{n}^2, \Lambda)$، $1 \leq \mathrm{n} \leq \infty$ می‌باشد، که $\mathfrak{I}(\mathrm{L}_\mathrm{n}^2, \Lambda)$ فضای خطی از همه‌ی توابع L_n^2- مقدار روی Λ است.

تابع هسته به صورت $\mathrm{K}: \Lambda \times \Lambda \to \mathrm{B}(\mathrm{L}_\mathrm{n}^2)$ تعریف می‌شود به طوری که:

(۱) $\mathrm{K}(\lambda, \mu) = \mathrm{K}(\mu, \lambda)^*$

(۲) برای هر عدد صحیح $m \geq 1$ و هر خانواده‌ی $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\mathrm{m}\} \subset \Lambda$ ماتریس عملگر $\mathrm{m} \times \mathrm{m}$، $\mathrm{K_m} = \left(\mathrm{K}(\lambda_\mathrm{i}, \lambda_\mathrm{j})\right),\ 1 \leq \mathrm{i,j} \leq \mathrm{k}$ یک عملگر مثبت روی $\mathrm{L}_\mathrm{n}^2 \otimes \mathbb{C}^\mathrm{m}$ خواهد بود.

اگر ماتریس عملگر $\mathrm{m} \times \mathrm{m}$، K_m در (۲) برای هر $\mathrm{m} \geq 1$ یک به یک باشد در این صورت گوییم K تابع هسته‌ی اکیداً مثبت است.

فرض کنید $\mathcal{K}$ یک فضای هیلبرت تابعکی روی Λ باشد. اگر برای هر

$\lambda \in \Lambda$، $\xi \in \mathrm{L}_\mathrm{n}^2$، $\mathrm{K}(\lambda,\cdot)\xi \in \mathcal{K}$ و $\mathrm{f} \in \mathcal{K}$

$$<\mathrm{f}, \mathrm{K}(\lambda,\cdot)\xi>_{\mathcal{K}} = <\mathrm{f}(\lambda), \xi> \mathrm{f}$$

آنگاه گوئیم $\mathcal{K}$ دارای هسته‌ی مولد K در λ می‌باشد. ثابت می‌شود که هسته‌ی مولد K یکتا است (۳). اگر K یک تابع هسته‌ی اکیداً مثبت روی Λ باشد، آنگاه این هسته می‌تواند به یک فضای هیلبرت تابعکی بر Λ با هسته‌ی مولد K گسترش یابد. برای مشاهده‌ی این مطلب، فرض کنید $\mathfrak{D}(\Lambda)$ یک زیر فضای خطی از $\mathfrak{I}(\Lambda, \mathrm{L}_\mathrm{n}^2)$ شامل همه‌ی توابع به صورت

$$f = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{K}(\lambda_i,\cdot)\, \xi_i\ ,\ \ \lambda_i \in \Lambda\ , \xi_i \in \mathrm{L}_\mathrm{n}^2,$$

باشد. اگر $g = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{K}(\lambda_i,\cdot)\eta_i$ تابع دیگری در $\mathfrak{D}(\Lambda)$ باشد و

$$\langle f, g\rangle = < \sum_{i.j=1}^{m} \mathrm{K}\big(\lambda_i, \lambda_j\big)\xi_i, \eta_j >$$

واضح است که $<.,.>$ یک ضرب داخلی روی $\mathfrak{D}(\Lambda)$ می‌باشد. به علاوه یک دنباله‌ی کوشی در $\mathfrak{D}(\Lambda)$ همگرای نقطه‌ای است و تتمیم $\mathcal{K}_K$ از $\mathfrak{D}(\Lambda)$ نسبت به $<.,.>$ یک زیر فضای خطی از $\mathfrak{I}(\Lambda, \mathrm{L}_\mathrm{n}^2)$ می‌باشد. هچنین با توجه به ساختار $\mathcal{K}_K$ مشخص می‌شود که K یک هسته‌ی مولد برای $\mathcal{K}_K$ است. اگر K یک تابع هسته‌ی اکیداً مثبت باشد که معمولا یک هسته‌ی باز مولد برای فضای هیلبرت تابعکی $\mathcal{K}$ بر Λ می‌باشد، آنگاه $\mathcal{K}_K = \mathcal{K}$

فرض کنید Λ یک زیر مجموعه از $\mathbb{C}$ و هر فضای هیلبرت تابعکی روی Λ تحت نگاشت ضربی $f\colon \Lambda \to \mathbb{C}$ با ضابطه $f(z) = \bar{z}$ پایا باشد. تحدیدی از این نگاشت برای چنین فضای هیلبرت تابعکی با $\mathrm{M}_{\bar{z}}$ نمایش داده می‌شود.

فرض کنید $\overline{\mathfrak{U}}(\Lambda, \mathrm{L}_\mathrm{n}^2)$ نمایش مجموعه‌ای از توابع هم - تحلیلی L_n^2–مقدار روی دامنه‌ی Λ در صفحه باشد. این مجموعه تحت نگاشت ضرب به وسیله‌ی $\bar{z}$ پایا است. همه‌ی فضاهای هیلبرت تابعکی روی Λ تحت $\mathrm{M}_{\bar{z}}$ پایا خواهد بود. یک فضای هیلبرت تابعکی روی Λ که زیر فضای خطی از $\overline{\mathfrak{U}}(\Lambda, \mathrm{L}_\mathrm{n}^2)$ می‌باشد فضای هیلبرت تابعکی هم-تحلیلی روی Λ نامیده می‌شود.

تعریف ۲-۱: تابع هسته‌ی $\mathrm{K}\colon \Lambda \times \Lambda \to \mathcal{B}(\mathrm{L}_\mathrm{n}^2)$ شبه تحلیلی نامیده می‌شود اگر $\mathrm{K}(\cdot,\cdot)$ در متغیر اول تحلیلی بوده و در متغیر دوم هم-تحلیلی باشد.

تعریف ۲-۲: فرض کنید K یک تابع هسته‌ی شبه تحلیلی روی Λ باشد و $\mathrm{H}_\mathrm{p}(\lambda.\mathrm{K})$ ماتریس عملگر مثبت $(\mathrm{p}+1)\times(\mathrm{p}+1)$ باشد که درایه‌ی (m,n) ان به صورت

$$\frac{\partial^{m}}{m!\,\partial z^{m}}\frac{\partial^{n}}{n!\,\partial \bar{z}^{n}} K(\lambda, \lambda),\ \ 0 \le m, n \le p$$

است. می‌گوئیم تابع هسته‌ی K ناتبهگون است اگر $\mathrm{H}_\mathrm{p}(\lambda.\mathrm{K})$ برای هر $\lambda \in \Lambda$ و برای هر عدد صحیح مثبت p یک به یک باشد.

تعریف ۲-۳: هر تابع هسته‌ی شبه تحلیلی ناتبهگون K بر Λ را هسته‌ی برگمن تعمیم یافته گوییم اگر $\mathrm{M}_{\bar{z}} \in \mathrm{B}(\mathcal{K}_K)$ و برای هر $\lambda \in \Lambda$ برد $\mathrm{M}_{\bar{z}}^* - \lambda$ بسته باشد و

$$\operatorname{ran} \mathrm{K}(\lambda,\cdot) = \ker(\mathrm{M}_{\bar{z}}^* - \lambda).$$

فرض کنید K یک تابع هسته‌ی شبه تحلیلی ناتبهگون روی Λ باشد. آنگاه یک فضای هیلبرت تابعکی هم – تحلیلی $\mathcal{K}_K$ روی Λ وجود دارد به طوری که تابع هسته‌ی ناتبهگون K روی Λ یک هسته‌ی باز مولد برای $\mathcal{K}_K$ می‌باشد.

۳- نتیجه اصلی

فرض کنید $\mathrm{T} \in \mathrm{B}_\mathrm{n}(\Omega)$ که T با الحاقی از مدل متعارف متناظر با هسته‌ی برگمن تعمیم یافته‌ی K برای یک فضای هیلبرت تابعکی هم-تحلیلی $\mathcal{K}$ هم

ارز یکانی است. در این بخش شرایط کافی روی الحاقی از مدل متعارف برای نشان دادن انعکاس پذیری عملگر T، ارائه می‌گردد.

یادآوری می‌کنیم که زیر مجموعه‌ی فشرده‌ی K از $\mathbb{C}$ را یک مجموعه طیفی برای عملگر $T \in B(H)$ گوئیم، اگر $\sigma(T) \subseteq K$، $\|f(T)\| \leq \max\{|f(z)|: z \in k\}$ برای هر تابع گویای f با قطب‌های خارج از K.

لازم به ذکر است که عملگر خطی کراندار $T: H \to H$ را یک عملگر ون-نیومن گوییم هرگاه جبر C^* تولید شده توسط T یک جبر ون-نیومن باشد. ساراسون ثابت کرد که عملگرهای نرمال، انعکاسی هستند [۷]. بوسیله‌ی ددنس نشان داده شده است که هر ایزومتری انعکاسی است [۴]. همچنین الین و تامسن نشان داده‌اند که عملگرهای زیرنرمال، انعکاسی هستند [۶]. برکویسی، فییاس، لانگسام و پیرسی نشان داده‌اند که عملگرهای (BCP) انعکاسی هستند [۱]. به وسیله‌ی ددنس و فیلمر عملگرهای انعکاسی روی یک فضای با بعد متناهی مورد بررسی قرار گرفته‌اند [۵]. انعکاس پذیری از انتقال‌های وزندار دوطرفه مطالعه و بررسی شده است [۹، ۱۱]. همچنین بعضی از شرایط کافی برای انعکاس پذیری عملگرهای ضربی روی فضاهای دیریشله تحقیق شده‌اند به خصوص که فضاهای باناخ توابع تحلیلی روی صفحه مورد بررسی قرار گرفته است [۱۰، ۱۲].

هدف ما در این قسمت مطالعه‌ی انعکاس پذیری $T \in B_n(\Omega)$ می‌باشد که درآن Ω یک دامنه‌ی کراندار است. گوی باز واحد در صفحه مختلط را با U نمایش می‌دهیم.

قضیه ۳-۱: فرض کنید K یک هسته‌ی برگمن تعمیم یافته بر دامنه‌ی $\Omega \subseteq U$ شامل طوق G باشد به طوری که $\partial U \subseteq \overline{\Omega} \cap \overline{G}$. اگر مدل متعارف متناظر با هسته‌ی برگمن تعمیم یافته، عملگر ون-نیومن باشد، آنگاه T انعکاس پذیر است.

برهان: می‌دانیم که T با الحاقی از عملگر $M_{\bar z}^*$ بر $\mathcal{K}$ هم ارز یکانی است.

اگر $X \in \operatorname{Alg} \operatorname{Lat}(T)$، آنگاه $\operatorname{Lat}(T) \subseteq \operatorname{Lat}(X)$.

یعنی اگر $X \in \operatorname{Alglat}\,(M_{\bar z})$، آنگاه

$$\operatorname{Lat}(M_{\bar z}) \subseteq \operatorname{Lat}(X)\ .$$

از آن جایی که یک پیمای تک بعدی از $K(\lambda,\cdot)\xi$ تحت $M_{\bar z}^*$ پایا است، پس تحت X^* هم پایا است در نتیجه $X^*K(\lambda,\cdot)\xi = \overline{\varphi(\lambda)}K(\lambda,\cdot)\xi$. بنابراین برای هر $f \in \mathcal{K}$ و $\lambda \in \Omega$

$$\begin{aligned}&< Xf, K(\lambda,\cdot)\xi > = < f, X^*K(\lambda,\cdot)\xi > \\ &= < f, \overline{\varphi(\lambda)}K(\lambda,\cdot)\xi > = \varphi(\lambda)f(\lambda).\end{aligned}$$

پس برای بعضی از ضربگرهای φ داریم $X = M_\varphi$.

چون $\mathcal{K}$ یک فضای هیلبرت تابعکی است پس $X\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ در نتیجه $XI = \varphi \in \mathcal{K}$.

از طرف دیگر، برای هر $\lambda \in \Omega$، $\varphi(\lambda) \in \sigma(X)$.

پس $|\varphi(\lambda)| \leq \|X\|$ و در نتیجه $\varphi \in H^\infty(\Omega)$.

فرض کنید برای $0 < t < 1$ داشته باشیم.

$G = \{z: t < |z| < 1\}$ و مجموعه‌ی M را به صورت زیر در نظر می‌گیریم؛

$$M = \left\{f \in \mathcal{K}: \int_{|z|=r} z^n f(z)dz = 0,\ \ n \geq 0\right\}$$

که در آن $t < r < 1$. واضح است که $M \in \operatorname{Lat}(M_{\bar z})$ اما $\operatorname{Lat}(M_{\bar z}) \subseteq \operatorname{Lat}(X)$ و $X = M_\varphi$، بنابراین $M \in \operatorname{Lat}(M_\varphi)$. توجه کنید که $M_\varphi I = \varphi \in M$ زیرا $I \in M$ همچنین، $H^\infty(\Omega) \subseteq. H^\infty(G)$ بنابراین $\varphi \in H^\infty(G)$ و می‌توان φ را به صورت $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ نوشت که φ_1 یک تابع تحلیلی کراندار روی U و φ_2 یک تابع تحلیلی کراندار روی $\{z: |z| > t\}$ می‌باشد که در بینهایت صفر است.

اکنون برای تمام $|z| > t$ می‌توان نوشت:
$$\varphi_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n z^n$$

چون $\varphi \in M$، پس
$$\int_{|z|=r} z^n(\varphi_1(z) + \varphi_2(z))dz = 0,\ \ n \geq 0$$

در نتیجه
$$C_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} Z^{n-1}\varphi_2\,(z)dz = 0,$$
$$n = 1,2, \ldots$$

پس $\varphi_2 = 0$ و $\varphi = \varphi_1 \in H^\infty\,(U)$ چون U یک دامنه کاراتئودوری است بنا به قضیه فارل–رابل–شیلدز یک دنباله کراندار یکنواخت P_n از چند جمله‌ای‌ها موجود است که به طور نقطه وار به φ در U همگرا است.

از آن جایی که T یک عملگر ون–نیومن است پس برای $\|p_n(T)\| \leq \|P_n\|_\Omega \leq d$، $d > 0$. چون گوی یکه‌ای از $B(\mathcal{K})$ در توپولوژی ضعیف عملگرها فشرده است، با در نظر گرفتن زیر دنباله‌ای در صورت لزوم، در آن برای بعضی A در $B(\mathcal{K})$ داریم $P_n(T) \to A$.

فرض کنید $f = \sum_{i=1}^{n} K(\lambda_i,\cdot)\xi_i$ در $\mathfrak{D}(\Omega)$ باشد، در این صورت $P_n(T)f = \sum_{i=1}^{n} P_n\,(\lambda_i)K(\lambda_i,\cdot)\xi_i$ به طور ضعیف به Af و در نرم به $\sum_{i=1}^{n} \varphi(\lambda_i)K(\lambda_i,\cdot)\xi_i$ همگرا است. با تعریف $M_\varphi(f)$ و این واقعیت که $\mathfrak{D}(\Omega)$ در $\mathcal{K}$ چگال است نتیجه می‌گیریم که $A = M_\varphi$.

در نتیجه $X = M_\varphi \in W(T)$ و این نشان می‌دهد که T انعکاس پذیر است.

نتیجه ۳–۲: در قضیه‌ی قبل فرض کردیم که الحاقی از مدل متعارف متناظر با هسته‌ی برگمن تعمیم یافته یک عملگر ون– نیومن می باشد. ما می‌توانیم آن را به وسیله‌ی فرضی که $\|M_p\| \leq C\|P\|_\Omega$ یا $\|M_p\| = \|p\|_\Omega$ برای هر چند جمله‌ای P جایگزین کنیم.

باید اشاره کنیم که عملگرهایی از کلاس کاون–داگلاس در حالت کلی انعکاس‌پذیر نیستند زیرا هر عملگری از این کلاس هم‌ارز یکانی با الحاقی از عملگر غیر انعکاسی ضرب شده به وسیله $\bar{z}$ است. ما نیازمند شرایط اضافی برای انعکاس‌پذیری Tهستیم.

فهرست منابع

[1] H. Bercovici, C. Foias, J. Langsam, and C. Pearcy, (BCP)- operators are reflexive, Mich. Math. J.29 (1982), 371-379

[2] M. J. Cowen and R. G. Douglas, Complex geometry and operator theory, Acta Math. 141 (1978), 187-261.

[3] R. Curto and N. Salinas, Generalized Bergman kernels and the Cowen-Douglas theory, Amer. J. Math. 106 (1984), 447-448.

[4] J. A. Deddens, Every isometry is reflexive, Proc. Amer. Math. Soc. 28 (1971), 509-512.

[5] J. A. Deddens and P. A. Fillmore, Reflexive linear transformations, Linear Algebra and Appl. 10 (1975), 89-93.

[6] R. Olin and J. Thomson, Algebras of subnormal operators, J. Functional Anal. 37 (1980), 271-301

[7] D. Sarason, Invariant subspaces and unstarred operator algebras, Pasific J. Math. 17 (1966), 511-517

[8] K. Seddighi, Von Neumann operators in $B_1(\Omega)$, Thesis, University of Indiana, 1981.

[9] K. Seddighi and B. Yousefi, On the reflexivity of operators on function spaces, Proc. Math, Soc. 116 (1992), 45-52.

[10] B. Yousefi, K. Seddighi and K. Hedayatian, On reflexivity of the multiplication operators on Dirichlet spaces, Math Japonica, 38 (1993), 1189-1194.

[11] B. Yousefi and Y.N. Dehghan, Reflexivity on weighted Hardy spaces, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 28 (2004), 587-593

[12] B. Yousefi, Multiplication operators on Hilbert spaces of analytic functions, Archiv der Mathematic, 83 (2004), 536-539

[13] B. Yousefi and S. Foroutan, On the multiplication operators on spaces of analytic functions, Studia Mathematica, 168 (2) (2005), 187-191.

[14] K. Zhu, operators in Cowen-Douglas classes, Hlinios J. Math. 44 (2000), 767-783