دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی و یکم، مرداد و شهریور ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

مشخصه‌سازی خانواده‌های α – حلال با کران چندجمله‌ای

سیده مرضیه قویدل [*1]، مینا شاه‌علی [2]

[(۱و۲)] گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۸/۱۴   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۶/۱۶

چکیده

نظریه خانواده‌های α–حلال، بعنوان یک توسیع از تئوری نیم گروه‌های پیوسته قوی و خانواده‌ی عملگرهای کسینوسی با هدف مطالعه‌ی معادلات تحولی کسری با مشتق کاپوتو از مرتبه α گسترش زیادی پیدا کرده است. یکی از مسائل مهم در نظریه نیم گروه‌های پیوسته قوی، همچنین خانواده‌های کسینوسی بحث پیدا کردن کران‌های متفاوتی برای این خانواده‌ها (بر حسب مولد آنها) است. در این مقاله، خانواده‌های α–حلال با کران چندجمله‌ای مورد مطالعه قرار می گیرند. در واقع شرایطی روی حلال یک عملگر با دامنه‌ی چگال بیان می‌کنیم که یک خانواده α–حلال چند جمله‌ای کراندار تولید کند. همچنین ثابت می‌کنیم که این شرایط در فضای هیلبرت لازم نیز هستند. با توجه به اینکه خانواده‌های α–حلال توسیع نیم‌گروه‌های پیوسته قوی هستند، نتایج به‌دست آمده تعمیمی از قضایای اثبات شده توسط آیزنر برای نیم گروه‌های چند جمله‌ای کراندار می‌باشد. از طرفی، چون جواب‌های معادلات تحولی کسری بر حسب خانواده‌های α–حلال بیان می شود لذا توسط این نتایج، همزمان در مورد وجود و پایداری جواب‌های این مسئله‌ها بحث می شود.

واژه‌های کلیدی: نیم گروه‌های پیوسته قوی، مولد، حلال، خانواده‌های α–حلال، چند جمله‌ای کراندار.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: marzieh.ghavidel@razi.ac.ir

۱- مقدمه

طی چند دهه‌ی گذشته، تئوری معادله‌های انتگرالی پیشرفت سریعی داشته است. از کاربردهای وسیع این معادلات می‌توان به نقش آن‌ها در مسائل فیزیک وابسته به ریاضیات مانند تئوری ویسکوالاستیک، رسانش گرما در مواد، الکترودینامیک و ضرورت آن‌ها به عنوان ابزاری برای حل این‌گونه مسائل اشاره کرد. از این رو، مطالعه‌ی این دسته از معادلات و بررسی جواب های آن‌ها همواره مورد توجه محققان بوده است. در سال ۱۹۸۰، داپریتو و آینلی [۱] و [۲] در راستای مطالعه‌ی یک دسته از معادلات انتگرو دیفرانسیل، مفهوم خانواده‌ی حلال از مرتبه (M,ω) را معرفی کردند. بعدها، این نظریه بطور گسترده‌ای در راستای مطالعه‌ی جواب‌های معادلات انتگرال ولترای مجرد

$$x(t)=f(t)+\int_0^t a(t-s)Ax(s)\,ds,$$

که در آن $a\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$، $f:\mathbb{R}^+\to X$ یک تابع پیوسته و $A:D(A)\subseteq X\to X$ یک عملگر خطی و بسته با دامنه‌ی چگال در فضای باناخ X است، گسترش پیدا کرد. بخصوص مفهوم عملگر جواب برای معادله‌ی

$$x(t)=x+\int_0^t a(t-s)Ax(s)\,ds, \qquad (1)$$

ارائه شد، برای جزییات بیشتر به [۳] رجوع شود. در سال ۲۰۰۱، باجلکوا در پایان نامه دکترای خود [۴] یک حالت خاص از معادله‌ی (۱) را با در نظر گرفتن

$$a(t)=g_\alpha(t):=\begin{cases}\dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & t>0,\\ 0, & t\le 0,\end{cases}$$

مورد بررسی قرار داد. او نشان داد که مسئله کوشی کسری با مشتق کاپوتو

$$\begin{cases}D^\alpha x(t)=Ax(t)\ ,\ t>0\ ,\ \alpha>0,\\ x(0)=x\ ,\ x^k(0)=0,\ k=1,\dots,[\alpha],\end{cases} \qquad (2)$$

خوش وضع است اگر و تنها اگر A مولد یک عملگر جواب برای معادله‌ی

$$x(t)=x+\int_0^t g_\alpha(t-s)Ax(s)\,ds,$$

باشد. عملگر جواب برای معادله قبل در اکثر منابع یک خانواده‌ی α-حلال با مولد A نامیده می شود. خانواده‌های α-حلال برای $(a(t)=1)$ $\alpha=1$، همان C_0-نیم گروه و برای $(a(t)=t)$ $\alpha=2$، همان خانواده‌های کسینوسی هستند که به ترتیب با حل مسئله‌های

$$\begin{cases}x'(t)=Ax(t)\ ,\ t>0,\\ x(0)=x\ ,\end{cases}$$

و

$$\begin{cases}x''(t)=Ax(t)\ ,\ t>0,\\ x(0)=x\ ,\ x'(0)=y\ ,\end{cases}$$

مرتبط هستند و تحقیقات گسترده‌ای در مورد آنها انجام شده است. در [۴]، باجلکوا برخی از نتایجی را که برای C_0-نیم‌گروه‌ها اثبات شده بود برای خانواده‌های α-حلال بیان و اثبات کرد. بعنوان مثال نشان داد شرط لازم و کافی برای اینکه A مولد یک خانواده‌ی α-حلال با کران نمایی از نوع (M,ω) باشد این است که $(\omega^\alpha,\infty)\subseteq\rho(A)$ و برای هر $n\in\mathbb{N}_0$ و $\lambda>\omega$

$$\left\|\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^\alpha,A)\right\|\le\frac{Mn!}{(\lambda-\omega)^{n+1}}. \qquad (3)$$

اگر $\alpha=1$، نتیجه فوق همان قضیه‌ی هیل- یوشیدا (قضیه‌ی ۸-۳ از [۵]) است که مولد یک C_0-نیم‌گروه را برحسب توان‌های حلال آن مشخصه سازی می‌کند. به نظر می‌رسد به‌دست آوردن کرانی برای تمام توان‌های حلال یک عملگر در مثال‌های کاربردی به‌راحتی امکان‌پذیر نباشد، لذا آیزنر [۶،۷]، آیزنر و سوارت [۸]، گومیلکو [۹] و شی و فنگ [۱۰]، با درنظر گرفتن شرط انتگرال‌پذیری حلال

یک عملگر، نتایج متفاوتی را برای تولید C_0- نیم‌گروه با پایداری‌های متفاوت به‌دست آوردند. به‌خصوص آیزنر [۶] مولد یک C_0-نیم‌گروه چند جمله‌ای کراندار را فقط با استفاده از توانهای اول و دوم حلال آن مشخصه‌سازی کرد. هدف ما در این مقاله، تعمیم این نتایج برای یک خانواده‌ی α- حلال است. با توجه به اینکه جواب مساله (۲) بر حسب خانواده‌های α-حلال تولید شده توسط A بیان می‌شود، لذا توسط این نتایج، همزمان در مورد وجود و کرانداری جواب مساله بحث می‌شود. در این مطالعه، با قراردادن یک کران چندجمله‌ای روی

$$\left\| \langle (a+i.)^{\alpha-2} R((a+i.)^{\alpha},A)x,y \rangle \right\|_{L^1(\mathbb{R})}, x\in X,\ y\in X^*, \quad (۴)$$

و

$$\left\| \langle (a+i.)^{2\alpha-2} R^2((a+i.)^{\alpha},A)x,y \rangle \right\|_{L^1(\mathbb{R})}, x\in X,\ y\in X^*, \quad (۵)$$

یک خانواده‌ی α-حلال با مولد A و با یک کران چندجمله‌ای به‌دست می‌آوریم. همچنین نشان می‌دهیم که عکس این مطلب در فضای هیلبرت نیز برقرار است، یعنی اگر A مولد یک خانواده‌ی α- حلال با کران چندجمله‌ای در یک فضای هیلبرت باشد آنگاه عبارت‌های (۴) و (۵) توسط یک چندجمله‌ای کراندار می‌شوند.

در سراسر این مقاله، فرض می‌کنیم X یک فضای باناخ با نرم $\|\cdot\|$ و $B(X)$ فضای تمام عملگرهای خطی و کراندار از X به X با نرم یکنواخت باشد. همچنین $A: D(A)\subseteq X\to X$ را یک عملگر خطی و بسته با دامنه‌ی چگال در نظر می‌گیریم مگر اینکه خلاف آن فرض شود.

تعریف ۱-۱: فرض کنیم $A: D(A)\subseteq X\to X$ یک عملگر خطی باشد. مجموعه‌ی حلال A به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}: \text{وارون‌پذیر است } \lambda I-A\}$$

برای $\lambda\in\rho(A)$، عملگر $R(\lambda,A)=(\lambda I-A)^{-1}$ حلال عملگر A نامیده می‌شود. اگر A یک عملگر بسته باشد، آنگاه از قضیه گراف بسته نتیجه می‌شود

$$\rho(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}: \text{یک به یک و پوشاست } \lambda I-A\}$$

همچنین اگر A یک عملگر بسته با دامنه‌ی چگال در X باشد به‌طوری‌که $\rho(A)\neq\varnothing$، آنگاه با توجه به گزاره ۶-۲ از [۵] مجموعه‌ی

$$D(A^{\infty}):=\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$$

در X چگال است.

تعریف ۱-۲: فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. برای $f\in L^1(\mathbb{R},X)$ تبدیل فوریه‌ی f به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\mathcal{F}f)(s):=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f(t)\, dt,\ \ s\in\mathbb{R}.$$

قضیه ۱-۳ [۵، قضیه C.14]: فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد. آنگاه برای هر $f\in L^2(\mathbb{R},H)$، داریم $\mathcal{F}f\in L^2(\mathbb{R},H)$ و $\|Ff\|_2=\sqrt{2\pi}\,\|f\|_2$.

تعریف ۱-۴ [۴، تعریف۳ -۲]: فرض کنید $\alpha>0$. گردایه‌ی $\{T_\alpha(t)\}_{t\geq 0}\subseteq B(X)$ یک خانواده‌ی α- حلال با مولد A (یا یک عملگر جواب برای (۲)) نامیده می‌شود، هرگاه

(آ) $T_\alpha(0)=Id$ و برای هر $x\in X$، نگاشت $T_\alpha(t)x$ روی $[0,\infty)$ پیوسته باشد؛

(ب) $T_\alpha(t)D(A)\subseteq D(A)$ و برای هر $x\in D(A)$ و $t\geq 0$ داشته باشیم $AT_\alpha(t)x=T_\alpha(t)Ax$؛

(پ) برای هر $x\in D(A)$ و $t\geq 0$،

$$T_\alpha(t)x=x+\int_0^t g_\alpha(t-s)AT_\alpha(s)x\, ds.$$

تعریف ۱- ۵: خانواده α-حلال $T_\alpha(t)$ نمایی کراندار نامیده می‌شود اگر ثابت‌های $M\geq 1$ و $\omega\geq 0$ موجود باشند به‌طوری‌که

$$\| T_\alpha(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad t\geq 0. \qquad (۶)$$

اگر A مولد یک خانواده‌ی α-حلال باشد که در رابطه‌ی (۶) صدق کند، آنگاه از نماد $A\in G^\alpha(M,\omega)$ استفاده می‌شود. همچنین قرار می‌دهیم

$$G^\alpha=\{G^\alpha(M,\omega): M\geq 1, \omega\geq 0\}.$$

قضیه ۱-۶ [۴، قضیه ۲-۹]: فرض کنید $\alpha>0$. آنگاه $A\in G^\alpha(M,\omega)$ اگروتنها اگر $(\omega^\alpha,\infty)\subseteq\rho(A)$ و خانواده $\{T_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ از تبدیلات خطی کراندار روی X موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x\in X$، $T_\alpha(.)x$ روی $[0,\infty)$ پیوسته باشد، در رابطه‌ی (۶) صدق کند و برای هر $x\in X$ و $\mathrm{Re}\lambda>\omega$ داشته باشیم

$$\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^\alpha,A)x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_\alpha(t)x\, dt. \qquad (۷)$$

قضیه ۱- ۷ [۴، قضیه ۲-۵]: فرض کنید $\alpha>0$. آنگاه $A\in G^\alpha$ و خانواده‌ی α-حلال متناظر در توپولوژی عملگر یکنواخت، پیوسته است اگر و تنها اگر $A\in B(X)$. در این حالت خانواده‌ی α-حلال تولید شده توسط A بصورت $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n+1)}$ نمایش داده می‌شود.

قضیه ۱- ۸ [۴، قضیه ۲-۶]: فرض کنید $\alpha>2$ و $A\in G^\alpha$. آنگاه $A\in B(X)$.

نکته. با توجه به قضیه فوق در ادامه بحث همواره فرض می‌کنیم $\alpha\in(0,2]$.

۲- نتایج اصلی

خانواده‌ی α-حلال $T_\alpha(t)$ چند جمله‌ای کراندار نامیده می‌شود هرگاه ثابت‌های $C, d\geq 0$ موجود باشد بطوریکه $\|T_\alpha(t)\|\leq C(1+t^d)$ برای هر $t\geq 0$. در این بخش وجود شرایط کافی برای اینکه A مولد یک خانواده‌ی α-حلال چندجمله‌ای کراندار باشد را بررسی می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا با فرض متناهی بودن انتگرال‌های

$$\int_{-\infty}^{\infty}|<(a+is)^{\alpha-2}R((a+is)^\alpha,A)x,y>|\, ds$$

و

$$\int_{-\infty}^{\infty}|<(a+is)^{2\alpha-2}R^2((a+is)^\alpha,A)x,y>|\, ds$$

برای هر $x\in X$ و $y\in X^*$، گردایه‌ای از عملگرهای خطی و کراندار معرفی کرده و ویژگی‌های آن را بررسی می‌کنیم. سپس با قراردادن یک کران چندجمله‌ای روی انتگرال‌های قبل، نشان می‌دهیم گردایه اخیر یک خانواده‌ی α-حلال با مولد A است که به وسیله‌ی همان چندجمله‌ای کراندار می‌شود.

تعریف ۲-۱: فرض کنیم $A:D(A)\subseteq X\to X$ یک عملگر خطی باشد. α-کران شبه طیفی برای عملگر A بصورت زیر تعریف می‌شود

$$s_0^\alpha(A):=\inf\{a\in\mathbb{R}:\ \lambda^{\alpha-1}R(\lambda^\alpha,A)\}.$$

روی $\mathrm{Re}\lambda>a$ کراندار است.

لم ۲- ۲: فرض کنیم A یک عملگر خطی با دامنه‌ی چگال روی X باشد و $s_0^\alpha(A)<\infty$. آنگاه برای هر $a>s_0^\alpha(A)$ و هر $x\in X$،

$$\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^\alpha,A)x\to 0,\ |\lambda|\to\infty,\ \mathrm{Re}\lambda\geq a.$$

اثبات: فرض کنیم $a > s_0(A)$. آنگاه عدد ثابت M وجود دارد به‌طوری‌که

$$\left\|\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^{\alpha},A)\right\| \le M, \quad \mathrm{Re}\,\lambda \ge a.$$

از طرفی برای $x\in D(A)$

$$\lambda^{\alpha}R(\lambda^{\alpha},A)x = x + R(\lambda^{\alpha},A)Ax. \qquad (۸)$$

بنابراین برای هر λ که $\mathrm{Re}\,\lambda \ge a$ و $x\in D(A)$

$$\left\|\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^{\alpha},A)x\right\| \le \frac{\|x\|}{|\lambda|} + \frac{M\,\|Ax\|}{|\lambda^{\alpha}|}.$$

از رابطه اخیر برای هر $x\in D(A)$، داریم

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \lambda^{\alpha-1}R(\lambda^{\alpha},A)x = 0, \quad \mathrm{Re}\,\lambda \ge a. \qquad (۹)$$

چون $D(A)$ در X چگال است و $\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^{\alpha},A)$ روی مجموعه‌ی $\{\lambda:\mathrm{Re}\,\lambda\ge a\}$ به‌طور یکنواخت کران‌دار است، نتیجه می‌گیریم (۷) برای هر $x\in X$ برقرار است.
برای اثبات نتیجه اصلی این مقاله به گزاره زیر نیاز داریم. در واقع در نتیجه زیر می توان خانواده ای از تبدیلات خطی که بصورت معکوس تبدیل لاپلاس $\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^{\alpha},A)$ بیان می‌شوند، معرفی کرد. این خانواده بعدا تحت شرایطی همان خانواده‌ی α- حلال چندجمله‌ای کراندار با مولد A خواهد بود.

گزاره ۲-۳: فرض کنیم $s_0^{\alpha}(A)<\infty$. همچنین فرض کنیم برای هر $a>s_0^{\alpha}(A)$، $x\in X$ و $y\in X^*$ داشته باشیم

$$<(a+i.)^{\alpha-2}R((a+i.)^{\alpha},A)x,y> \in L^1(\mathbb{R}) \qquad (۱۰)$$

و

$$<(a+i.)^{2\alpha-2}R^2((a+i.)^{\alpha},A)x,y> \in L^1(\mathbb{R}). \qquad (۱۱)$$

آنگاه خانواده‌ی $\{T_{\alpha}(t)\}_{t\ge 0}$ از عملگرهای خطی و کراندار موجود است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(آ) به ازای هر $x\in X$، $T_{\alpha}(.)x$ روی $(0,\infty)$ پیوسته است.

(ب) به ازای هر $x\in D(A)$ و به ازای هر λ که $\mathrm{Re}\,\lambda > s_0^{\alpha}(A)$،

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}T_{\alpha}(t)x\,dt = \lambda^{\alpha-1}R(\lambda^{\alpha},A)x. \qquad (۱۲)$$

اثبات: فرض کنیم $a>s_0^{\alpha}(A)$ و $a>0$. قرار می‌دهیم $T_{\alpha}(0)=Id$. همچنین برای $x\in X$ و $t>0$ تعریف می‌کنیم:

$$T_{\alpha}(t)x \qquad (۱۳)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(a+is)t}(a+is)^{\alpha-1}R((a+is)^{\alpha},A)x\,ds$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^{\alpha},A)x\,d\lambda.$$

ابتدا نشان می‌دهیم که انتگرال فوق همگرا و مستقل از انتخاب a است. بنابر گزاره ۴-۱-۳ از [11] برای هر $t>0$ داریم

$$\frac{d}{ds}\left(e^{(a+is)t}(a+is)^{\alpha-1}R((a+is)^{\alpha},A)\right)$$
$$=ite^{(a+is)t}(a+is)^{\alpha-1}R((a+is)^{\alpha},A)$$
$$-i(1-\alpha)e^{(a+is)t}(a+is)^{\alpha-2}R((a+is)^{\alpha},A)$$
$$-i(1-\alpha)e^{(a+is)t}(a+is)^{\alpha-2}R((a+is)^{\alpha},A)$$

لذا برای هر $r>0$

$$\int_{-r}^{r} e^{(a+is)t}(a+is)^{\alpha-1}R((a+is)^{\alpha},A)x\,ds$$
$$=\frac{e^{(a+ir)t}}{it}(a+ir)^{\alpha-1}R((a+ir)^{\alpha},A)x$$
$$-\frac{e^{(a-ir)t}}{it}(a-ir)^{\alpha-1}R((a-ir)^{\alpha},A)x$$
$$+\frac{(1-\alpha)}{t}\int_{-r}^{r} e^{(a+is)t}(a+is)^{\alpha-2}R((a+is)^{\alpha},A)x\,ds$$
$$+\frac{\alpha}{t}\int_{-r}^{r} e^{(a+is)t}(a+is)^{2\alpha-2}R^2((a+is)^{\alpha},A)x\,ds.$$

از لم ۲- ۲ نتیجه می‌شود

$$\lim_{r\to\infty}\frac{e^{(a+ir)t}}{it}(a+ir)^{\alpha-۱}R((a+ir)^{\alpha},A)x=۰,$$

و

$$\lim_{r\to\infty}\frac{e^{(a-ir)t}}{it}(a-ir)^{\alpha-۱}R((a-ir)^{\alpha},A)x=۰.$$

حال فرض کنید $r>۰$. برای $x\in X$ داریم

$$\begin{aligned}&\left\|\int_{-r}^{r}e^{ist}(a+is)^{\alpha-2}R((a+is)^{\alpha},A)x\,ds\right\|\\&\le\sup_{y\in B^*}\int_{-r}^{r}\left|<e^{ist}(a+is)^{\alpha-2}R((a+is)^{\alpha},A)x,y>\right|ds\\&\le\sup_{y\in B^*}\left\|<(a+is)^{\alpha-2}R((a+is)^{\alpha},A)x,y>\right\|_1\\&\le M_1\|x\|,\end{aligned}$$

که در آن $M_۱$ یک ثابت مستقل از x و وابسته به a است که از اصل کرانداری یکنواخت به‌دست می آید. به‌طور مشابه ثابت $M_۲$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\begin{aligned}&\left\|\int_{-r}^{r}e^{ist}(a+is)^{۲\alpha-۲}R^{۲}((a+is)^{\alpha},A)x\,ds\right\|\\&\le M_۲\|x\|.\end{aligned}$$

لذا انتگرال تعریف شده در رابطه‌ی (۱۳) همگراست و برای هر $x\in X$ و $t>۰$ داریم

$$\begin{aligned}&T_{\alpha}(t)x \qquad (۱۴)\\&=\frac{(۱-\alpha)}{۲\pi t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{(a+is)t}(a+is)^{\alpha-۲}R((a+is)^{\alpha},A)x\,ds\\&+\frac{\alpha}{۲\pi t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{(a+is)t}(a+is)^{۲\alpha-۲}R^{۲}((a+is)^{\alpha},A)x\,ds.\end{aligned}$$

حال فرض کنید $a,b>s_0^{\alpha}(A)$. با استفاده از قضیه‌ی کوشی داریم

$$\begin{aligned}&\int_{-r}^{r}e^{(a+is)t}(a+is)^{\alpha-۱}R((a+is)^{\alpha},A)x\,ds\\&-\int_{-r}^{r}e^{(b+is)t}(b+is)^{\alpha-۱}R((b+is)^{\alpha},A)x\,ds\\&=\int_{a}^{b}e^{(\tau-ir)t}(\tau-ir)^{\alpha-۱}R((\tau-ir)^{\alpha},A)x\,d\tau\\&-\int_{a}^{b}e^{(\tau+ir)t}(\tau+ir)^{\alpha-۱}R((\tau+ir)^{\alpha},A)x\,d\tau.\end{aligned}$$

طبق لم ۲-۲ اگر $r\to\infty$، سمت راست تساوی فوق به صفر میل می‌کند. درنتیجه

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}e^{(a+is)t}(a+is)^{\alpha-۱}R((a+is)^{\alpha},A)x\,ds\\&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{(b+is)t}(b+is)^{\alpha-۱}R((b+is)^{\alpha},A)x\,ds,\end{aligned}$$

که نشان می‌دهد $T_{\alpha}(t)$ از انتخاب $a>s_0^{\alpha}(A)$ مستقل است. از طرفی با استفاده از (۱۴) برای هر $x\in X$ و $y\in B^*$

$$\begin{aligned}&\left|<T_{\alpha}(t)x,y>\right|\\&\le\frac{(1-\alpha)e^{at}}{2\pi t}\left\|<(a+is)^{\alpha-2}R((a+is)^{\alpha},A)x,y>\right\|_1\\&+\frac{\alpha e^{at}}{2\pi t}\left\|<(a+is)^{2\alpha-2}R^{2}((a+is)^{\alpha},A)x,y>\right\|_1.\end{aligned}$$

بنابراین برای هر $t>۰$

$$\left|<T_{\alpha}(t)x,y>\right|\le\frac{(M_۱(۱-\alpha)+M_۲\alpha)e^{at}}{۲\pi t}\|x\|\|y\|,$$

که نتیجه می‌دهد $\{T_{\alpha}(t)\}_{t\ge۰}$ یک خانواده از عملگرهای خطی و کراندار است بطوریکه

$$\|T_{\alpha}(t)\|\le\frac{Ce^{at}}{t}.$$

در اینجا C یک ثابت وابسته به a است. در ادامه نشان می‌دهیم این خانواده روی $(۰,\infty)$ پیوسته قوی است. برای این منظور، ابتدا عدد طبیعی m را طوری انتخاب می‌کنیم که $(m-۱)\alpha\ge۱$. فرض کنیم $x\in D(A^m)$. داریم

$$\begin{aligned}R((a+is)^{\alpha},A)x&=\frac{۱}{(a+is)^{\alpha}}x\\&+\frac{۱}{(a+is)^{\alpha}}R((a+is)^{\alpha},A)Ax\\&=\frac{۱}{(a+is)^{\alpha}}x+\frac{۱}{(a+is)^{۲\alpha}}Ax\\&+\frac{۱}{(a+is)^{۲\alpha}}R((a+is)^{\alpha},A)A^{۲}x\\&=\frac{۱}{(a+is)^{\alpha}}x+\frac{۱}{(a+is)^{۲\alpha}}Ax\end{aligned}$$

$$+\cdots+\frac{1}{(a+is)^{m\alpha}}A^{m-1}x$$
$$+\frac{1}{(a+is)^{m\alpha}}R((a+is)^{\alpha},A)A^{m}x. \tag{15}$$

بنابراین

$$(a+is)^{\alpha-1}R((a+is)^{\alpha},A)x-\frac{x}{(a+is)}$$
$$=\frac{Ax}{(a+is)^{\alpha+1}}+\cdots+\frac{A^{m-1}x}{(a+is)^{\alpha(m-1)+1}}$$
$$+\frac{(a+is)^{\alpha-1}}{(a+is)^{m\alpha}}R((a+is)^{\alpha},A)A^{m}x. \tag{16}$$

با بکارگیری رابطه اخیر و (۱۳) داریم

$$T_{\alpha}(t)x-T_{\alpha}(\tau)x$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{(a+is)t}-e^{(a+is)\tau})$$
$$(a+is)^{\alpha-1}R((a+is)^{\alpha},A)x\ \ ds$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(e^{(a+is)t}-e^{(a+is)\tau})x}{a+is}\ ds$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{(a+is)t}-e^{(a+is)\tau})$$
$$[\frac{Ax}{(a+is)^{\alpha+1}}+\cdots+\frac{A^{m-1}x}{(a+is)^{\alpha(m-1)+1}}$$
$$+\frac{(a+is)^{\alpha-1}}{(a+is)^{m\alpha}}R((a+is)^{\alpha},A)A^{m}x\,]\,ds.$$

حال از قضیه کوشی، لم ۲-۲ و قضیه‌ی تسلطی لبگ نتیجه می‌شود

$$\lim_{t\to\tau}T_{\alpha}(t)x=T_{\alpha}(\tau)x,\quad x\in D(A^{m}).$$

از اینکه $D(A^{m})$ در X چگال است نتیجه می‌گیریم حد بالا برای هر $x\in X$ نیز برقرار است و قسمت (آ) گزاره اثبات می‌شود.

برای اثبات (ب) فرض کنیم $\mathrm{Re}\lambda>a>s_{0}^{\alpha}(A)$ و $x\in D(A)$. با استفاده از روابط (۱۳)، (۱۵) و قضیه‌ی فوبینی داریم

$$\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda t}T_{\alpha}(t)x\ dt=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda t}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{(a+is)t}(a+is)^{\alpha-1}R((a+is)^{\alpha},A)x\ \ ds\ \ dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}e^{(a+is-\lambda)t}\ dt$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x+R((a+is)^{\alpha},A)Ax}{a+is}\ ds$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x+R((a+is)^{\alpha},A)Ax}{(a+is)(\lambda-a-is)}\ ds.$$

قرار دهید $C_{r}=\left\{a+re^{i\theta},\frac{-\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$ که در آن r به اندازه کافی بزرگ اختیار شده است. همچنین فرض کنید $C_{1}=\{a+is,-r\le s\le r\}$ و $C=C_{1}-C_{r}$.

با بکارگیری فرمول انتگرال کوشی داریم

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{x+R(z^{\alpha},A)Ax}{z(z-\lambda)}\ ds$$
$$=\frac{x+R(\lambda^{\alpha},A)Ax}{\lambda}.$$

از طرفی

$$\int_{C}\frac{x+R(z^{\alpha},A)Ax}{z(\lambda-z)}\ ds$$
$$=\int_{C_{1}}\frac{x+R(z^{\alpha},A)Ax}{z(\lambda-z)}\ ds$$
$$+\int_{C_{r}}\frac{x+R(z^{\alpha},A)Ax}{z(z-\lambda)}\ ds.$$

چون

$$\lim_{r\to\infty}\int_{C_{r}}\frac{x+R(z^{\alpha},A)Ax}{z(z-\lambda)}\ ds=0,$$

نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x+R((a+is)^{\alpha},A)Ax}{(a+is)(\lambda-a-is)}\ ds$$
$$=\frac{x+R(\lambda^{\alpha},A)Ax}{\lambda}$$
$$=\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^{\alpha},A)x,$$

که اثبات قسمت (ب) را کامل می‌کند.

در ادامه نتیجه اصلی این مقاله را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲- ۴: فرض کنیم $\{\lambda^{\alpha} : \mathrm{Re}\lambda > 0\} \subseteq \rho(A)$ و $d \geq 0$. اگر برای هر $a>0$، $x \in X$ و $y \in X^{*}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| <(a+is)^{2\alpha-2} R^{2}((a+is)^{\alpha},A)x,y> \right| ds \leq \frac{M}{a}(1+a^{-d})\|x\|\|y\|, \qquad (۱۷)$$

و

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| <(a+is)^{\alpha-2} R((a+is)^{\alpha},A)x,y> \right| ds \leq \frac{M'}{a}(1+a^{-d})\|x\|\|y\|, \qquad (۱۸)$$

آنگاه عملگر A مولد یک خانواده‌ی α–حلال چون $\{T_{\alpha}(t)\}_{t\geq 0}$ است و عدد ثابتی مانند k وجود دارد به‌طوری‌که

$$\|T_{\alpha}(t)\| \leq K(1+t^{d}), \quad t>0. \qquad (۱۹)$$

اثبات: ابتدا با استفاده از روابط (۱۷) و (۱۸) نشان می‌دهیم $s_{0}^{\alpha}(A) \leq 0$. برای هر $a>0$ و $x \in X$ داریم

$$\frac{d}{d\tau}((a+i\tau)^{\alpha-1} R((a+i\tau)^{\alpha},A)x) = -i(1-\alpha)(a+i\tau)^{\alpha-2} R((a+i\tau)^{\alpha},A)x - i\alpha(a+i\tau)^{2\alpha-2} R^{2}((a+i\tau)^{\alpha},A)x.$$

لذا برای $r,s \in \mathbb{R}$ و $y \in X^{*}$

$$\begin{aligned} &<(a+is)^{\alpha-1} R((a+is)^{\alpha},A)x,y> \qquad (۲۰)\\ &= <(a+ir)^{\alpha-1} R((a+ir)^{\alpha},A)x,y> \\ &+ i(a-1)\int_{r}^{s} <(a+i\tau)^{\alpha-2} R((a+i\tau)^{\alpha},A)x,y> d\tau \\ &- ia\int_{r}^{s} <(a+i\tau)^{2\alpha-2} R^{2}((a+i\tau)^{\alpha},A)x,y> d\tau. \end{aligned}$$

چون انتگرال‌های موجود در تساوی فوق همگرای مطلق هستند، عدد ثابتی مانند $\tilde{M}$ وابسته به a موجود است بطوریکه برای هر $s \in \mathbb{R}$.

$$<(a+is)^{\alpha-1} R((a+is)^{\alpha},A)x,y> \leq \tilde{M}\|x\|\|y\|.$$

با بکارگیری رابطه‌ی اخیر و استدلالی مشابه اثبات لم ۲-۲ می‌توان نشان داد ، اگر $|r| \to \infty$ آنگاه $<(a+ir)^{\alpha-1} R((a+ir)^{\alpha},A)x,y> \to 0$.
لذا

$$\begin{aligned} &\left| <(a+is)^{\alpha-1} R((a+is)^{\alpha},A)x,y> \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| <(a+is)^{\alpha-2} R((a+is)^{\alpha},A)x,y> \right| ds \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left| <(a+is)^{2\alpha-2} R^{2}((a+is)^{\alpha},A)x,y> \right| ds. \end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از روابط (۱۷) و (۱۸)

$$\left\|(a+is)^{\alpha-1} R((a+is)^{\alpha},A)\right\| \leq \frac{C}{a}(1+a^{-d})$$

که نتیجه می‌دهد $s_{0}^{\alpha}(A) \leq 0$. بنابر گزاره ۲-۳ خانواده‌ی $T_{\alpha}(t)$ از عملگرهای خطی و کراندار موجود است که روی $(0,\infty)$ پیوسته‌ی قوی است و برای هر $x \in D(A)$ در شرط (۱۲) صدق می‌کند. حال با استفاده از روابط (۱۷) و (۱۸) کران $T_{\alpha}(t)$ را محاسبه می‌کنیم. فرض کنیم $x \in X$، $y \in X^{*}$ و $t>0$. آنگاه

$$\begin{aligned} \left| <T_{\alpha}(t)x,y> \right| &\leq \frac{(1-\alpha)e^{at}}{2\pi t} \int_{-\infty}^{\infty} \left| <(a+is)^{\alpha-2} R((a+is)^{\alpha},A)x,y> \right| ds + \frac{\alpha e^{at}}{2\pi t} \int_{-\infty}^{\infty} \left| <(a+is)^{2\alpha-2} R^{2}((a+is)^{\alpha},A)x,y> \right| ds \\ &\leq \frac{(1-\alpha)M'e^{at}}{2\pi a t}(1+a^{-d})\|x\|\|y\| + \frac{\alpha M e^{at}}{2\pi a t}(1+a^{-d})\|x\|\|y\|. \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن $a := t^{-1}$، داریم

$$\|T_\alpha(t)\| \le \frac{(1-\alpha)M'e}{2\pi}(1+t^d) + \frac{\alpha Me}{2\pi}(1+t^d) = K(1+t^d). \qquad (۲۱)$$

در ادامه نشان می دهیم برای هر $x \in X$ نگاشت $T_\alpha(.)x$ در صفر از راست پیوسته است. برای این منظور فرض کنیم $(m-1)\alpha \ge 1$ و $x \in D(A^m)$. با استفاده از فرمول انتگرال کوشی و رابطه (۱۶) داریم

$$T_\alpha(t)x - x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(a+is)t} [(a+is)^{\alpha-1}R((a+is)^\alpha, A)x - \frac{x}{a+is}]\, ds.$$

همچنین از رابطه (۱۶) و قضیه کوشی برای r به اندازه‌ی کافی بزرگ نتیجه می‌شود

$$\int_{-r}^{r}[(a+is)^{\alpha-1}R((a+is)^\alpha, A)x - \frac{x}{a+is}]\, ds = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{ire^{i\theta}Ax}{(a+re^{i\theta})^{\alpha+1}} + \cdots + \frac{ire^{i\theta}A^{m-1}x}{(a+re^{i\theta})^{\alpha(m-1)+1}} + \frac{ire^{i\theta}}{(a+re^{i\theta})^{\alpha m}} (a+re^{i\theta})^{\alpha-1}R((a+re^{i\theta})^\alpha, A)A^m x\,]d\theta.$$

چون $(m-1)\alpha \ge 1$، اگر در رابطه اخیر $r \to \infty$ بدست می‌آوریم

$$\int_{-\infty}^{\infty}[(a+is)^{\alpha-1}R((a+is)^\alpha, A)x - \frac{x}{a+is}]\, ds = 0,$$

و در نتیجه

$$\lim_{t \to 0^+}(T_\alpha(t)x - x) = 0 \qquad (۲۲)$$

برای هر $x \in D(A^m)$. با توجه به چگال بودن $D(A^m)$ در X نتیجه می‌گیریم (۲۲) برای هر $x \in X$ برقراراست.

از طرفی با توجه به قسمت (ب) گزاره ۲-۳ به ازای هر $x \in D(A)$ و هر λ که $\operatorname{Re}\lambda > a$

$$\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^\alpha, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T_\alpha(t)x\, dt. \qquad (۲۳)$$

از اینکه $D(A)$ در X چگال است، $s_0^\alpha(A) \le 0$ و رابطه (۲۱) نتیجه می‌گیریم (۲۳) برای هر $x \in X$ برقرار است. حال قضیه‌ی ۱-۶ نشان می‌دهد $\{T_\alpha(t)\}_{t\ge 0}$ یک خانواده‌ی α-حلال با مولد A است که در شرط (۱۹) نیز صدق می‌کند.

مثال۲-۴: فرض کنید $X = \mathbb{C}^n$ و

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

به راحتی اثبات می‌شود که شرایط (۱۷) و (۱۸) از قضیه ۴-۲ با $d = (n-1)\alpha$ برقرار است. از طرفی با توجه به قضیه ۱-۷ خانواده حلال تولید شده توسط A بصورت

$$T_\alpha(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j t^{\alpha j}}{\Gamma(\alpha j + 1)}$$

است که رشد آن دقیقا با $t^{(n-1)\alpha}$ یکی است. بنابراین ثابت d در حکم قضیه ۲-۴ بهینه است.
در قضیه‌ی زیر نشان می دهیم عکس قضیه‌ی ۲-۴ در یک فضای هیلبرت برقرار است.

قضیه ۲-۵: فرض کنیم A مولد خانواده‌ی α-حلال $\{T_\alpha(t)\}_{t\ge 0}$ روی فضای هیلبرت H باشد که در رابطه‌ی (۱۹) صدق می‌کند. آنگاه روابط (۱۷) و (۱۸) با $d_1 = 2d$ برقرار است.

اثبات: با توجه به شرط (۱۹) برای هر $\omega > 0$ داریم

$$\|T_\alpha(t)\| \le K(1+t^d) \le Ke^{\omega t}(1+t^d e^{-\omega t}) \le Ke^{\omega t}(1+\frac{d^d e^{-d}}{\alpha^d}) = M_\omega e^{\omega t}.$$

لذا $A\in G^{\alpha}(M_{\omega},\omega)$ برای هر $\omega>0$. حال فرض کنیم $a>0$. قضیه‌ی ۱- ۶ برای هر $x\in H$ نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned}&(a+is)^{\alpha-1}R((a+is)^{\alpha},A)x\\&=\int_0^{\infty}e^{-(a+is)t}T_{\alpha}(t)x\quad dt\\&=(\mathcal{F}e^{-at}T_{\alpha}(t)x)(s).\end{aligned}$$

با بکارگیری قضیه‌ی ۱-۳ و رابطه‌ی (۱۹) داریم

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\left\|(a+is)^{\alpha-1}R((a+is)^{\alpha},A)x\right\|^2ds\\&=2\pi\int_0^{\infty}e^{-2at}\left\|T_{\alpha}(t)x\right\|^2dt\\&\le 2\pi K^2\int_0^{\infty}e^{-2at}(1+t^d)^2\left\|x\right\|^2dt\\&\le 4\pi K^2\int_0^{\infty}e^{-2at}(1+t^{2d})\left\|x\right\|^2dt\\&=4\pi K^2\left(\frac{1}{2a}+\frac{\Gamma(2d+1)}{(2a)^{2d+1}}\right)\left\|x\right\|^2\\&\le\frac{M}{a}\left(1+\frac{1}{a^{2d}}\right)\left\|x\right\|^2,\end{aligned}\tag{۲۴}$$

که در آن M یک ثابت وابسته به K و d می‌باشد. بطور مشابه با اثبات لم ۲-۳ در [۱۲] می‌توانیم نشان دهیم که اگر A مولد یک خانواده‌ی α- حلال چندجمله‌ای کراندار مانند $T_{\alpha}(t)$ باشد، آنگاه A' (الحاق A)، مولد خانواده‌ی α –حلال $T'_{\alpha}(t):=(T_{\alpha}(t))'$ است که با همان چندجمله‌ای موجود در (۱۹) کراندار می‌شود. لذا با تکرار روند قبل داریم

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\left\|(a-is)^{\alpha-1}R((a-is)^{\alpha},A')y\right\|^2ds\\&\le\frac{M}{a}\left(1+\frac{1}{a^{2d}}\right)\left\|y\right\|^2,\ y\in H.\end{aligned}\tag{۲۵}$$

حال از روابط (۲۱)، (۲۲)، نامساوی هولدر و نامساوی کوشی- شوارتز برای هر $x\in X$ و هر $y\in X^*$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\left|<(a+is)^{\alpha-2}R((a+is)^{\alpha},A)x,y>\right|ds\\&\le\int_{-\infty}^{\infty}\left|<(a+is)^{\alpha-1}R((a+is)^{\alpha},A)x,(a-is)^{-1}y>\right|ds\\&\le\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left\|(a+is)^{\alpha-1}R((a+is)^{\alpha},A)x\right\|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\\&\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left\|(a-is)^{-1}y\right\|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\\&\le\frac{M_1}{\sqrt{a}}\left(\frac{M}{a}\left(1+\frac{1}{a^{2d}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\left\|x\right\|\left\|y\right\|\\&\le\frac{M'}{a}\left(1+\frac{1}{a^{2d}}\right)\left\|x\right\|\left\|y\right\|.\end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\left|<(a+is)^{2\alpha-2}R^2((a+is)^{\alpha},A)x,y>\right|ds\\&\le\int_{-\infty}^{\infty}\left|<(a+is)^{\alpha-1}R((a+is)^{\alpha},A)x\right.\\&\left.,(a-is)^{\alpha-1}R((a-is)^{\alpha},A')y>\right|ds\\&\le\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left\|(a+is)^{\alpha-1}R((a+is)^{\alpha},A)x\right\|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\\&\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left\|(a-is)^{\alpha-1}R((a-is)^{\alpha},A')y\right\|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\\&\le\frac{M}{a}\left(1+\frac{1}{a^{2d}}\right)\left\|x\right\|\left\|y\right\|.\end{aligned}$$

لذا روابط (۱۸) و (۱۹) برقرارند و حکم ثابت می‌شود.

بحث و نتیجه‌گیری

برای اینکه یک عملگر بسته با دامنه چگال چون A مولد یک خانواده α –حلال نمایی کراندار باشد لازم است همه‌ی مرتبه‌های مشتق حلال (و در نتیجه تمام توان‌های حلال) این عملگر کراندار باشد، رابطه (۳) را ببینید. از طرفی این نتیجه فقط وجود کرانی بصورت یک تابع نمایی برای خانواده‌های α –حلال را نتیجه می‌دهد و رشد چند جمله‌ای این خانواده‌ها مورد بحث قرار نمی‌گیرد.

در این مطالعه، مساله کرانداری خانواده‌های α - حلال توسط یک چند جمله‌ای بصورت $k(1+t^d)$ بررسی شده است. در واقع با استفاده از یک شرط انتگرال‌پذیری مناسب که فقط روی توان‌های اول و دوم حلال یک عملگر بسته با دامنه چگال بیان می‌شود، خانواده‌ای از تبدیلات خطی و کراندار معرفی می‌کنیم که ثابت می‌شود یک خانواده α - حلال چند جمله‌ای کراندار است. بعلاوه نشان دادیم در یک فضای هیلبرت، اگر عملگر A مولد یک خانواده α -حلال چند جمله‌ای کراندار باشد، آنگاه در شرط انتگرال‌پذیری ذکر شده برای حلال مولد صدق می‌کند.

فهرست منابع

[1] Da Prato G., Iannelli M., "Linear abstract integro-differential equations of hyperbolic type in Hilbert spaces", Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 62 (1980) 191-206.

[2] Da Prato G., Iannelli M., "Linear integro-differential equations in Banach spaces", Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 62 (1980) 207-219.

[3] Pruss J., "Evolutionary integral equations and applications", Birkhäuser, Basel, Berlin, (1993).

[4] Bajlekova E., "Fractional evoluion equations in Banach spaces (Ph.D. thesis)", University press Facilities, Eindhoven University of Technology, 2001.

[5] Engel K., Nagel R., "One-parameter semigroups for linear evolution equations", Graduate Texts in Math. Springer Verlag, 194 (2000).

[6] Eisner T., "Polynomially bounded C_0-semigroups", Semigroup Forum, 70 (2005) 118-126.

[7] Eisner T., "Stability of operators and operator semigroups", Operator Theory, Advances and Applications, vol. 209. Birkhäuser Verlag, Basel (2010).

[8] Eisner T., Zwart H., "A note on polynomially growing C_0-semigroups", Semigroup Forum, 75 (2007) 438-445.

[9] Gomilko A.M., "On conditions for the generating operator of a uniformly bounded C_0-semigroup of operators", Functional Analysis and its Applications, 33 (1999) 294-296.

[10] Shi D.H., Feng D.X., "Characteristic conditions of the generation of C_0-semigroups in a Hilbert space", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 247 (2000) 356-376.

[11] Arendt W., Batty C.J.K., Hieber M. and Neubrander F., "Vector-Valued Laplace Transforms and Cauchy Problems", Monographs in Mathematics 96, Birkhauser, 2001.

[12] Liu R., Li M., "Characteristic conditions for the generation of α-times resolvent families on a Hilbert space", Journal of Mathematical Research and Exposition (English Edition), 3 (2011) 420-428.