دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی و یکم، مرداد و شهریور ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

# خاصیتِ بی.اس.ایی. تکمیلِ جبر فوریه در فضای ضرب‌گرهایش

محمد فزونی *

استادیار گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه و فنی مهندسی، دانشگاه گنبدکاووس، گلستان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۳/۲۵   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۱۱/۰۵

**چکیده**

برای گروه موضعاً فشرده‌ی $G$، فرض کنیم $A(G)$ جبر فوریه و $A_M(G)$ نشان‌دهنده‌ی تکمیل این جبر در فضای ضرب‌گرهایش است. در این مقاله نشان می‌دهیم که $A(G)$ یک جبرِ سگالِ مجرد در $A_M(G)$ است. سپس یک شرط لازم و کافی برای تساوی دو جبر $A(G)$ و $A_M(G)$ را ارائه می‌دهیم. هم‌چنین ثابت می‌کنیم که $A_M(G)$ یک ایده‌ال در دوگان دومش است اگروتنهااگر $G$ گسسته باشد. نشان خواهیم داد که اگر $G$ یک گروه گسسته باشد، آنگاه $A_M(G)$ یک جبر بی.اس.ایی. است اگروتنهااگر $G$، $M$-میانگین‌پذیر ضعیف باشد. به‌عنوان یک نتیجه ثابت خواهد شد که $A_M(\mathbb{F}_2)$ برخلاف $A(\mathbb{F}_2)$ یک جبر بی.اس.ایی. است. در پایان مطالعه‌ی مشابهی روی جبر لبگ-فوریه انجام می‌شود و هم‌چنین یک اثبات کاملاً جدید از تساوی فضای کاراکتری جبر فوریه و تکمیل شده‌اش ارائه می‌گردد که مبتنی بر خواص ضرب‌گرهاست.

**واژه‌های کلیدی:** جبر باناخ، جبر فوریه، فضای ضرب‌گر، خاصیت بی.اس.ایی.، گروه موضعاً فشرده.

*. عهده‌دار مکاتبات
Email: fozouni@hotmail.com

## ۱- مقدمه

جبرهای بی.اس.ایی. یا به‌طور کامل، بوخنر-شونبرگ-ابرلین[۲]، برای نخستین بار توسط تاکاهاشی[۳] و هاتوری[۴] در [16] معرفی شدند. بسیاری از جبرهای مهم در زمینه‌ی آنالیز هارمونیک همانند جبر گروهی $L^1(G)$ از یک گروه موضعاً فشرده و آبلی $G$، و یا جبر فوریه از یک گروه میانگین‌پذیر در این شرط صدق می‌کنند. امّا یک جبر بی.اس.ایی. چیست و چگونه تعریف می‌گردد؟ فرض کنیم $A$ یک جبر باناخ است و $a \in A$. جبر $A$ را بدون مرتبه می‌نامیم اگر $aA = \{0\}$ نتیجه دهد که $a = 0$. فضای کاراکتری[۵] $A$ یا $\Delta(A)$ را مجموعه‌ی تمام توابع مختلط-مقدار خطی ضربی و ناصفر روی $A$ تعریف می‌کنیم. ثابت می‌گردد که برای هر $\varphi \in \Delta(A)$، داریم $\|\varphi\| \leq 1$ و در نتیجه $\Delta(A) \subseteq A^*$.

هم‌چنین، فضای $C_{BSE}(\Delta(A))$ را مجموعه‌ی تمام نگاشت‌های $\sigma: \Delta(A) \to \mathbb{C}$ می‌نامیم به‌قسمی‌که ثابت $C > 0$ وجود داشته باشد که برای هر $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ از $\Delta(A)$ و اسکالرهای $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ داشته باشیم:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma(\varphi_i)\right| \leq C \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i\right\|_{A^*}.$$

جبر باناخ جابجایی و بدون مرتبه‌ی $A$ را یک جبر بی.اس.ایی. می‌نامیم هرگاه،

$$C_{\mathrm{BSE}}(\Delta(A)) = \widehat{\mathcal{M}(A)} = \{\hat{T} : T \in \mathcal{M}(A)\},$$

که $\hat{T}$ برابر است با تابع پیوسته و کرندار روی $\Delta(A)$ که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند،

$$\widehat{T(x)}(\varphi) = \hat{T}(\varphi)\, \hat{x}(\varphi) \quad (x \in A, \varphi \in \Delta(A)),$$

و $\mathcal{M}(A)$ فضای ضرب‌گرهای جبر باناخ $A$، یعنی توابع خطی و کران‌دار $T: A \to A$ است که

$$T(ab) := aT(b) \quad (a, b \in A).$$

از طرفی، فرض کنیم $G$ یک گروه موضعاً فشرده و $A(G)$ و $B(G)$ به‌ترتیب نشان دهنده‌ی جبر فوریه[۶] و جبر فوریه-اشتیلتیس[۷] باشند. اگر $\mathcal{M}A(G)$ نشان‌دهنده‌ی فضای ضرب‌گرهای $A(G)$ باشد، با توجه به قضیه‌ی ۳۴-۳ از [4] برای هر $T \in \mathcal{M}A(G)$ تابع پیوسته و کران‌دار $g_T: G \to \mathbb{C}$ وجود دارد به‌قسمی‌که

$$T(u) = u g_T \quad (u \in A(G)).$$

در نتیجه $\mathcal{M}A(G)$ را می‌توانیم به‌صورت فضای تمام توابع کران‌دارِ پیوسته و مختلط-مقدار $m$ که برای هر $u \in A(G)$، داریم $mu \in A(G)$ نیز تعریف نمائیم. برای هر $m \in \mathcal{M}A(G)$ فرض کنیم

$$k_m(u) := um \quad (u \in A(G)).$$

می‌گوئیم که $m$ یک ضرب‌گر کلاًکران‌دار[۸] از $A(G)$ است، اگر الحاقی $k_m$ یک نگاشت کلاًکران‌دار روی $VN(G)$ باشد. توجه کنید که در اینجا $VN(G)$ جبر گروهی فون-نویمان[۹] است و $A(G) = VN(G)_*$، یعنی $A(G)$ پیش-دوگان $VN(G)$ می‌باشد. فرض کنیم $\mathcal{M}_{cb}A(G)$ نشان دهنده‌ی جبر تمام ضرب‌گرهای کلاًکران‌دار از $A(G)$ است. آنگاه برای هر $u \in B(G)$ داریم:

$$B(G) \subseteq \mathcal{M}_{cb}A(G) \subseteq \mathcal{M}A(G)$$
$$\|u\|_{\mathcal{M}A(G)} \leq \|u\|_{\mathcal{M}_{cb}A(G)} \leq \|u\|_{B(G)}$$

برای دیدن برهان بخشی از روابط فوق به نتیجه‌ی ۸-۱ از [3] مراجعه کنید.
توجه نمائید که

$$\|u\|_{\mathcal{M}A(G)} = \|k_u\|_{\mathcal{M}A(G)}$$

---

[2] Bochner-Schoenberg-Eberlin
[3] S.-E. Takahasi
[4] O. Hatori
[5] Character space

[6] Fourier
[7] Fourier-Stieltjes
[8] completely bounded map
[9] group von-Neumann algebra

$$= \sup\{\|uv\|_{A(G)} : v \in A(G), \|v\|_{A(G)} \leq 1\}$$

فارست[10] در [7] جبرهای باناخ

$$A_M(G) := \overline{A(G)}^{\|\cdot\|_{\mathcal{M}A(G)}}$$
$$A_{M_0}(G) := \overline{A(G)}^{\|\cdot\|_{\mathcal{M}_{cb}A(G)}}$$

را بررسی و مطالعه کرد. در مقاله‌ی مذکور ثابت شد که این‌نوع جبرها تحت شرایط خاصی روی گروه $G$، دارای مشتقات ناپیوسته نمی‌باشند. اما لازم به تذکر است که این نوع جبرها برای اولین بار در مقاله‌ی [3] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

در واقع می‌توانیم این‌گونه نیز به مسئله‌ی تعریف این دو جبر نگاه کنیم که ابتدا $A(G)$ را توسط نگاشت $: A(G) \to \mathcal{M}A(G)$ که $L(u) = L_u$ همان عملگر ضرب از چپ در تابع $u$ است، در $\mathcal{M}A(G)$ می‌نشانیم و سپس بستار برد تابع $L$ را در نظر می‌گیریم. این روش جبر $A_M(G)$ را به‌دست می‌دهد. در مورد جبر $A_{M_0}(G)$ نیز مسئله به‌همین ترتیب با تغییرات اندکی مشابه با همین بحث، به‌دست می‌آید.

با توجه به قضایای بنیادی در آنالیز فوریه و گروه‌های توپولوژیک، می‌دانیم که گروه $G$ میانگین‌پذیر است اگروتنهااگر $\mathcal{M}A(G) = B(G)$. در این حالت برای هر $u \in B(G)$ داریم

$$\|u\|_{\mathcal{M}A(G)} = \|u\|_{B(G)}.$$

پس

$$A(G) = A_M(G) = A_{M_0}(G).$$

یکی از منابع خوب برای مطالعه‌ی جبرهای فوریه، علاوه بر مقاله‌ی [4] که متاسفانه به زبان انگلیسی هم نیست، منبع جدید [12] می‌باشد که تمام مباحث در این حوزه را به‌صورت دقیق و جامع، بیان نموده است. هم‌چنین مقالات [13] ,[11] نیز آثار بسیار خوبی در زمینه‌ی جبرهای بی.اس.ایی. هستند که علاوه بر منبع [16]، برای ورود به این بحث، به خواننده توصیه می‌شوند.

لازم به ذکر است که جبرهای بی.اس.ایی. که با توجه به یکی از مهمترین قضایای آنالیز هارمونیک به‌دست آمده است، در سال‌های اخیر مورد مطالعه‌ی فراوانی قرار گرفته‌اند. مطالعه‌ی این جبرها باعث پاسخ دادن به بسیاری از پرسش‌های مطرح شده در آنالیز هارمونیک می‌گردد. به‌عنوان مثال، در مقاله‌ی [8] نگارنده ضمن مطالعه‌ی این جبرها، توانسته است قضیه‌ی گلدشتاین[11] که یکی از قضایای کلاسیک و بسیار مهم در آنالیز هست را نتیجه بگیرد. در نتیجه مطالعه و بررسی این خاصیت، برای جبرهای باناخ مهم، از جمله، جبرهای فوریه و تکمیل آن، بسیار حائز اهمیت می‌باشد و می‌تواند راه‌گشای پاسخ به مسائل بسیار زیادی در حوزه‌ی آنالیز هارمونیک و یا تابعی گردد.

در این مقاله و در بخش بعد ابتدا چند خاصیت و رابطه بین دو جبر فوریه و کامل‌شده‌اش را بررسی می‌کنیم. سپس، خواص بی.اس.ایی. جبر باناخ $A_M(G)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. نشان خواهیم داد که جبر باناخ $A_M(\mathbb{F}_2)$ یک جبر بی.اس.ایی. است در حالی که $A(\mathbb{F}_2)$ این‌گونه نمی‌باشد. یکی از ابزار اصلی برای اثبات مطلب اخیر، استفاده از این واقعیت است که اگر $G$ یک گروه گسسته باشد، آنگاه $A_M(G)$ یک ایده‌ال در دوگان دومش است که این را نیز، به‌عنوان یکی از نتایج اصلی مقاله، ثابت خواهیم نمود. در بخش سوم، نتایج را برای جبر لبگ-فوریه بررسی و دنبال می‌کنیم و یک شرط کافی برای بی.اس.ایی. بودن در این حالت را بدست می‌آوریم. در پایان و در بخش نهایی، یک اثبات کاملاً جدید بر مبنای خواص ضرب‌گرها برای تساوی فضای کاراکتری جبر فوریه و تکمیل شده‌اش را ارائه می‌دهیم.

[10] B. Forrest

[11] Goldstine's theorem

## ۲- نتایج روی جبر فوریه و تکمیل آن

در این بخش ابتدا به مطالعه‌ی چند خاصیت مهم از جبرهای $A(G)$ و $A_M(G)$ می‌پردازیم. می‌دانیم که اگر $A(G)$ دارای همانی تقریبی کران‌دار باشد آنگاه $A(G) = A_M(G)$. حال به‌عنوان اولین نتیجه در این بخش یک شرط لازم و کافی برای تساوی این دو جبر را به‌صورت زیر ارائه می‌دهیم.

**قضیه ۲-۱:** فرض کنیم $G$ یک گروه موضعاً فشرده باشد. در این‌صورت $A(G) = A_M(G)$ اگر و تنها اگر ثابت $k > 0$ موجود باشد به‌قسمی که برای هر $a \in A(G)$ داریم:

$$\|a\|_{A(G)} \leq k\|L_a\|_{\mathcal{M}A(G)}$$

**اثبات:** جهت کوتاه نمودن نمادها، فرض کنیم $A = A(G)$ و $A_M = A_M(G)$. اگر رابطه‌ی Error! Reference source not found. برقرار باشد نشان می‌دهیم که $A = A_M$. برای این منظور، فرض کنیم $u \in A_M$. پس دنباله‌ی $(a_n) \subseteq A$ وجود دارد به‌قسمی که $\|u - L_{a_n}\|_{\mathcal{M}A(G)} \to 0$. در نتیجه $(L_{a_n})$ یک دنباله‌ی کوشی در $\mathcal{M}A(G)$ است. حال با توجه به نامساوی فوق داریم:

$$\|a_n - a_m\|_{A(G)} \leq k\|L_{a_n} - L_{a_m}\|_{\mathcal{M}A(G)}.$$

بنابراین $(a_n)$ نیز یک دنباله‌ی کوشی است و چون $A$ یک جبر باناخ است، پس $a_0 \in A$ وجود دارد که $a_n \to a_0$. حال براحتی بررسی می‌گردد که $u = L_{a_0}$ و این یعنی $u \in A$.

برعکس، اگر $A = A_M$ با توجه به رابطه‌ی $\|L_a\|_{\mathcal{M}A(G)} \leq \|a\|_A$ نتیجه می‌گیریم که نگاشت همانی $id: A \to A_M$ پیوسته و خطی است. بنابراین با توجه به قضیه نگاشت باز[12] نتیجه می‌شود که $id$ یک نگاشت باز است و از این رو نرم‌های $A$ و $A_M$ معادل هستند که این اثبات را کامل می‌کند.

در ادامه‌ی این بخش، ابتدا نشان می‌دهیم که $A(G)$ یک جبر سگال مجرد در $A_M(G)$ است. این نتیجه باعث می‌شود که بتوانیم خیلی از خواص مطالعه شده در مورد جبرهای سگال مجرد را که در سال‌های اخیر انجام شده، در مورد جبرهای $A(G)$ و $A_M(G)$ نیز به‌کار بگیریم، هرچند که هدف اصلی در مقاله‌ی حاضر، این نیست. قبل از پرداختن به اثبات مد نظر، ابتدا تعریف یک جبر سگال مجرد را با توجه به منبع [1] ارائه می‌دهیم.

**تعریف ۲-۲:** فرض کنیم $A$ یک جبر باناخ و $B$ یک زیرفضا از $A$ باشد. در این‌صورت می‌گوئیم $B$ یک جبر سگال مجرد در $A$ است اگر دارای خواص ذیل باشد.

۱. $B$ یک ایده‌ال چپ چگال از $A$ است.
۲. ثابت $M > 0$ موجود است به‌قسمی‌که برای هر $b \in B$، $\|b\|_A \leq M\|b\|_B$.
۳. *ثابت* $C > 0$ موجود *است به‌قسمی‌که برای هر* $a, b \in B$، $\|ab\|_B \leq C\|a\|_A\|b\|_B$.

**لم ۲-۳:** فرض کنیم $G$ یک گروه موضعاً فشرده باشد. در این‌صورت $A(G)$ یک جبر سگال مجرد در $A_M(G)$ است.

**اثبات:** با توجه به تعریف $A_M(G)$، می‌دانیم که $A(G)$ یک ایده‌ال (دوطرفه) چگال در $A_M(G)$ می‌باشد.
از طرفی، برای هر $u \in A(G)$، با توجه به خواص نرم تابع $L_u$ داریم:

$$\|u\|_{\mathcal{M}A(G)} = \|L_u\|_{\mathcal{M}A(G)} \leq \|u\|_{A(G)}.$$

هم‌چنین برای هر $u \in A(G)$ که $u \neq 0$ و هر $v \in A_M(G)$ داریم:

[12] Open mapping theorem

$$\left\|\frac{u}{\|u\|_{A(G)}}v\right\|_{A(G)} \leq \|k_v\|_{\mathcal{M}A(G)} = \|v\|_{\mathcal{M}A(G)}.$$

پس

$$\|uv\|_{A(G)} \leq \|u\|_{A(G)}\|v\|_{\mathcal{M}A(G)}$$

و این اثبات را کامل می‌کند.

قبل از پرداختن به قضیه‌ی بعد لازم به ذکر است که در مورد فضاهای دوگان، همواره داریم:

$$A_M(G)^* \subseteq A(G)^*$$

به این معنی که تحدید هر تابعک خطی از $A_M(G)$ به $A(G)$، یک تابعک خطی از $A(G)$ می‌باشد. برای دیدن این واقعیت فرض کنیم که $f \in A_M(G)^*$. اگر $\check{f}$ نشان‌دهنده‌ی تحدید تابع $f$ به $A(G)$ باشد، پس برای هر $u \in A(G)$ داریم:

$$\begin{aligned}|\check{f}(u)| = |f(u)| &\leq \|f\|\|u\|_{\mathcal{M}A(G)}\\ &\leq \|f\|\|u\|_{A(G)}\end{aligned}$$

در نتیجه $\|\check{f}\| \leq \|f\|$ و این یعنی $\check{f}$ کران‌دار است.

پیش از ارائه‌ی قضیه‌ی بعدی، به یادآوری یکی از مفاهیم بسیار مهم می‌پردازیم. نگاشت $M \in A_M(G)^{**}$ را یک میانگین توپولوژیکی پایا[13] می‌نامیم اگر شرایط زیر را داشته باشد:

$$\|M\| = M(L_e) = 1$$

$$M(f \cdot u) = u(e)M(f) \qquad (f \in A_M(G)^*, u \in A_M(G)).$$

توجه کنید که در اینجا و در ادامه $A_M(G)^{**}$ را با ضرب اول آرنز مجهز نموده‌ایم.

**قضیه ۲-۴:** فرض کنیم $G$ یک گروه موضعاً فشرده است. در این‌صورت $G$ گسسته است اگروتنهااگر $A_M(G)$ یک ایدا‌ال در دوگان دومش باشد.

**اثبات:** فرض کنیم که $G$ یک گروه گسسته باشد. در نتیجه بنا به لم ۳-۳ از [6] می‌دانیم که $A(G)$ یک ایده‌ال در $A(G)^{**}$ است. از این‌رو طبق لم ۳ از [2]، نتیجه می‌گیریم که برای هر $u \in A(G)$، نگاشت $\lambda_u: A(G) \to A(G)$ با ضابطه‌ی

$$\lambda_u(v) := uv \quad (v \in A(G)),$$

فشرده‌ی ضعیف[14] است.

حال فرض کنیم $(v_n)$ یک دنباله‌ی کران‌دار در $A_M(G)$ باشد و هم‌چنین فرض کنیم $u \in C_c(G) \cap A(G)$. چون طبق قضیه‌ی ۲-۳-۸ از [12]، $A(G)$ یک جبر باناخ منظم است، با استفاده از این خاصیت $v \in C_c(G) \cap A(G)$ وجود دارد به‌قسمی‌که برای هر $x \in \mathrm{supp}(u)$، داریم $v(x) = 1$. در نتیجه $uv = u$.

با توجه به رابطه‌ی Error! Reference source not found. در لم ۲-۳، به‌راحتی قابل بررسی است که دنباله‌ی $(vv_n)$ در $A(G)$ کران‌دار است. با توجه به فشردگی ضعیف نگاشت $\lambda_u$، زیر دنباله‌ی $(vv_{n_k})$ از $(vv_n)$ وجود دارد به‌قسمی‌که

$$\lambda_u(vv_{n_k}) = uvv_{n_k} = uv_{n_k} = \lambda_u(v_{n_k}),$$

به‌طور ضعیف در $A(G)$ همگراست. از این‌رو، با توجه به رابطه‌ی Error! Reference source not found. نتیجه می‌شود که $(uv_{n_k})$ به‌طور ضعیف در $A_M(G)$ همگراست. بنابراین $\lambda_u$ یک عملگر فشرده‌ی ضعیف روی $A_M(G)$ است. در پایان چون $C_c(G) \cap A(G)$ در $A(G)$ چگال است و برای هر $u \in A(G)$، $\|u\|_{\mathcal{M}A(G)} \leq \|u\|_{A(G)}$، نتیجه می‌شود که $C_c(G) \cap A(G)$ در $A_M(G)$ نیز چگال است. پس برای هر $u \in A_M(G)$، عملگر $\lambda_u: A_M(G) \to A_M(G)$ به‌طور ضعیف فشرده است و این یعنی $A_M(G)$ یک ایده‌ال در $A_M(G)^{**}$ است.

---

[13] Topological invariant mean

[14] weakly compact

برعکس، فرض کنیم $A_M(G)$ یک ایده‌ال در دوگان دومش باشد. طبق گزاره‌ی ۲ از [9] می‌دانیم که برای هر گروه موضعاً فشرده‌ی $G$، یک میانگین توپولوژیکی پایا مانند $M \in A(G)^{**}$ وجود دارد. با توجه به رابطه‌ی Error! Reference source not found. اگر تحدید $M$ به $A_M(G)^*$ را در نظر بگیریم و این تحدید را مجدد با $M$ نشان دهیم، این نگاشت یک میانگین توپولوژیکی پایا روی $A_M(G)^{**}$ است. حال $v \in A_M(G)$ را به‌قسمی که $v(e) = 1$ در نظر می‌گیریم. بنابراین، یک بررسی سرراست از ضرب آرنز اول و فرض‌مان نشان می‌دهد که

$$M = vM \in A_M(G)$$

اکنون $u \in A(G)$ را به‌قسمی که $u(e) = 1$ در نظر می‌گیریم. به‌طور مشابه نتیجه می‌شود که

$$M = uM \in A(G).$$

اما رابطه‌ی فوق نتیجه می‌دهد که $M = \delta_e$ که $\delta_e$ تابع دیراک در همانی گروه $G$، یعنی $e$ می‌باشد. بنابراین $G$ یک گروه گسسته است.

**تذکر ۲-۵:** با یک اثبات مشابه با برهان فوق و استفاده از لم ۳-۳ در منبع [6] و تعویض $A(G)$ با $A_p(G)$ که $1 < p < \infty$، نتیجه خواهیم گرفت که قضیه‌ی فوق برقرار است. یعنی اگر $A_{M,p}(G) := \overline{A_p(G)}^{\|\cdot\|_{MA_p(G)}}$، آنگاه $A_{M,p}(G)$ یک ایده‌ال در دوگان دومش است اگروتنهااگر $G$ گسسته باشد. توجه کنید که در اینجا $A_p(G)$ همان جبر فیگا تالامانکا-هرتس[15] است.

قبل از پیش‌روی بیشتر، ابتدا تعدادی از تعاریف موجود را جهت تسهیل کار خوانندگان، یادآوری می‌نمائیم.

**تعریف ۲-۶:** فرض کنیم $G$ یک گروه موضعاً فشرده باشد. در این‌صورت می‌گوئیم $G$:

۱. میانگین‌پذیر[16] است، اگر $A(G)$ دارای یک همانی تقریبی کران‌دار باشد.

۲. میانگین‌پذیر ضعیف[17] است اگر $A(G)$ دارای یک همانی تقریبی باشد که با نرم $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_{cb}A(G)}$ کران‌دار است.

۳. $M$-میانگین‌پذیر ضعیف است اگر $A(G)$ دارای یک همانی تقریبی باشد که با نرم $\|\cdot\|_{\mathcal{M}A(G)}$ کران‌دار است.

با توجه به رابطه‌ی *Error! Reference source not found.* و تعریف فوق نتیجه می‌شود

$$\mathcal{F}_a \subseteq \mathcal{F}_{wa} \subseteq \mathcal{F}_{M-wa}$$

که در اینجا

$$\mathcal{F}_a = \left\{G : \text{یک گروه میانگین‌پذیر است } G\right\}$$

$$\mathcal{F}_{wa} = \left\{G : \text{یک گروه میانگین‌پذیر ضعیف است } G\right\}$$

$$\mathcal{F}_{M-wa} = \left\{G : \text{یک گروه } G \ M\text{- میانگین‌پذیر ضعیف است}\right\}$$

در قضیه‌ی ۲-۷ از [5] ثابت شد که اگر $G$ یک گروه موضعاً فشرده و گسسته باشد آنگاه $G$ میانگین‌پذیر ضعیف است اگروتنهااگر $A_{M_0}(G)$ یک جبر بی.اس.ایی. باشد. حال در ادامه، مشابه با گزاره‌ی اخیر، توصیفی برای اینکه چه وقت $A_M(G)$ یک جبر بی.اس.ایی. است را ارائه خواهیم داد. توجه نمائید که بررسی خواص دو جبر $A_M(G)$ و $A_{M_0}(G)$ دارای روش‌های کاملاً متمایز است. چون جبر $A_{M_0}(G)$ دارای ساختار فضای عملگری[18] است و به کمک قضایای موجود در این زمینه (فضاهای عملگری) بسیاری از ویژگی‌های این جبر قابل بررسی است. اما روش اثبات و مطالعه‌ی جبر

---

[15] Figà Talamanca-Herz algebra

[16] amenable

[17] weakly amenable

[18] operator space structure

$A_M(G)$ کاملاً بر روش‌های مرسوم و معمول جبرهای باناخ و گروه‌های موضعاً فشرده متکی است. به‌عنوان مثالی در این زمینه، یعنی مشاهده‌ی تفاوت در روند اثبات‌ها، اخیراً رونده[۱۹] در مقاله‌ی $[Run19]$ نشان داده است که اگر $G$ شامل یک زیرگروه یک‌ریخت با $\mathbb{F}_2$؛ گروه آزاد از دو متغیر، باشد آنگاه $A_{M_0}(G)$ میانگین‌پذیر نیست، اما در پایان این مقاله سؤالی در مورد میانگین‌پذیری جبر $A_M(G)$ مطرح نموده و به تفاوت‌های این دو جبر از دیدگاه وجود و یا عدم وجود یک ساختار فضای عملگری اشاره نموده است؛ برای دیدن تعریف مفهوم میانگین‌پذیری منبع [14] را ببینید. ایشان دقیقاً عنوان نموده‌اند که چون $A_M(G)$ دارای ساختار فضای عملگری نیست، اثبات میانگین‌پذیری یا میانگین‌ناپذیری تنها با استفاده از تکنیک‌های موجود در نظریه جبرهای باناخ، تا حدودی سخت خواهد بود و این را به‌عنوان یک سؤال باز مطرح نمودند. چون بررسی خاصیت بی.اس.ایی. طبق تعریف ابتدایی، تنها در مورد جبرهای جابجایی و بدون مرتبه صورت می‌گیرد، ابتدا نشان می‌دهیم که $A_M(G)$ جابجایی و بدون مرتبه است.

**گزاره ۲-۷:** اگر $G$ یک گروه موضعاً فشرده باشد، آنگاه $A_M(G)$ یک جبر باناخ بدون مرتبه و جابجایی است.

**اثبات:** اثبات جابجایی بودن با توجه به اینکه $A_M(G)$ یک جبر باناخ جابجایی است که در $A(G)$ چگال است، به‌راحتی قابل بررسی است.
حال فرض کنیم $u \in A_M(G)$ و $uA_M(G) = \{0\}$. پس برای هر $v \in A(G)$، $uL_v = 0$. در نتیجه برای هر $w \in A(G)$ داریم:

$$0 = uL_v(w) = u(vw) = u(v)w.$$

چون $A(G)$ بدون مرتبه است (اثبات این مطلب به‌راحتی با توجه به منظم بودن $A$ و اینکه $\Delta\big(A(G)\big) \cong G$ به‌دست می‌آید) پس $u(v) = 0$. در نتیجه $u = 0$ و این یعنی $A_M(G)$ بدون مرتبه است. قبل از بیان قضیه‌ی اصلی در این بخش، ابتدا لمی را به‌صورت ذیل ارائه می‌دهیم.

**لم ۲-۸:** فرض کنیم $A, B$ دو جبر باناخ باشند که $B$ ایده‌ال چگالی از $A$ نیز هست، یعنی $\bar{B}^{\|\cdot\|_A} = A$. هم‌چنین برای هر $b \in B$، فرض کنیم $\|b\|_A \leq \|b\|_B$. در این‌صورت اگر $B$ دارای یک همانی تقریبی کران‌دار باشد که با نرم $A$ کران‌دار است، آنگاه $A$ نیز دارای یک همانی تقریبی کران‌دار است.

**اثبات:** فرض کنیم $\{b_\alpha\}$ همانی تقریبی $B$ است و ثابت $C$ وجود دارد که برای هر $\alpha$، $\|b_\alpha\|_A < C$. اگر $a \in A$ و $\epsilon > 0$، $b \in B$ و $\alpha_0$ای وجود دارند که

$$\|b - a\|_A < \frac{\epsilon}{3C} \quad \left\|bb_{\alpha_0} - b\right\|_B < \frac{\epsilon}{3}$$

پس داریم:

$$\begin{aligned}\left\|ab_{\alpha_0} - a\right\|_A &\leq \big\|ab_{\alpha_0} - bb_{\alpha_0} + bb_{\alpha_0} - b + b - a\big\|_A \\ &\leq \left\|ab_{\alpha_0} - bb_{\alpha_0}\right\|_A + \left\|bb_{\alpha_0} - b\right\|_A + \|b - a\|_A \\ &\leq C\|a - b\|_A + \left\|bb_{\alpha_0} - b\right\|_B + \frac{\epsilon}{3} \\ &\leq \frac{\epsilon}{3C} \times C + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.\end{aligned}$$

در نتیجه $A$ دارای یک واحد تقریبی کران‌دار[۲۰] و از این روی یک همانی تقریبی کران‌دار است.
حال به بیان قضیه‌ی اصلی در این بخش می‌پردازیم.

[19] V. Runde

[20] bounded approximate unit

**قضیه ۲-۹:** فرض کنیم $G$ یک گروه موضعاً فشرده و گسسته باشد. در این‌صورت $A_M(G)$ یک جبر بی.اس.ایی. است اگروتنهااگر $G$ یک گروه $M$-میانگین‌پذیر ضعیف باشد.

**اثبات:** با توجه به لم ۱ از [7]، می‌دانیم که $\Delta(A_M(G)) \cong G$، یعنی کاراکترهای جبر $A_M(G)$ همان تابعک‌های ارزیاب[21] $\varphi_x: A_M(G) \to \mathbb{C}$ هستند که برای هر $f \in A_M(G)$، $\varphi_x(f) := f(x)$ که $x \in G$. در نتیجه $A_M(G)$ یک جبر باناخ نیم-ساده است.

از طرفی با توجه به قضیه‌ی ۳-۱ از [12]، می‌دانیم که اگر $A$ یک جبر باناخ جابجایی و نیم-ساده باشد که ایده‌الی در دوگان دومش نیز هست، آنگاه $A$ یک جبر بی.اس.ایی. است اگروتنهااگر $A$ دارای همانی تقریبی کران‌دار باشد.

حال چون $G$ گسسته است، نتیجه‌ی مطلوب با توجه به قضیه‌ی ۲-۴، لم ۲-۸ و قضیه‌ی ۳-۱ از [12] به‌دست می‌آید. دسته‌ی وسیعی از گروه‌ها وجود دارند که در قضیه‌ی ۲-۹ صدق می‌کنند. مثال بعدی گویای این واقعیت است.

**مثال ۲-۱۰:** برای هر $n \in \mathbb{N}$، فرض کنیم $G = \mathbb{F}_n$، گروه آزاد از $n$ شی باشد. در این‌صورت طبق قضیه‌ی ۲-۹ جبر باناخ $A_M(G)$ جبر بی.اس.ایی. است، چون با توجه به توضیحات قبل از قضیه‌ی ۴ از [7] این گروه‌ها $M$-میانگین‌پذیر ضعیف هستند.

یکی از نتایج بسیار کلیدی و مهم در بحث خاصیت بی.اس.ایی. از جبرهای مرتبط با گروه‌های موضعاً فشرده، قضیه‌ی ۵-۱ از [12] می‌باشد. در واقع این قضیه توصیف کاملی از اینکه چه وقت جبر $A(G)$ دارای خاصیت بی.اس.ایی. است را به‌دست می‌دهد. به بیان دقیق‌تر قضیه‌ی مورد نظر ثابت می‌کند که $A(G)$ یک جبر بی.اس.ایی. است اگروتنهااگر $G$ میانگین‌پذیر باشد. حال با توجه به نتایج کسب شده در این مقاله، این سؤال مطرح می‌گردد که "آیا گزاره‌ی اخیر با تعویض $A(G)$ با $A_M(G)$ برقرار است؟ به‌طور دقیق‌تر آیا توصیف، $G$ میانگین‌پذیر است اگروتنهااگر $A_M(G)$ یک جبر بی.اس.ایی. باشد درست است یا خیر؟" در ادامه قصد داریم که به این سؤال پاسخ دهیم.

می‌دانیم که گروه گسسته‌ی $\mathbb{F}_2$ میانگین‌پذیر نیست. توجه نمائید که در اثبات میانگین‌ناپذیری یا به بیانی دیگر پارادوکسیکال بودن گروه $\mathbb{F}_2$؛ قضیه‌ی ۰-۱-۲ و نتیجه‌ی ۰-۲-۱۱ از [14] را ببینید، بیش از توپولوژی، که در اینجا گسسته در نظر گرفته شده، ساختار جبری این گروه مد نظر است. اما با توجه به نتیجه‌ی ۳-۱ از [2] این گروه میانگین‌پذیر ضعیف است. در نتیجه طبق رابطه‌ی Error! Reference source not found. گروه $\mathbb{F}_2$، $M$-میانگین‌پذیر ضعیف نیز هست. پس طبق قضیه‌ی ۲-۹، جبر $A_M(\mathbb{F}_2)$ دارای خاصیت بی.اس.ایی. است در حالی که $\mathbb{F}_2$ میانگین‌پذیر نمی‌باشد. بنابراین پاسخ سؤال مطرح شده‌ی فوق، منفی است.

در حالی که طبق قضیه‌ی ذکر شده از [12]، $A(\mathbb{F}_2)$ یک جبر بی.اس.ایی. نمی‌باشد. پس ملاحظه می‌کنیم که با توجه به رابطه‌ی (۱.آ)، اگر $G$ یک گروه موضعاً فشرده و میانگین‌پذیر باشد، دو جبر $A(G)$ و $A_M(G)$ با یکدیگر برابر هستند، ولی طبق آخرین نتیجه‌ی به‌دست آمده در این مقاله، در حالتی که $G$ میانگین‌پذیر نباشد، رفتار و خواص این دو جبر کاملاً متفاوت است.

## ۳- نتایج روی جبر لبگ-فوریه

فرض کنیم $G$ یک گروه موضعاً فشرده و $L^1(G)$ جبر گروهی باشد. قرار می‌دهیم،

$\mathcal{L}A(G) := L^1(G) \cap A(G).$

[21] evaluation functional

نرم زیر را روی این فضا در نظر می‌گیریم:
$\|f\|_{\mathcal{L}A(G)} := \|f\|_1 + \|f\|_{A(G)} (f \in \mathcal{L}A(G)).$

با توجه به [17] داریم، $\mathcal{L}A(G)$ با ضرب نقطه‌وار و نرم فوق، یک جبر باناخ جابجایی است و هم‌چنین داریم، $\Delta(\mathcal{L}A(G)) \cong G$ ثابت شده است که $\mathcal{L}A(G)$ دارای یک همانی تقریبی کران‌دار است اگر و تنها اگر $G$ فشرده باشد؛ گزاره‌ی ۲-۶ از [17] را ببینید. توجه کنید که $\mathcal{L}A(G)$ را جبر لبگ-فوریه[22] می‌نامیم که اولین بار توسط قهرمانی[23] و لائو[24] در مقاله‌ی [17] معرفی شد.
حال قرار می‌دهیم:
$\mathcal{L}A_M(G) := \mathcal{L}A(G)^{\|\cdot\|_{\mathcal{M}(\mathcal{L}A(G))}}.$

مشابه با حالت $A_M(G)$، ثابت می‌شود که $\mathcal{L}A_M(G)$ یک جبر باناخ است. هم‌چنین، همانند گزاره‌ی ۰ ثابت می‌شود که $\mathcal{L}A_M(G)$ نیز یک جبر باناخ جابجایی و بدون مرتبه است.
چون در حالت کلی $\mathcal{L}A(G)$ دارای همانی تقریبی کران‌دار نیست، پس عموماً $\mathcal{L}A(G) \neq \mathcal{L}A_M(G)$.
ثابت شده است که اگر $G$ یک گروه گسسته باشد، آنگاه $\mathcal{L}A(G)$ یک جبر بی.اس.ایی. است اگروتنهااگر $G$ متناهی باشد: منبع [11] را ببینید.
حال در ادامه‌ی این بخش به بررسی خاصیت بی.اس.ایی. جبر $\mathcal{L}A_M(G)$ می‌پردازیم و یک شرط کافی برای اینکه این جبر، دارای خاصیت بی.اس.ایی. باشد را ارائه می‌دهیم. لازم به ذکر است که قسمت عکس این قضیه، در حال حاضر مشخص نیست و به‌عنوان یک سؤال باز، آنرا به خوانندگان واگذار می‌کنیم.

**قضیه ۳-۱:** فرض کنیم $G$ یک گروه فشرده باشد. دراین‌صورت $\mathcal{L}A_M(G)$ یک جبر بی.اس.ایی. است.

**اثبات:** چون $G$ فشرده است، پس طبق گزاره‌ی۲-۶ از [17] نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{L}A(G)$ دارای یک همانی تقریبی کران‌دار است و این نتیجه می‌دهد که نرم‌های $\|\cdot\|_{\mathcal{L}A(G)}$ و $\|\cdot\|_{\mathcal{M}(\mathcal{L}A(G))}$ معادلند. در نتیجه داریم:
$\mathcal{L}A_M(G) = \mathcal{L}A(G).$

از طرفی چون $G$ فشرده است، مجدد به استناد گزاره‌ی فوق $\mathcal{L}A(G) = A(G)$ در پایان به استناد قضیه‌ی ۱-۵ از [12] چون هر گروه فشرده، میانگین‌پذیر هم هست، حکم حاصل می‌گردد. توجه کنید که مشابه با لم ۲-۳ ثابت می‌شود که $\mathcal{L}A(G)$ یک جبر سگال مجرد در $\mathcal{L}A_M(G)$ *است* و این یعنی
$\Delta(\mathcal{L}A_M(G)) \cong \Delta(\mathcal{L}A(G)).$

قضیه‌ی فوق روی دسته‌ی بسیار مهمی از گروه‌های لی به‌صورت ذیل به‌کار گرفته می‌شود.

**مثال ۳-۲:** فرض کنیم $G$ هر یک از گروه‌های $SU(2), SO(3)$ و یا $U(2)$ باشد. در این‌صورت $\mathcal{L}A_M(G)$ یک جبر بی.اس.ایی. است چون این گروه‌ها فشرده می‌باشند. اثبات فشردگی این گروه‌ها در اکثر کتب استاندارد آنالیز هارمونیک قابل مشاهده است.

## ۴- تساوی فضای کاراکتری جبر فوریه و تکمیل شده‌اش بر مبنای ضرب‌گرها

در این بخش اثباتی از تساوی فضای کاراکتری جبر فوریه و تکمیل شده‌اش را ارائه می‌دهیم که کاملاً بر مبنای استفاده از ضرب‌گرهاست. این اثبات به‌روشنی و زیبایی قدرت این دسته از عملگرها، یعنی ضرب‌گرها را نشان می‌دهد. لازم به‌ذکر است که این قضیه یکبار توسط فارست اثبات شده است،

[22] Lebesgue-Fourier algebra
[23] F. Ghahramani
[24] A. T.- M. Lau

ولی اثبات ارائه شده در ادامه کاملاً با آن متفاوت می‌باشد.

**قضیه ۴-۱:** اگر $G$ یک گروه موضعاً فشرده باشد آنگاه داریم:
$\Delta\big(A_M(G)\big) \cong \Delta\big(A(G)\big).$

**اثبات:** فرض کنیم $A = A(G)$ و $A_M = A_M(G)$. اگر $\psi$ عضوی از $\Delta(A_M)$ باشد، آنگاه تحدید این تابع به $A$، یعنی $\psi_A$، عضوی از $\Delta(A)$ است. توجه کنید که چون $A$ در $A_M$ چگال است، $\psi_A$ یک تابع ناصفر می‌باشد.
از سوی دیگر، اگر $\varphi \in \Delta(A)$، فرض کنیم که نگاشت $\tilde{\varphi}: A_M \to \mathbb{C}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:
$$\tilde{\varphi}(a') := \frac{\varphi\big(a'(a)\big)}{\varphi(a)}, \quad (a' \in A_M),$$

که $a \in A$ طوری انتخاب می‌گردد که $\|a\|_A \le 1$ و $\varphi(a) \neq 0$.
ابتدا نشان می‌دهیم که نگاشت $\tilde{\varphi}$ خوش‌تعریف است. برای هر $a' \in A_M$، دنباله‌ی $(a_n)$ در $A$ موجود است به‌قسمی‌که
$\|a' - a_n\|_{\mathcal{M}(A)} \to 0.$

بنابراین برای هر $a \in A$ به‌قسمی‌که $\|a\|_A \le 1$ و $\varphi(a) \neq 0$ داریم $\|a'(a) - a_n a\|_A \to 0$. در نتیجه
$$\varphi\big(a'(a)\big) = \lim_n \varphi(a_n a) = \lim_n \varphi(a_n)\,\varphi(a).$$

پس داریم $\lim_n \varphi(a_n) = \frac{\varphi\left(a'(a)\right)}{\varphi(a)}$. اما سمت چپ رابطه‌ی اخیر به $a$ وابسته نیست و این نتیجه می‌دهد که $\tilde{\varphi}$ آن‌گونه که در رابطه‌ی Error! Reference source not found.، تعریف شد، خوش‌تعریف است.

به‌وضوح $\tilde{\varphi}$ ناصفر است، چون اگر $a' = L_a$، آنگاه
$\tilde{\varphi}(a') = \frac{\varphi(a^2)}{\varphi(a)} = \varphi(a) \neq 0.$
هم‌چنین، $\tilde{\varphi}$ ضربی است، چون برای هر $a', b' \in A_M$ دلخواه داریم:
$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(a' \circ b') = \frac{\varphi\big(a' \circ b'(ab)\big)}{\varphi(ab)} &= \frac{\varphi\Big(a'\big(ab'(b)\big)\Big)}{\varphi(ab)} \\ &= \frac{\varphi\big(a'(a)b'(b)\big)}{\varphi(ab)} \\ &= \frac{\varphi\big(a'(a)\big)}{\varphi(a)} \times \frac{\varphi\big(b'(b)\big)}{\varphi(b)} \\ &= \tilde{\varphi}(a)\tilde{\varphi}(b),\end{aligned}$$

که $a, b \in A$ متناظر با اعضای $a', b' \in A_M$ می‌باشند. بنابراین به‌عنوان دو مجموعه داریم $\Delta(A) \cong \Delta(A_M)$.
اگر $\varphi_\alpha$ در $\big(\Delta(A_M), \sigma(A_M^*, A_M)\big)$ به $\varphi$ میل کند، آنگاه واضح است که $(\varphi_\alpha)_A$ به $\varphi_A$ میل می‌کند. اگر $\varphi_\alpha$ در $\big(\Delta(A), \sigma(A^*, A)\big)$ به $\varphi$ میل کند آنگاه با استفاده از رابطه‌ی Error! Reference source not found.، براحتی قابل بررسی است که $\tilde{\varphi}_\alpha$ به $\tilde{\varphi}$ در $\Delta(A_M)$ میل می‌کند، علت این امر این است که برای هر $a' \in A_M$ داریم:
$$\tilde{\varphi}_\alpha(a') = \frac{\varphi_\alpha\big(a'(a)\big)}{\varphi_\alpha(a)} \to \frac{\varphi\big(a'(a)\big)}{\varphi(a)} = \tilde{\varphi}(a').$$

بنابراین به‌عنوان دو فضای توپولوژیک نیز داریم $\Delta(A) \cong \Delta(A_M)$ و این اثبات را کامل می‌کند.

**مثال ۴-۲:** فرض کنیم $\mathbb{F}_n$ گروه آزاد از $n$ شی باشد. می‌دانیم که این گروه موضعاً فشرده، میانگین‌پذیر نیست. پس لزوماً $A_M(\mathbb{F}_n)$ و $A(\mathbb{F}_n)$ برابر نیستند، در حالی که طبق قضیه ۰ داریم:
$\Delta\big(A_M(\mathbb{F}_n)\big) \cong \Delta\big(A(\mathbb{F}_n)\big)$

یعنی فضای کاراکتری این دو جبر متمایز، با یکدیگر برابر می‌شوند.

## نتیجه گیری

در این مقاله برای گروه موضعاً فشرده‌ی $G$، نشان دادیم که $A(G)$ یک جبرِ سگالِ مجرد در $A_M(G)$ است. سپس یک شرط لازم و کافی برای تساوی دو جبر $A(G)$ و $A_M(G)$ را ارائه دادیم. هم‌چنین ثابت کردیم که $A_M(G)$ یک ایده‌ال در دوگان دومش است اگروتنهااگر $G$ گسسته باشد. نتایج بدست آمده بما توان این را داد که در حالت گسسته بودن $G$ ثابت نمائیم که $A_M(G)$ یک جبر بی.اس.ایی. است اگروتنهااگر $G$، $M$-میانگین‌پذیر ضعیف باشد. به‌عنوان نتیجه‌ای از یافته‌های اخیر در این مقاله، ثابت کردیم که $A_M(\mathbb{F}_2)$ برخلاف $A(\mathbb{F}_2)$ یک جبر بی.اس.ایی. است. در پایان کار نیز یک اثبات کاملاً جدید از تساوی فضای کاراکتری جبر فوریه و تکمیل شده‌اش را ارائه دادیم که کاملاً مبتنی بر خواص بسیار زیبا و قدرتمند ضرب‌گرهاست. این پژوهش می‌تواند راهگشای پاسخ به برخی از سوالات مطرح شده در حوزه‌ی آنالیز هارمونیک باشد. اما یکی از مهمترین اهداف این کار تحقیقاتی، ارائه‌ی چند تعمیم بسیار قوی در آنالیز هارمونیک هست که می‌توان گفت، ریاضی محض بر پایه‌ی این تعمیم‌ها خود را تقویت می‌کند تا در آینده‌ی نه چندان دور، تبدیل به ابزاری برای کمک به رشد و تعالی سایر علوم باشد.

## فهرست منابع

[1] J. T. Burnham, Closed ideals in subalgebras of Banach algebras I, Proc. Amer. Math. Soc. 32 (1972), 551-555.

[2] J. Duncan and S.A.R. Hosseiniun, The second dual of a Banach algebra. Proc. R. Soc. Edinb. Sect. 84, (1979), 309-325.

[3] J. de Canniere and U. Haagerup, Multipliers of the Fourier algebras of some simple lie groups and their discrete subgroups, Amer. J. Math. 107 (1985), 455-500.

[4] P. Eymard, L'algebre de Fourier d'un groupe localement compact, Bull. Soc. Math. France, 92, (1964), 181-236.

[5] M. Fozouni and M. Nemati, BSE property for some certain Segal and Banach algebras, Mediter. J. Math. 16 (2019), no. 2, 1-14.

[6] B. E. Forrest, Arens regularity and discrete groups, Pacific J. Math. (1991), no. 151, 217-227.

[7] B. Forrest, Some Banach algebras without discontinuous derivations, Proc. Amer. Math. Soc. 114 (1992), no.4, 965-970.

[8] M. Fozouni, On character space of the algebra of BSE-functions, Sahand Comminucations in Mathematical Analysis, Vol. 12 (2018), Iss. 1, 187-194.

[9] E. E. Granirer, On some spaces of linear functionals on the algebras $A_p(G)$ for locally compact groups, Colloquium Mathematicae 52 (1987), no. 1, 119-132 (eng).

[11] Z. Kamali and M. L. Bami, Bochner-Schoenberg-Eberlein property for abstract Segal algebras, Proc. Japan Acad., 89, Ser. A (2013), 107-110.

[11] Z. Kamali and M. L. Bami, The Bochner–Schoenberg–Eberlein property for $L^1(R^+)$. J. Fourier Anal. Appl. 20(2), (2014), 225-233.

[12] E. Kaniuth and A. T.-M. Lau, Fourier and Fourier-Stieltjes Algebras on Locally Compact Groups, American Mathematical Society, 2018.

[13] E. Kaniuth and A. Ülger, The Bochner-Schoenberg-Eberlein property for commutative Banach algebras, especially Fourier and Fourier Stieltjes algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), 4331-4356.

[14] V. Runde, Lectures on Amenability, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002.

[15] V. Runde, (non-) amenability of the Fourier algebra in the cb-multiplier norm, arXiv:1904.03252.

[16] S.-E. Takahasi and O. Hatori, Commutative Banach algebras which satisfy a Bochner-Schoenberg-Eberlein-type theorem, Proc. Amer. Math. Soc. 110 (1990), 149-158.

[17] F. Ghahramani and A. T-M. Lau, Weak amenability of certain classes of Banach algebras without bounded approximate identities, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 133 (2002), no. 357, 357–371.