دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی و یکم، مرداد و شهریور ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

بررسی جبرهای باناخ تصویری تقریبی

محمدحسین ستاری*

استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۸/۲۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۶/۳۱

چکیده

مفهوم جبرهای باناخ تصویری تقریبی توسط پورمحمود آقابابا [15]، آریستوف [۲]، و ژانگ [19] معرفی شده که هر یک از جنبه متفاوتی تقریب را مدنظر قرار داده‌اند. در این مقاله تعریف ارائه شده توسط پورمحمود آقابابا را مبنا قرار می‌دهیم که ضمن اینکه عمومی تر بوده و شرایط محدود کننده به مراتب کمتری دارد، دارای مثال‌های متنوع و جالب از رده‌های گوناگون جبرهای باناخ نیز می‌باشد. چندین ویژگی موروثی از این مفهوم را مورد بررسی قرار می‌دهیم، در حقیقت نشان می‌دهیم که تصویری تقریبی بودن دوگان دوم جبر باناخ A تحت ضرب آرنز، تصویری تقریبی بودن خود A را ایجاب می‌کند. در ادامه تصویری تقریبی بودن را روی جبرهای باناخ ادغامی که یک تعمیم مبتکرانه از جمع مستقیم جبرهای باناخ است و شامل یکدار شده، ضرب لائو، ضرب نیم مستقیم و توسیع مدولی جبرهای باناخ می‌شود، مطالعه می‌کنیم. ثابت می‌کنیم جمع‌وند اول در یک جبر باناخ ادغامی تصویری تقریبی، تصویری تقریبی است در صورتیکه برای دست یافتن به نتیجه مشابه روی جمع‌وند دوم مفروضات بیشتری نیاز خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: ضرب آرنز، دوگان دوم جبر باناخ، جبر های باناخ ادغامی، عملگر قطری.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: sattari@azaruniv.ac.ir

۱- مقدمه و مطالب مورد نیاز

ابتدا به بیان مقدماتی از مفهوم جبرهای باناخ تصویری تقریبی پرداخته سپس آن‌را روی دوگان دوم مطالعه می‌کنیم.

فرض کنید A یک جبر باناخ باشد عملگر قطری A بصورت $\Delta_A : A \hat{\otimes} A \to A,\ \Delta(a \otimes b) = ab$ تعریف می‌شود. هرگاه جبر مورد بحث معین باشد می‌توان اندیس را حذف و از Δ بجای Δ_A استفاده کرد. هرگاه Δ دارای وارون راست پیوسته باشد که A- مدول همومرفیسم نیز است آنگاه A تصویری خواهد بود. در مرجع [۱۵] حالت تقریبی این مفهوم بصورت ذیل تعریف شده است که از برخی مزیت‌ها نسبت به تعاریف مشابه که در مراجع [۲] و [۱۹] آمده، برخوردار است.

تعریف۱-۱: A را تصویری تقریبی نامیم هرگاه تور (ρ_α) از عملگر های خطی کراندار از A بتوی $A \hat{\otimes} A$ چنان موجود باشد که در شرایط زیر صدق کند:

الف) برای هر $a \in A$،

$$\Delta \circ \rho_\alpha(a) \to a\,.$$

ب) برای هر $a,b \in A$،

$$a.\rho_\alpha(b) - \rho_\alpha(ab) \to 0\,.$$

ج) برای هر $a,b \in A$،

$$\rho_\alpha(a)b - \rho_\alpha(ab) \to 0\,.$$

اگر تور (ρ_α) کراندار باشد A بطور کراندار تصویری تقریبی نامیده می‌شود. ملاحظه می‌شود که اگر ρ_α ها برابر باشند آنگاه A تصویری خواهد بود. می‌دانیم که دوگان دوم یک جبر باناخ با ضرب آرنز اول و دوم یک جبر باناخ است که خود A را به عنوان زیر جبر جبر بسته شامل است. در ادامه منظور از جبر باناخ A^{**}، همان دوگان دوم جبر باناخ A با ضرب آرنز اول است. لازم به ذکر است که این ضرب برای اولین بار توسط آرنز در [۱] معرفی شده است.

نخست به یادآوری ضرب آرنز می‌پردازیم. فرض کنید $a, x \in A$، $f \in A^*$ و $\Phi, \Psi \in A^{**}$ در اینصورت ضرب آرنز (اول) Φ و Ψ به طریق زیر تعریف می‌شود:

$$f.a(x) = f(ax),$$
$$\Psi(f)(a) = \Psi(f.a),$$
$$\Phi\Box\Psi(f) = \Phi(\Psi.f).$$

با یک بررسی مستقیم مشخص می‌شود که برای هر Ψ از A^{**} نگاشت $A^{**} \to A^{**},\ \Phi \to \Phi\Box\Psi$; w^*-w^* پیوسته است. در حالی که نگاشت $A^{**} \to A^{**},\ \Phi \to \Psi\Box\Phi$ لزوما w^*-w^* پیوسته نیست مگر اینکه $\Psi \in A \subset A^{**}$. برای اطلاعات تکمیلی در خصوص خواص این ضرب می توان از [۶] بهره برد.

همواره بررسی ارتباط خواص جبرهای A و A^{**} از موضاعات جالب در زمینه جبر های باناخ بوده است. به عنوان مثال A میانگین پذیر است هرگاه A^{**} میانگین‌پذیر باشد[۱۰]. در حالی که برای میانگین‌پذیری ضعیف موضوع کمی متفاوت است و وجود مفروضات اضافی ضروری است، در [۸] ثابت شده که اگر A ایده آل چپ A^{**} باشد آنگاه میانگین‌پذیری ضعیف A از میانگین‌پذیری ضعیف A^{**} بدست می‌آید. در خصوص تصویری بودن شرایط بیشتری مورد نیاز است، هرگاه A ایده‌آل A^{**} با واحد تقریبی کراندار باشد آنگاه تصویری بودن A^{**}، تصویری بودن A را ایجاب می‌کند [۱۲].

۲- بررسی تصویری تقریبی بودن دوگان دوم

خواص موروثی مفاهیم تصویری و یکدستی جبرهای باناخ از دوگان دوم به خود جبر در [۱۲] بررسی شده که البته با برخی محدودیت‌ها نیز همراه بوده است. در حقیقت در حالتی که A دارای واحد

تقریبی چپ کراندار و ایده الی در A^{**} است ثابت شده تصویری بودن A^{**} تصویری بودن A را ایجاب می‌کند.

هر چند A- مدول‌های باناخ $A^{**}\hat{\otimes}A^{**}$ و $(A\hat{\otimes}A)^{**}$ ایزومرف نیستند ولی بکار بردن ارتباط بین آنها که در [۸] به آن اشاره شده، راه گشا خواهد بود.

لم۲-۱: هرگاه A یک جبر باناخ باشد آنگاه عملگر خطی پیوسته $\Psi: A^{**}\hat{\otimes}A^{**}\to (A\hat{\otimes}A)^{**}$ چنان موجود است که برای هر $a,b,x\in A$ و هر $m\in A^{**}\hat{\otimes}A^{**}$ روابط زیر برقرارند.

أ) $\Psi(a\otimes b)=a\otimes b$.

ب) $\Psi(m).x=\Psi(m.x)$.

ت) $x.\Psi(m)=\Psi(x.m)$.

ث) $(\Delta_A)^{**}\Psi(m)=\Delta_{A^{**}}(m)$.

قضیه ۲-۲: هرگاه دوگان دوم جبر باناخ A، تصویری تقریبی باشد آنگاه A نیز چنین است.

برهان: فرض کنید تور (ρ_α) همان توری باشد که از تصویری تقریبی بودن A^{**} بدست می‌آید. همچنین $\iota: A\to A^{**}$، نگاشت شمول و $\Psi: A^{**}\hat{\otimes}A^{**}\to (A\hat{\otimes}A)^{**}$، نگاشت معین شده در لم۱،۲. باشد. با درنظر گرفتن دنباله زیر

$$A\xrightarrow{\iota}A^{**}\xrightarrow{\rho_\alpha}A^{**}\hat{\otimes}A^{**}\xrightarrow{\Psi}(A\hat{\otimes}A)^{**}\xrightarrow{(\Delta_A)^{**}}A^{**}$$

قرار می‌دهیم $\theta_\alpha=\Psi\circ\rho_\alpha\circ\iota: A\to (A\hat{\otimes}A)^{**}$.
خواصی از Ψ که در لم۲-۱. آمده ایجاب می‌کند که برای هر $a,b\in A$،

$$a.\theta_\alpha(b)-\theta_\alpha(ab)\to 0$$

$$\theta_\alpha(a)b-\theta_\alpha(ab)\to 0$$

$$\Delta^{**}\circ\theta_\alpha(a)\to a.$$

همانند لم۲-۳. در [۱۵] با بکار بردن اصل بازتابی موضعی (به عنوان مثال قضیه ۳,۳.C. از [۲]) برای هر α، تور (θ_α^λ) از عملگرهای رتبه متناهی کراندار از A بتوی $A\hat{\otimes}A$ چنان موجود است بطوریکه با توپولوژی w^*_عملگری روی $B(A,(A\hat{\otimes}A)^{**})$ داریم: $\theta_\alpha^\lambda\to\theta_\alpha$، بدین معنی که برای هر $a\in A$، $\theta_\alpha^\lambda(a)\xrightarrow{w^*}\theta_\alpha(a)$، که در آن منظور از w^* همان توپولوژی w^* روی $(A\hat{\otimes}A)^{**}$ است.

برای هر α، $n\in\mathbb{N}$، $F\subset A$ و $G\subset (A\hat{\otimes}A)^*$ که F و G متناهی‌اند می‌توان $\lambda_\alpha=\lambda_{\alpha,n,F,G}$ را چنان یافت که برای هر $\lambda\ge\lambda_\alpha$،

$$|<\theta_\alpha^\lambda(a)-\theta_\alpha(a),\phi>|<\frac{1}{n}\qquad (a\in F,\phi\in G).$$

در ادامه برهان نشان می‌دهیم که تور $(\theta_\alpha^{\lambda_\alpha})\subset B(A,(A\hat{\otimes}A))$، در شرایط معین شده در تعریف۱،۱. برای تصویری تقریبی بودن A صدق می‌کند. نخست ادعا می‌کنیم که برای $a,b\in A$ داریم:

$$\theta_\alpha^{\lambda_\alpha}(ab)-a.\theta_\alpha^{\lambda_\alpha}(b)\xrightarrow{w}0,$$

که در آن w به توپولوژی ضعیف روی $(A\hat{\otimes}A)$ دلالت می‌کند. عدد مثبت ε را در نظر بگیرید. اگر $n_0\in\mathbb{N}$ و $\phi\in(A\hat{\otimes}A)^*$ چنان باشد که $\frac{3}{n_0}<\varepsilon$، آنگاه می‌توان α_0ای یافت که برای هر $\alpha\ge\alpha_0$،

$$|<\theta_\alpha^\lambda(ab)-a.\theta_\alpha(b),\phi>|<\frac{1}{n_0}.$$

برای هر $\alpha\ge\alpha_0$، $n\ge n_0$، $F\subset A$ و $G\subset(A\hat{\otimes}A)^*$ که F و G متناهی‌اند و $\{a,b,ab\}\subset F,\{\phi,\phi.a\}\subset G$، خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&|<\theta_\alpha^{\lambda_\alpha}(ab)-a.\theta_\alpha^{\lambda_\alpha}(b), \phi>| \\
&\quad \le |<\theta_\alpha^{\lambda_\alpha}(ab)-\theta_\alpha(ab), \phi>| \\
&\quad + |<\theta_\alpha(ab)-a.\theta_\alpha(b), \phi>| \\
&\quad + |<a.\theta_\alpha(b)-a.\theta_\alpha^{\lambda_\alpha}(b), \phi>| \\
&\quad \le \frac{1}{n}+\frac{1}{n_0}+\frac{1}{n} \\
&\quad \le \frac{1}{n_0}+\frac{1}{n_0}+\frac{1}{n_0} \\
&\quad < \varepsilon
\end{aligned}
$$

لازم بذکر است که

$$<a.\theta_\alpha(b)-a.\theta_\alpha^{\lambda_\alpha}(b), \phi>=<\theta_\alpha(ab)-\theta_\alpha^{\lambda_\alpha}(b), \phi a>.$$

بنابراین نتیجه می‌شود همانطوریکه ادعا کرده بودیم:
$$.w-\lim_\alpha \theta_\alpha^{\lambda_\alpha}(ab)-a.\theta_\alpha^{\lambda_\alpha}(b)=0 \qquad (a,b\in A)$$

با یک بحث استاندارد، که به‌عنوان مثال می‌توان آنرا در لم۲-۳ از [۱۵]، یافت نتیجه می‌شود حد ظاهر شده در بالا به همگرایی در نرم تبدیل می‌گردد. بطور مشابه نیز ثابت می‌شود برای هر $a,b\in A$:

$$
\begin{aligned}
\theta_\alpha^{\lambda_\alpha}(ab)-a.\theta_\alpha^{\lambda_\alpha}(b) &\longrightarrow 0 \\
\Delta\circ\theta_\alpha^{\lambda_\alpha}(a) &\longrightarrow a
\end{aligned}.
$$

مطابق تعریف A تصویری تقریبی است.

مثال ۲-۳: همانند دیگر مفاهیم کوهومولوژیک مانند میانگین‌پذیری، میانگین‌پذیری تقریبی، تصویری بودن و یا یکدستی، نمی‌توان انتظار داشت که عکس قضیه ۲٫۲ برقرار باشد. در حقیقت اگر $A=l^1(G)$ اختیار کنیم که در آن G یک گروه گسسته میانگین‌پذیر نامتناهی است آنگاه A میانگین‌پذیر و طبق نتیجه ۷۰۳ از [۱۵]، تصویری تقریبی است در حالی که A^{**} تصویری تقریبی نیست زیرا در غیر اینصورت با توجه به اینکه A^{**} نیز یکدار است بار دیگر از نتیجه ۷۰۳ از [۱۵]، A^{**} میانگین‌پذیر تقریبی خواهد بود که با عنایت به نامتناهی بودن G، طبق قضیه ۳٫۳ از [۷] به یک تناقض منجر می‌شود.

جبرباناخ ارائه شده در مثال بالا آرنز منظم نبود. حال این سوال مطرح می‌شود که آیا با افزودن برخی شرایط اضافی مانند آرنز منظمی و یا ایده‌آل بودن A در A^{**} می‌توان به عکس قضیه ۲-۲ دست یافت. مثال بعدی نشان می‌دهد که حتی وجود چنین شرایطی نیز عکس قضیه ۲-۲ را محقق نخواهد کرد.

مثال ۲-۴: فضای هیلبرت $H=l^2$ را در نظر بگیرید. مطابق معمول هرگاه $K(H)$ فضای عملگرهای فشرده روی H باشد، طبق نتیجه ارائه شده در ۱۳٫۷٫۱ از [۱۴]، $K(H)$ آرنز منظم و ایده‌آل بسته در $K(H)^{**}\cong B(H)$ است. از قضیه ۹٫۱٫۳ در [۱۸]، میانگین‌پذیری و بنابر نتیجه ۷٫۳ از [۱۵]، بطور کراندار تصویری تقریبی بودن $K(H)$ حاصل می‌شود. این در حالی است که قضیه ۱٫۱ (به همراه توضیحات آمده بعد از تعریف ۱-۲) در [۱۳] و نتیجه ۷٫۳ از [۱۵] نشان می‌دهد که $K(H)^{**}\cong B(H)$ تصویری تقریبی نیست.

۳- جبرهای باناخ ادغامی

هرگاه A و B جبرهای باناخ و I ایده الی بسته از B باشد و $\theta:A\to B$ هومورفسیم پیوسته‌ای باشد که $\|\theta\|\le 1$ آنگاه با تعریف ضرب بصورت زیر روی جمع l^1–مستقیم A و I می‌توان به جبر باناخ $A\rhd\!\!\lhd^\theta I$ رسید؛

$$(a,b).(a',b')=(aa',\theta(a)b'+b\theta(a')+bb')$$

که در آن $a,a'\in A$, $b,b'\in I$ اختیار شده اند. $A\rhd\!\!\lhd^\theta I$ ادغام A با B در راستاری I نامیده می‌شود. این مفهوم که ابتدا در زمینه مباحث صرفا جبری مطرح شده بود به عنوان مثال [۵]، در مرجع

[۱۷] برای جبرهای باناخ تعریف و مورد مطالعه قرار گرفت. برتری ضربی که در روش ادغامی تعریف می‌شود این است که ضرب‌هایی که قبلا روی جمع مستقیم جبرهای باناخ تعریف می‌شد را پوشش داده و همه را در یک قالب قرار می‌دهد، از آن جمله می‌توان به حاصلضرب نیم مستقیم و ضرب لائو اشاره کرد. به‌عنوان مثال با اختیار $\theta = 0$ جبر باناخ $A \underset{l^1}{\oplus} I$ به عنوان جمع مستقیم عادی با جمع و ضرب مؤلفه‌ای بدست می‌آید و با اختیار $\theta : \mathbb{C} \to A^{\#},\ \theta(\alpha) = (\alpha, 0)$، یکدار شده A یعنی $A^{\#}$ به‌عنوان جبر باناخ ادغامی بدست می‌آید. همچنین هرگاه ϕ تابعک خطی ضربی ناصفر روی A باشد، با اختیار θ بصورت $\theta : A \to B^{\#},\ \theta(a) = (\phi(a), 0)$، حاصلضرب $\phi-$لائوی A و B یعنی $A \oplus_{\phi} B$ به‌عنوان جبر باناخ ادغامی ظاهر خواهد شد.

در [۱۷] خواص مهمی از $A \bowtie^{\theta} I$ برحسب A و I بررسی شده است که در برخی موارد نتیجه کلی حاصل شده مانند وجود واحد تقریبی، محاسبه مرکز توپولوژیکی و بررسی آرنز منظمی و یا میانگین پذیری، در حالی که برای میانگین‌پذیری ضعیف نتیجه کامل حاصل نشده است. به عنوان نمونه بر ای میانگین پذیری، $A \bowtie^{\theta} I$ میانگین‌پذیر است اگروتنها اگر A و I میانگین‌پذیر باشند.

هر چند در حالت بسیار خاص ادغام، برای جمع l^1 ـمستقیم دو جبر باناخ با یک استدلال مستقیم به آسانی نتیجه می‌شود که $A \underset{l^1}{\oplus} I$ تصویری است اگر وتنها اگر A و I تصویری باشند و همانطوری که در [۱۶] نیز آمده است این موضوع برای مفهوم تصویری تقریبی نیز صادق است ولی در حالت کلی نتیجه‌ای برای ادغام برقرار نیست. البته در بررسی موضوع مشخص خواهد شد که A و I جایگاه یکسانی نداشته و نتایج برای این‌دو متفاوت خواهد بود.

قضیه ۳-۱: هرگاه $A \bowtie^{\theta} I$ تصویری تقریبی باشد آنگاه A نیز چنین است.

برهان: فرض کنید $P_A : A \bowtie^{\theta} I \to A$، $P_A(a,b) = a$ نگاشت تصویر و $\iota_A : A \to A \bowtie^{\theta} I$، $\iota_A(a) = (a, 0)$ نگاشت شمول باشد. هرگاه تور (ρ_α) توری باشد که از تصویری تقریبی بودن $A \bowtie^{\theta} I$ بدست می‌آید. با توجه به دیاگرام

$$\begin{array}{ccc} A \bowtie^{\theta} I & \xrightarrow{\rho_\alpha} & (A \bowtie^{\theta} I) \hat{\otimes} (A \bowtie^{\theta} I) \\ \uparrow & & \downarrow \\ A & & A \hat{\otimes} A \end{array}$$

برای هر α قرار می‌دهیم:

$$\theta_\alpha = (P_A \otimes P_A) \circ \rho_\alpha \circ \iota_A : A \to A \hat{\otimes} A .$$

در ادامه برای هر $a,b \in A$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \theta_\alpha(ab) - a.\theta_\alpha(b) &= (P_A \otimes P_A)(\rho_\alpha((a,0).(b,0))) \\ &\quad - a.(P_A \otimes P_A)(\rho_\alpha(b,0)) \\ &= (P_A \otimes P_A)(\rho_\alpha((a,0).(b,0))) \\ &\quad - (P_A \otimes P_A)((a,0)\rho_\alpha(b,0)) \\ &= (P_A \otimes P_A)(\rho_\alpha((a,0).(b,0)) \\ &\quad - (a,0)\rho_\alpha(b,0)) \to 0. \end{aligned}$$

لازم به ذکر است که طبق فرض

$$\rho_\alpha((a,0).(b,0)) - (a,0)\rho_\alpha(b,0) \to 0,$$

یعنی $\theta_\alpha(ab) - a.\theta_\alpha(b) \to 0$. رابطه $\theta_\alpha(ab) - a.\theta_\alpha(b) \to 0$ نیز بطور مشابه ثابت می‌شود. با محاسبه ساده و مستقیم نتیجه می‌شود که

$$\Delta_A(P_A \otimes P_A) = P_A \circ \Delta_{A \bowtie^{\theta} I}$$

حال با بکار گیری رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\Delta_A \circ \theta_\alpha(a) &= \Delta_A((P_A \otimes P_A)(\rho_\alpha(a,0)))\\ &= P_A(\underbrace{\Delta_{A \rhd\lhd^\theta I}(\rho_\alpha(a,0))}_{\to(a,0)})\\ &= a\end{aligned}$$

بنابراین طبق تعریف A تصویری تقریبی است. با توجه به اینکه ρ_αهای برابر در قضیه قبل به θ_α های یکسانی ختم می‌شود نتیجه زیر بدست می‌آید.

نتیجه ۳-۲: هرگاه $A \rhd\lhd^\theta I$ تصویری باشد آنگاه A نیز چنین است.
با برسی ماهیت θ_α در قضیه قبل مشخص می‌شود که هر کران برای ρ_αها یک کران برای θ_α نیز است بنابراین:

نتیجه ۳-۳: هرگاه $A \rhd\lhd^\theta I$ بطور کراندار تصویری تقریبی باشد آنگاه A نیز چنین است.
در ادامه مشاهده خواهد شد که موضوع برای I کاملا متفاوت است و در حقیقت حکم قضیه قبل برای I برقرار نیست.

مثال ۳-۴: فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{C} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{C} \\ 0 & \mathbb{C} \end{bmatrix}$$
$$I = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{C} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و $\theta : A \to B$ نگاشت شمول باشد. در کمال تعجب ولی به سادگی نتیجه می‌شود که نگاشت

$$A \rhd\lhd^\theta I \to B$$
$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \to \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

جبرهای باناخ B و $A \rhd\lhd^\theta I$ را ایزومرف می‌کند. باتوجه به اینکه $I^2 = 0$، I نمی‌تواند تصویری و یا حتی تصویری تقریبی باشد در حالیکه همانطوری که در [۱۹] اشاره شده، تصویری بودن B توسط هلمسکی بدست آمده است.
هرچند در مثال قبل ملاحظه شد که با وجود تصویری تقریبی بودن $A \rhd\lhd^\theta I$ ممکن است I چنین نباشد ولی با بررسی برهان قضیه ۱,۳ به این نکته پی می بریم که عامل اصلی در تغییر نتیجه برای جایگزینی A با I، این است که برخلاف نگاشت P_A، نگاشت متناظر آن یعنی تصویر روی I، $P_I : A \rhd\lhd^\theta I \to I$، $P_I(a,x) = x$، هومومرفیسم جبری نیست. برای برطرف کردن این مشکل باید به دنبال هومومرفیسم جبری دیگری از $A \rhd\lhd^\theta I$ بروی I باشیم که تحت ایزومرفیسم $\{0\} \rhd\lhd^\theta I \cong I$، روی I، همانی باشد. با توجه به مثال ۴,۳ همواره چنین هومومرفیسمی موجود نیست اما با افزوده برخی مفروضات می‌توان نتیجه مثبتی حاصل نمود.

قضیه ۳-۵: هرگاه I یکدار و $A \rhd\lhd^\theta I$ تصویری تقریبی باشد آنگاه I نیز چنین است.
برهان: فرض کنید نگاشت $P_\theta : A \rhd\lhd^\theta I \to I$ بصورت $P_\theta(a,x) = \theta(a)e + x$ تعریف شود که در آن $e \in I$ عضو واحد است. به وضوح P_θ یه هومومرفیسم جبری است که روی I همانی است. حال با استفاده از نمادهای قضیه ۱,۳ و در نظر گرفتن نمودار

$$\begin{array}{ccc} A \rhd\lhd^\theta I & \xrightarrow{\rho_\alpha} & (A \rhd\lhd^\theta I)\hat{\otimes}(A \rhd\lhd^\theta I) \\ \uparrow & & \downarrow\ P_\theta \otimes P_\theta \\ A & & A \hat{\otimes} A \end{array}$$

و تعریف تور (θ_α) متشکل از جملات زیر

$$\theta_\alpha = (P_\theta \otimes P_\theta) \circ \rho_\alpha \circ \iota_A : I \to I \hat{\otimes} I$$

نتیجه مطلوب همانند برهان قضیه ۱,۳حاصل می‌شود.

نتیجه ۳-۶: فرض کنید I یکدار باشد. اگر $A \triangleright\triangleleft^{\theta} I$ بطور کراندار تصویری تقریبی باشد آنگاه I نیز چنین است.

نوبت به بررسی عکس قضیه۱,۳ در حالت تصویری تقریبی بودن I می‌رسد. هرچند که برای حالت خاص جمع مستقیم $A \underset{l^1}{\oplus} I$ از ضرب ادغامی جواب مثبت است ولی مثال زیر نشان می‌دهد که در حالت کلی نمی‌توان از تصویری تقریبی بودن I و A به خاصیت مشابه برای $A \triangleright\triangleleft^{\theta} I$ رسید.

مثال ۳-۷: جبر باناخ $I = l^1$ را با ضرب نقطه وار در نظر بگیرید. همانطوری که در فصل چهارم [۴] آمده میانگین‌پذیر تقریبی نیست، پس طبق نتیجه ۸,۳ از [۱۵]، $I^{\#}$ تصویری تقریبی نیست. این در حالی است که خود I نه تنها تصویری تقریبی بلکه تصویری نیز است. بدین ترتیب با جمع‌بندی به این نتیجه می‌رسیم که با وجود تصویری تقریبی بودن I و $\mathbb{C}$، جبرباناخ حاصل از ادغام آنها $I^{\#} = \mathbb{C} \triangleright\triangleleft^{\theta} I$ تصویری تقریبی نیست.

قدردانی: نویسنده این مقاله از داوران محترم برای مطالعه دقیق و ارائه پیشنهادات سازنده سپاسگزاری می‌کند.

فهرست منابع

[1] R. Arens, The adjoint of a bilinear operation, Proc. American Math. Soc. 2 (1951), 839-848.

[2] O. Yu. Aristov, On approximation of flat Banach modules by free modules, Sbornik. Math. 196(11) (2005), 1553-1583.

[3] G. Dales, Banach Algebra and Automatic Continuity, Oxford University Press. (2001).

[4] H. G. Dales, R. J. Loy and Y. Zhang, Approximate amenability for Banach sequence algebras, Studia Math. 177 (2006), 81–96.

[5] M. D'Anna and M. Fontana, An amalgamated duplication of a ring along an ideal: the basic properties, J. Algebra Appl. 6(3) (2007), 443-459.

[6] T. Duncan and S. A. R. Hosseiniun, The second dual of a Banach algebra, Proc. Royal Soc. Edinburgh, Sect. A, 84 (1979), 309-325.

[7] F. Ghahramani, R. Loy, Generalized notions of amenability, J. Funct. Anal. 208 (2004) 229–260.

[8] F. Ghahramani, R. Loy and G. Willis, Amenability and weak amenability of second conjugate Banach algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (5), 1489-1497.

[9] F. Ghahramani and Y. Zhang, Pseudo-amenable and pseudo-contractible banach algebras, Math Proc Cambridge Philos 142 (2007), 111-123.

[10] F. Gourdeau, Amenability of Banach algebras, Ph.D. thesis, University of Cambridge, 1989.

[11] R. J. Loy and G. A. Willis, The approximation property and nilpotent ideals in amenable Banach algebras, Bull. Austral. Math. Soc. 49 (1994), 341-346.

[12] M. S. Moslehian and A. Niknam, Biflatness and biprojectivity of second dual of Banach algebras, Southeast Asian Bull. Math. 27(1) (2003), 129-133.

[13] N. Ozawa, A note on non-amenability of $B(l^p)$ for $p=1,2.$, Internat. J. Math. 15 (2004), 557–565.

[14] T. W. Palmer, Banach Algebras and the General Theory of $*$-Algebras, I. Cambridge University Press, 1994.

[15] H. Pourmahmood-Aghababa, Approxi-mately biprojective Banach algebras and nilpotent ideals, Bull. Aust. Math. Soc. 87 (2013), 158-173.

[16] H. Pourmahmood-Aghababa and M. H. Sattari, Approximate biprojectivity and biflatness of some algebras over certain semigroups, J. Iran. Math. Soc.1(2) (2020), 145-155.

[17] H. Pourmahmood-Aghababa, and N. Shirmohammadi, On amalgamated Banach algebras, Period. Math. Hung. 75(1) (2017), 1-13.

[18] V. Runde, Lectures on Amenability, in: Lect. Notes in Mathematics, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2002.

[19] Y. Zhang, Nilpotent ideals in a class of Banach algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 127(11) (1999), 3237-3242.