دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی و یکم، مرداد و شهریور ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

یک مدل رتبه‌بندی جدید برای مسائل تصمیم‌گیری گروهی چندشاخصه با داده‌های فازی شهودی

زینب اسلامی‌نسب[1]، علی حمزه‌ای[2*]

[1و2] گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد کرمان، کرمان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۴/۱۹   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۰۹/۳۰

چکیده

در جهان امروز پیچیدگی ذاتی بسیاری از محیط‌های تصمیم‌گیری، ضرورت استفاده از روش‌های تصمیم‌گیری را بیش از پیش مشخص می‌کند. از طرفی سازمان‌های مدرن امروزی چنان وسیع و پیچیده شده‌اند که یک نفر از عهده مدیریت آن‌ها بر نمی‌آید. لذا موضوع تصمیم‌گیری گروهی چندشاخصه به عنوان یک مسأله سازمانی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در مدل‌های تصمیم‌گیری گروهی چندشاخصه با توجه به اینکه ماتریس تصمیم دارای شاخص‌های مختلفی می‌باشد، دانستن ضریب اهمیت یا وزن هر یک از شاخص‌ها در تصمیم‌گیری ضروری است. به‌طوریکه وزن هر شاخص اهمیت نسبی آن را نسبت به شاخص‌های دیگر بیان می‌کند و انتخاب آگاهانه و صحیح وزن‌ها کمک بزرگی در جهت رسیدن به هدف مورد نظر است. هدف از ارائه این مقاله، معرفی یک مدل برنامه‌ریزی خطی جهت تعیین وزن هر یک از شاخص‌ها در مسائل تصمیم‌گیری گروهی چندشاخصه با داده‌های فازی شهودی می‌باشد. لذا از خطای احتمالی تصمیم‌گیرندگان در تعیین وزن شاخص‌ها جلوگیری به‌عمل می‌آید. در نهایت با استفاده از وزن‌های به‌دست آمده، یک روش جدید جهت رتبه‌بندی گزینه‌ها براساس روش تسلط تقریبی (الکتره ۳) معرفی شده است و یک مثال کاربردی عددی برای نشان دادن جزئیات روش پیشنهادی در نظر گرفته شده است.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی خطی، وزن شاخص‌ها، رتبه‌بندی، عدد فازی شهودی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: Hamzehee_ali@yahoo.com (a_hamzehee@iauk.ac.ir)

۱- مقدمه

پیش‌بینی، ارزیابی و مقایسه نتایج راه حل‌های موجود و انتخاب قطعی یک راه حل برای رسیدن به هدف مطلوب، تصمیم‌گیری نامیده می‌شود. در جهان امروز پیچیدگی ذاتی بسیاری از محیط‌های تصمیم‌گیری، ضرورت استفاده از روش تصمیم‌گیری را بیش از پیش مشخص می‌کند. در بسیاری از موارد نتیجه‌گیری‌ها وقتی مطلوب و مورد رضایت تصمیم‌گیرنده است که تصمیم‌گیری براساس چندین معیار[۲] بررسی و تجزیه و تحلیل شده باشد. برای مثال در انتخاب شغل معیارهایی مانند درآمد ماهانه، کاهش ضایعات، افزایش رضایت کارکنان و ... مدنظر است. در حالت کلی در تعیین گزینه‌های مختلف منظور از معیار، عواملی است که تصمیم گیرنده به منظور افزایش مطلوبیت و رضایت خود مد نظر قرار می‌دهد. معیار در تصمیم‌گیری ممکن است بصورت شاخص[۳] یا هدف[۴] ارائه گردد. در مسائل تصمیم‌گیری چند معیاره چنانچه تصمیم گیری بر اساس چند شاخص صورت گیرد آن را تصمیم‌گیری چند شاخصه و چنانچه بر مبنای چند هدف صورت گیرد آن را تصمیم‌گیری چند هدفه می‌نامند.

به دلیل پیچیدگی محیط‌های اقتصادی-اجتماعی جوامع امروز، تصمیم‌گیرندگان به تنهایی نمی‌توانند تمام جوانب لازم برای یک مسأله تصمیم‌گیری را در نظر بگیرند. از این رو، در بسیاری از فرآیندهای تصمیم‌گیری واقعی از چندین تصمیم‌گیرنده با دانش و مهارت‌های مختلف استفاده می‌شود. همکاری و تشریک مساعی گروهی می‌تواند راهی برای دستیابی به یک سیستم تصمیم‌گیری منطقی، منظم، جامع و کامل باشد. با توجه به دانش و اطلاعات متمرکز در یک گروه نسبت به دانش و اطلاعاتی که یک فرد به تنهایی می‌تواند داشته باشد، انتظار می‌رود که کیفیت تصمیم‌گیری گروهی از کیفیت تصمیم‌گیری فردی بالاتر باشد. به هر حال تصمیمی که با مشارکت دیگران اتخاذ می‌شود، اطلاعات جامع‌تری را در دسترس قرار می‌دهد. اگر در یک مسأله تصمیم‌گیری چند شاخصه، جهت رتبه‌بندی گزینه‌ها نسبت به شاخص‌های موجود از تعدادی تصمیم‌گیرنده دعوت به‌عمل آید، این امر می‌تواند در حوزه مسائل تصمیم‌گیری گروهی چند شاخص در نظر گرفته شود.

انسان در مسیر زندگی خود همواره با مشکلات و مسائل مختلفی مواجه می‌شود که بایستی برای حل آنها تصمیم‌گیری و برنامه‌ریزی کند. اکثر اتفاق‌ها و رویدادهایی که در زندگی روزمره اتفاق می‌افتد، دارای ابهام و عدم قطعیت می‌باشند. در حل و بررسی مسائل تصمیم‌گیری و بهینه‌سازی، داده‌های نا دقیق نفوذ قابل توجهی دارند که این داده‌ها عبارتند از داده‌های تصادفی یا احتمالی، داده‌های فازی، داده‌های بازه‌ای، داده‌های ناهموار (راف) و حتی ترکیبی از انواع داده‌های نادقیق.

از مهم ترین داده‌های نادقیق، بحث نظریه مجموعه فازی است که در سال ۱۹۶۵ توسط پروفسور لطفی عسکرزاده عرضه شد [۱]. تاکنون پژوهش‌های گوناگونی در زمینه مجموعه‌های فازی در حل و بررسی مسائل مختلف به‌ویژه انواع مسائل تحقیق در عملیات انجام گرفته است، که به تعدادی از آن پژوهش‌ها اشاره می‌گردد. یک روش جدید برای حل برنامه ریزی خطی تماماً فازی با استفاده از اعداد ذوزنقه‌ای و توابع تبدیل توسط ناصری معرفی شده است [۲]. خشنوا و مظفری الگوریتمی جدید برای حل مسائل حمل و نقل در حالت کاملاً فازی پیشنهاد داده‌اند [۳].

[2] Criterion
[3] Attribute
[4] objective

یک روش برای مسائل برنامه ریزی خطی کران‌دار با اعداد فازی توسط ابراهیم نژاد و ناصری ارائه شده است [۴]. رویکردی جدید برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها با ورودی‌ها و خروجی‌های تصادفی فازی توسط ناصری و همکاران ارائه شده است [۵]. یک مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه کسری خطی با متغیرها و بردار منابع فازی توسط ناصری و خزائی معرفی شده‌است [۶]. یک مسئله برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی توسط ابراهیم‌نژاد مورد بررسی قرار گرفته است، که در آن تمام پارامترها و متغیرهای تصمیم‌گیری مسئله با اعداد فازی ذوزنقه‌ای نامنفی نمایش داده شده‌اند [۷]. یک مدل با استفاده از روش‌های تاپسیس و ویکور به‌طور همزمان برای حل مسائل چندهدفه با وجود عدم قطعیت در توابع هدف و محدودیت‌ها توسط وحدانی و همکاران مورد بررسی قرار گرفته است که درآن ضرایب توابع هدف و محدودیت‌ها به صورت فازی مطرح شده‌اند [۸].

همان‌طور که در محیط‌های تصادفی یا احتمالی، تابع توزیع و تابع چگالی نقش اصلی را بازی می‌کنند، در داده‌های فازی نیز نقش اصلی با تابع عضویت است. اما یکی دیگر از داده‌های نادقیق، بحث مجموعه‌های فازی شهودی[۵] می‌باشد، که تعمیمی از مجموعه‌های فازی معمولی است و در سال ۱۹۸۶ توسط آتاناسو مطرح شد [۹]. وی معتقد بود که درجه عدم عضویت همیشه برابر یک منهای درجه عضویت مربوط به مجموعه‌های فازی معمولی نیست وممکن است درمقدار آن تردیدهایی هم وجود داشته باشد. بنابراین مجموعه‌های فازی شهودی را معرفی نمود که در آن از درجه عضویت و درجه عدم عضویت استفاده می‌شود؛ در حالی که مجموعه‌های فازی این قابلیت را ندارند.

روش تسلط تقریبی (الکتره)[۶] یا روش حذف و انتخاب سازگار با واقعیت، یکی از مشهورترین روش‌های رتبه‌بندی در مسائل تصمیم‌گیری است. این روش توسط بنایون در سال ۱۹۶۱ معرفی گردید و سپس توسط ون دلفت، نیجکمپ و روی و سایر همکاران‌شان توسعه داده شده است. در این روش از مفهوم تسلط به صورت ضمنی استفاده می‌شود. در این روش، گزینه‌ها به صورت زوجی با یکدیگر مقایسه می‌شوند و گزینه‌های مسلط و ضعیف (غالب و مغلوب) شناسایی شده و سپس گزینه‌های ضعیف و مغلوب حذف می‌شوند [۱۰]. با توجه به پیچیدگی مسائل تصمیم‌گیری جدید و توسیع کاربرد روش‌های تصمیم‌گیری چند شاخصه، روش‌های مختلفی به عنوان زیر شاخه این روش پیشنهاد شده است. از آن پس روش اولیه ارائه شده توسط بنایون به نام روش تسلط تقریبی ۱ شهرت یافت. با توجه به اینکه فلسفه تمامی روش‌های پیشنهادی جدید با روش تسلط تقریبی ۱ یکسان است، در روش‌های بعدی و توسعه یافته نام‌های روش تسلط تقریبی۲ و تسلط تقریبی ۳ و تسلط تقریبی ۴ و روش تسلط تقریبی TRI[۷] برای آنها انتخاب شده است.

اختلاف نسخه‌های مختلف این روش در نوع عملیات ریاضی و نوع مسائلی است که این روش‌ها قادر به حل آن‌ها می‌باشند. به طور خاص، روش تسلط تقریبی ۱ برای حل مسائل انتخاب[۸] و روش‌های تسلط تقریبی ۲، ۳ و ۴ برای مسائل رتبه‌بندی [۹] و روشTRIبرای مسائل تخصیص[۱۰] استفاده می‌شوند. در تکنیک‌های تصمیم‌گیری چند شاخصه پس از ارزیابی گزینه‌ها نسبت به شاخص‌ها، گزینه مطلوب انتخاب می‌شود. در یک سری از این تکنیک‌ها، وزن شاخص‌ها بر اساس نظر شخصی تصمیم گیرندگان مشخص می‌شود. در برخی دیگر از آن‌ها، تصمیم

5 Intuitionistic fuzzy data
6 ELECTRE

۷ نام‌گذاری روش مذکور براساس پی‌شوند اعداد یونانی می‌باشد.
8 Selection
9 Ranking
10 Allocation

گیرندگان وزن‌ها را با ارائه دادن مدل‌های خاصی محاسبه می‌کنند. در تمام این روش‌ها، گزینه‌های متفاوتی نسبت به شاخص‌ها به صورت مستقل مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. در نهایت، گزینه‌ها بر اساس مقادیر به دست آمده رتبه‌بندی می‌شوند.

در این زمینه مطالعات گوناگونی صورت گرفته است، که در ادامه به مواردی اشاره خواهد شد. یک روش تصمیم‌گیری گروهی فازی شهودی چند معیاره برای انتخاب تأمین‌کننده با روش ویکور توسط روستایی و همکاران ارائه شده است [۱۱]. مدل‌های تصمیم‌گیری گروهی چند شاخصه براساس وزن‌های مشخص شده از طریق روش آنتروپی توسط دوآن و همکاران ارائه شده است [۱۲]. زو مسائل تصمیم گیری گروهی با داده‌هایی در قالب ماتریس‌های فازی شهودی را مورد بررسی قرار داده است، که در آن‌ها نیز وزن شاخص‌ها مشخص می‌باشند [۱۳]. وی همچنین مدلی بر اساس تصمیم‌گیری چند شاخصه گروهی معرفی نموده است که در آن وزن شاخص‌ها از طریق مدل خاصی تعیین شده‌اند [۱۴]. چن و تان تکنیک‌هایی ارائه کرده‌اند که در آن‌ها رضایتمندی و عدم رضایت‌مندی هر گزینه نسبت به مجموعه شاخص‌ها می‌تواند با داده‌های فازی بیان شود. در این تکنیک‌ها به تصمیم‌گیرنده اجازه داده می‌شود که به شاخص‌ها، وزن‌های مختلفی را نسبت دهند [۱۵]. فنگ شن و همکاران دو مدل رتبه‌بندی با استفاده از روش تسلط تقریبی ۳ در تصمیم‌گیری گروهی چند شاخصه با داده‌های فازی شهودی ارائه داده‌اند، که در این مدل‌ها وزن شاخص‌ها و تصمیم گیرندگان از پیش تعیین شده است [۱۶،۱۷]. وانگ و همکاران روش تصویر را روی مسائل تصمیم‌گیری گروهی چند شاخصه به کار برده‌اند که در آن وزن شاخص‌ها توسط تصمیم گیرندگان مشخص شده است [۱۸]. یوو یک مدل تصمیم‌گیری گروهی فازی براساس روش تاپسیس با داده‌های فازی شهودی در مسائل تصمیم‌گیری گروهی چند شاخصه ارائه نموده است، که در آن وزن شاخص‌ها از پیش تعیین شده است [۱۹]. همچنین یک روش برای تعیین وزن تصمیم گیرندگان با شاخص‌های بازه‌ای مقدار در مسائل تصمیم‌گیری گروهی توسط وی ارائه شده است [۲۰]. تعیین وزن تصمیم‌گیرندگان در مسائل تصمیم‌گیری گروهی چند شاخصه فازی توسط قائمی نسب و همکاران مورد بررسی قرار گرفته است [۲۱]. یک روش تصمیم‌گیری گروهی چند معیاره با استفاده از روش تسلط تقریبی ۳ با داده‌های فازی شهودی بازه‌ای-مقدار توسط هاشمی و همکاران مورد ارزیابی قرار گرفته است، که در این روش نیز وزن هر معیار توسط متخصصان به صورت مقادیر فازی شهودی بازه‌ای-مقدار معرفی گردیده است [۲۲]. خیان و همکاران یک عملگر بر روی داده های فازی زبانی معرفی کرده‌اند و کاربرد آن را در تصمیم‌گیری گروهی مورد ارزیابی قرار داده‌اند. که وزن هر شاخص در این مدل نیز از پیش مشخص شده است [۲۳]. چن و همکاران تصمیم گیری گروهی چند شاخصه فازی را با مجموعه‌های فازی شهودی و روش استدلال مدرکی مورد مطالعه قرار داده‌اند، که وزن یا اهمیت هر شاخص و تصمیم‌گیرندگان به صورت قیاسی مشخص شده‌اند [۲۴]. یک مدل برای تصمیم‌گیری گروهی براساس یک رویکرد ویکور فازی، با استفاده از متغیرهای کلامی توسط وو و همکاران ارائه داده شده است که در این مدل اهمیت شاخص‌ها با استفاده از متغیرهای کلامی به دست می‌آید [۲۵]. سواستجانو و دیمووا رتبه‌بندی گزینه‌ها را با استفاده از مقادیر فازی مردد در چارچوب نظریه دمپستر-شافر بررسی کرده‌اند، که اهمیت شاخص‌ها از پیش تعیین شده‌اند [۲۶]. اخیراً هم یک مدل رتبه‌بندی جدید در مسائل تصمیم‌گیری گروهی چند شاخصه توسط مؤلفان این مقاله ارائه گردیده است که در آن وزن شاخص‌ها از طریق یک مدل برنامه ریزی خطی با استفاده از اندازه شباهت به‌دست می‌آید [۲۷].

۲- تعاریف مقدماتی

تعریف ۲-۱: فرض کنید X یک مجموعه مرجع باشد. یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ در X به صورت $\tilde{A}=\{\langle x,\mu_{\tilde{A}}(x)\rangle | x\in X\}$ تعریف می‌شود که در آن تابع $\mu_{\tilde{A}}:X\to[0,1]$، تابع عضویت $\tilde{A}$ می‌باشد. مقدار تابع $\mu_{\tilde{A}}(x)$، درجه عضویت x در $\tilde{A}$ نام دارد.

تعریف ۲-۲: [۱۶] فرض کنید X یک مجموعه مرجع باشد. یک مجموعه فازی شهودی P در X به صورت $P=\{(x,\mu_P(x),\nu_P(x)) | x\in X\}$ تعریف می‌شود، که در آن $\mu_P:X\to[0,1]$ و $\nu_P:X\to[0,1]$ به ترتیب توابع عضویت و عدم عضویت x متعلق به X از مجموعه فازی شهودی P می‌باشند. همچنین برای هر x متعلق به X از مجموعه فازی شهودی P رابطه $0\le\mu_P(x)+\nu_P(x)\le 1$ برقرار است. درجه تردید x در P نیز به صورت $\pi_P(x)=1-\mu_P(x)-\nu_P(x)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۲-۳: [۲۸] فرض کنید α یک مجموعه فازی شهودی روی مجموعه مرجع X با توابع عضویت μ_α و عدم عضویت ν_α باشد، آنگاه می‌توان عبارت $\alpha=(\mu_\alpha,\nu_\alpha,\pi_\alpha)$ را یک عدد فازی شهودی نامید که در آن روابط و نامساوی‌های $0\le\mu_\alpha\le 1$، $0\le\nu_\alpha\le 1$، $0\le\mu_\alpha+\nu_\alpha\le 1$ و $0\le\pi_\alpha=1-\mu_\alpha-\nu_\alpha\le 1$ برقرارند. اگر $\mu_\alpha+\nu_\alpha=1$، آن‌گاه عبارت $(\mu_\alpha,\nu_\alpha,\pi_\alpha)$ به صورت $(\mu_\alpha,1-\mu_\alpha)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۲-۴: [۱۵، ۲۹] فرض کنید $\alpha=(\mu_\alpha,\nu_\alpha,\pi_\alpha)$ یک عدد فازی شهودی باشد. تابع نمره $s(\alpha)$ و تابع دقت $h(\alpha)$ که برای اندازه‌گیری شایستگی و درجه صحت α استفاده می‌شوند به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$i)\ s(\alpha)=\mu_\alpha-\nu_\alpha,$

$ii)\ h(\alpha)=\mu_\alpha+\nu_\alpha.$

تعریف ۲-۵: [۱۶] فرض کنید $\alpha=(\mu_\alpha,\nu_\alpha,\pi_\alpha)$ و $\beta=(\mu_\beta,\nu_\beta,\pi_\beta)$ دو عدد فازی شهودی باشند. یک فاصله فازی شهودی بین α و β به صورت فرمول زیر تعریف می‌شود:

$$d_{IFN}(\alpha,\beta)=\sqrt{\frac{1}{2}\left((\mu_\alpha-\mu_\beta)^2+(\nu_\alpha-\nu_\beta)^2+(\pi_\alpha-\pi_\beta)^2\right)}$$

لم ۲-۱: فرض کنید $\alpha=(\mu_\alpha,\nu_\alpha,\pi_\alpha)$ و $\beta=(\mu_\beta,\nu_\beta,\pi_\beta)$ دو عدد فازی شهودی باشند، آنگاه برای فاصله بین α و β روابط زیر برقرارند:

الف) $0\le d_H(\alpha,\beta)\le 1$

ب) $d_H(\alpha,\alpha)=0$

ج) $d_H(\alpha,\beta)=d_H(\beta,\alpha)$

در ادامه جهت تعیین اهمیت شاخص‌ها در مسائل تصمیم‌گیری گروهی چند شاخصه تحت محیط فازی شهودی، یک مدل برنامه‌ریزی خطی معرفی می‌شود. سپس با استفاده از وزن‌های محاسبه شده، یک روش تصمیم‌گیری گروهی جدید برای رتبه بندی گزینه‌ها ارائه می‌گردد.

۳- تعیین وزن شاخص‌ها

ضریب اهمیت یا وزن هر شاخص در مسائل تصمیم گیری ضروری است. وزن هر شاخص به اهمیت نسبی آن شاخص نسبت به دیگر شاخص‌ها دلالت دارد. یک انتخاب دقیق از وزن‌ها می‌تواند کمک بزرگی در بدست آوردن نتیجه نهایی باشد. لذا برای حل و بررسی مسائل تصمیم‌گیری گروهی چند شاخصه با داده‌های فازی شهودی، جهت تعیین اهمیت هر شاخص یک مدل برنامه‌ریزی خطی معرفی می‌گردد، که در ادامه با ذکر جزئیات این مسائل بیان خواهند شد.

فرض کنید یک مسأله تصمیم‌گیری گروهی چند شاخصه شامل m گزینه به صورت $A=\{a_1,a_2,...,a_m\}$ و n شاخص به صورت $C=\{c_1,c_2,...,c_n\}$ باشد. همچنین فرض کنید $D=\{d_1,d_2,...,d_q\}$ مجموعه‌ای

از تعداد q تصمیم‌گیرنده باشد. ماتریس مربوط به تصمیم‌گیرنده d_k؛ $(k=1,2,...,q)$ به صورت $R_k=(\tilde{r}_{ijk})_{m\times n}$ نشان داده می‌شود که در آن $\tilde{r}_{ijk}$؛ $(i=1,2,...m;\ j=1,2,..,n;\ k=1,2,...,q)$ یک عدد فازی شهودی است که توسط تصمیم‌گیرنده d_k برای گزینه a_i نسبت به شاخص c_j در نظر گرفته شده است. فرض کنید d_{ijk}؛ $(i=1,2,...m;\ j=1,2,..,n;\ k=1,2,...,q)$ فاصله گزینه a_i؛ $(i=1,2,...,m)$ نسبت به شاخص c_j؛ $(j=1,2,...,n)$ از گزینه ایده‌آل a^*_{jk}؛ $(j=1,2,...n;k=1,2,...q)$ توسط تصمیم‌گیرنده d_k؛ $(k=1,2,...,q)$ باشد که به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$d_{ijk}=\sqrt{\frac{1}{2}[(\mu_{\tilde{r}_{ijk}}-\mu_{a^*_{jk}})^2+(\nu_{\tilde{r}_{ijk}}-\nu_{a^*_{jk}})^2+(\pi_{\tilde{r}_{ijk}}-\pi_{a^*_{jk}})^2}$$

که در آن μ، ν و π بترتیب توابع عضویت و عدم عضویت و درجه تردید اعداد فازی شهودی است و همچنین عدد فازی شهودی a^*_{jk} از طریق الگوریتم‌های ۳-۱ و ۳-۲ به شرح ذیل به دست می‌آید:

الگوریتم ۳-۱: گزینه ایده‌آل نسبت به شاخص‌های با جنبه مثبت

گام اول: در ماتریس تصمیم R_k برای هر شاخص c_j با جنبه مثبت، مقدار Γ_1 طبق تعریف زیر بدست می‌آید:

$$\Gamma_1:=\{t\ |\mu_{\tilde{r}_{tjk}}=\max_{1\le i\le m}(\mu_{\tilde{r}_{ijk}})\}.$$

گام دوم: اگر $|\Gamma_1|=1$ باشد، آن‌گاه

$$a^*_{jk}=(\mu_{\tilde{r}_{tjk}},\nu_{\tilde{r}_{tjk}},\pi_{\tilde{r}_{tjk}}),t\in\Gamma_1 .$$

در غیر این صورت:

$$a^*_{jk}=(\mu_{\tilde{r}_{tjk}},\min_{t\in\Gamma_1}(\nu_{\tilde{r}_{tjk}}),\pi_{\tilde{r}_{tjk}}) .$$

الگوریتم ۳-۲: گزینه ایده‌آل نسبت به شاخص‌های با جنبه منفی

گام اول: در ماتریس تصمیم R_k برای هر شاخص c_j با جنبه منفی، مقدار Γ_2 طبق تعریف زیر بدست می‌آید:

$$\Gamma_2:=\{t\ |\nu_{\tilde{r}_{tjk}}=\max_{1\le i\le m}(\nu_{\tilde{r}_{ijk}})\}.$$

گام دوم: اگر $|\Gamma_2|=1$ باشد، آن‌گاه

$$a^*_{jk}=(\mu_{\tilde{r}_{tjk}},\nu_{\tilde{r}_{tjk}},\pi_{\tilde{r}_{tjk}}),t\in\Gamma_2 .$$

در غیر این صورت:

$$a^*_{jk}=(\min_{t\in\Gamma_2}(\mu_{\tilde{r}_{tjk}}),\nu_{\tilde{r}_{tjk}},\pi_{\tilde{r}_{tjk}}) .$$

نکته ۳-۱: شاخص‌های با جنبه مثبت شاخص‌هایی هستند که تصمیم‌گیرنده خواهان افزایش مقدار آن‌ها در مدل است، مانند سود، رضایت شغلی، درآمد و غیره. همچنین شاخص‌های با جنبه منفی شاخص‌هایی هستند که تصمیم‌گیرنده خواهان کاهش مقدار آن‌ها در مدل می‌باشد، مانند هزینه، استرس، آلودگی و غیره.

پس از مشخص‌کردن مقدار a^*_{jk} طبق الگوریتم‌های فوق جهت اجتناب از استفاده مقادیر a^*_{jk} برابر صفر، مقدار $\bar{a}_{jk}$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{cases}\bar{a}_{jk}:=\exp(\mu_{a^*_{jk}}) & \text{برای شاخص‌های با جنبه مثبت}\\ \bar{a}_{jk}:=\exp(\nu_{a^*_{jk}}) & \text{برای شاخص‌های با جنبه منفی}\end{cases}$$

واضح است که $\bar{a}_{jk}>0$.

اکنون مدل برنامه‌ریزی خطی (P) به شرح زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}(P)\quad & \gamma:=\ \max\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q}\varepsilon_k\\ s.t.\quad & \sum_{j=1}^{n}x_j=1\\ & x_j\bar{a}_{jk}-\varepsilon_k\ge 0\quad ;j=1,2,...,n;k=1,2,...,q.\end{aligned}$$

که در آن x_j؛ $(j=1,2,...,n)$ و ε_k؛ $(k=1,2,...,q)$

متغیرهای تصمیم و نامقید می‌باشند و $\bar{a}_{jk}$ها از مقادیر محاسبه شده قبل بدست می‌آیند. باید توجه کرد که با توجه به نامقید بودن متغیرهای ε_k در مسئله (P)، این مسئله همواره شدنی خواهد بود و در خصوص نوع جواب بهینه آن لم‌های بعدی بیان می‌گردد.

لم ۳-۱: فرض کنید γ مقدار بهینه به دست آمده از مدل شدنی (P) باشد، آنگاه $\gamma>0$.

اثبات. ابتدا دوگان مدل (P) را در نظر بگیرید. یعنی:

$$
\begin{aligned}
(D)\quad & min\ \alpha \\
s.t.\quad & \alpha+\sum_{k=1}^{q}\beta_{jk}\bar{a}_{jk}=0;\quad j=1,\dots,n \\
& -\sum_{j=1}^{n}\beta_{jk}=\frac{1}{q};\quad k=1,2,\dots,q \\
& \beta_{jk}\le 0;\ k=1,2,\dots,q,\ j=1,\dots,n.
\end{aligned}
$$

اکنون با برهان خلف فرض کنید که γ بزرگتر از صفر نباشد. پس $\gamma=0$ یا $\gamma<0$.

حالت اول: اگر $\gamma=0$، آنگاه طبق قضایای دوگانگی، $\alpha=\gamma=0$.

بنابراین در قید اول (D) برای هر j؛ $\sum_{k=1}^{q}\beta_{jk}\bar{a}_{jk}=0$ که با قیود دیگر مسئله (D) در تناقض است.

حالت دوم: اگر $\gamma<0$، آنگاه $\alpha<0$ و برای هر j؛ $\sum_{k=1}^{q}\beta_{jk}\bar{a}_{jk}>0$ که در این حالت نیز با قیود دیگر مسئله (D) در تناقض است (چون در هر حالت $0<\bar{a}_{jk}$).

لم ۳-۲: مسئله (P) نمی‌تواند دارای جواب بهینه نامتناهی باشد.

اثبات. با توجه به لم ۳-۱ ، $\gamma>0$. با برهان خلف، فرض کنید $\gamma\to+\infty$، پس در این‌صورت $\exists k\in\{1,2,\dots,q\}$ به‌طوری که $\varepsilon_k\to+\infty$. با توجه به قید دوم و مثبت بودن مقادیر $\bar{a}_{jk}$؛ $(j=1,2,\dots,n;k=1,2,\dots,q)$ نتیجه می‌شود که $\exists j\in\{1,2,\dots,n\}$ به‌طوری که $x_j\to+\infty$ و این نتیجه با قید اول تناقض دارد. لذا فرض خلف باطل است و مقدار جواب بهینه مسئله (P) متناهی می‌باشد.

حال باتوجه به مطالبی که ارائه شد، فرض کنید d_{ijk} فاصله گزینه a_i نسبت به شاخص c_j از گزینه ایده‌آل a^*_{jk} در ماتریس تصمیم R_k باشد، که a^*_{jk} از الگورتیم‌های ۳-۱ یا ۳-۲ به‌دست آمده است و γ و $\bar{a}_{jk}$ به ترتیب از حل مدل (P) و روابط تعریف شده محاسبه شده‌اند.

سپس $W_k=(w_{1k},w_{2k},\dots,w_{nk})$ را به‌عنوان برداری شامل وزن n شاخص در نظر بگیرید، که این بردار می‌تواند توسط مدل برنامه‌ریزی خطی $(P1)$ به شرح ذیل برای هر تصمیم‌گیرنده d_k؛ $(k=1,2,\dots,q)$ به‌دست آید:

$$
\begin{aligned}
(P1)\quad & min\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}w_{jk}d_{ijk} \\
s.t.\quad & \sum_{j=1}^{n}w_{jk}=1 \\
& w_{jk}\bar{a}_{jk}\ge\gamma;\quad k=1,2,\dots,q,\ j=1,\dots,n.
\end{aligned}
$$

به‌طوریکه w_{jk}؛ $(j=1,2,\dots,n;k=1,2,\dots,q)$، متغیرهای تصمیم مسئله می‌باشند که با توجه به قید دوم مسئله، مقدار آن‌ها مثبت می‌باشد.

توجه کنید که مسأله برنامه‌ریزی خطی $(P1)$ یکی از مباحث مهم برای تعیین وزن یا ضریب اهمیت شاخص‌های تصمیم‌گیری برای هر تصمیم‌گیرنده kام است، که بر اساس مقادیر تعریف شده γ و محاسبه شده $\bar{a}_{jk}$ از مطالب قبل حاصل می‌گردد.

در ضمن یادآوری می‌گردد، در مسائل تصمیم‌گیری چند شاخصه، دانستن وزن هر شاخص از اهمیت بسزایی برخوردار است. در برخی از روش‌های وزن دهی، بعضی از شاخص‌ها ممکن است مقدار صفر را

اختیار کنند که در این صورت شاخص مورد نظر اهمیت خود را در مسئله از دست می‌دهد. به‌عبارت دیگر شاخص مذکور حذف میگردد. به‌طور مثال حل مسئله‌ای با شاخص‌های $g_1=a_1\neq 0$ و $g_2=a_2\neq 0$ و $g_3=a_3=0$ با حل مسئله‌ای با شاخص‌های $k_1=a_1\neq 0$ و $k_2=a_2\neq 0$ هیچ تفاوتی ندارد. لذا هدف کلی از ارائه مدل‌های (P)و $(P1)$ جلوگیری از صفر شدن وزن شاخص‌ها در مسائل تصمیم‌گیری چند شاخصه می‌باشد که توسط نویسنده ارائه گردیده است.

۴- رتبه‌بندی گزینه‌ها

در این قسمت با توجه به بردار $W_k=(w_{1k},w_{2k},...,w_{nk})$ به‌دست آمده از حل مدل خطی ارائه شده $(P1)$، یک روش رتبه‌بندی جدید براساس روش تسلط تقریبی ۳ با داده‌های فازی شهودی معرفی می‌شود.

در این روش پس از تشکیل ماتریس تصمیم با داده‌های فازی شهودی توسط تصمیم‌گیرندگان و تعیین آستانه‌های p، q وvماتریس‌های توافق و مخالف براساس تابع نمره ساخته می‌شوند. در نهایت رتبه‌بندی گزینه‌ها براساس درجه رضایت‌مندی گروهی ارائه شده توسط گشتاسبی بدست می‌آید [۳۰]. در ادامه روش رتبه‌بندی مطلوب طی ۱۰ گام مبتنی بر روش تسلط تقریبی ۳ بیان می‌گردد.

گام ۱: تشکیل ماتریس تصمیم

در ماتریس تصمیم مشخصات گزینه‌ها نسبت به شاخص‌ها به صورت اعداد فازی شهودی در نظر گرفته می‌شوند. در این ماتریس درایه مربوط به گزینه a_i نسبت به شاخص c_j توسط تصمیم گیرنده d_k به صورت r_{ijk} نمایش داده می‌شود.

گام ۲: تعریف آستانه‌ها و اختصاص وزن به شاخص‌ها

دراین گام به‌منظور تقویت توان شناسایی گزینه‌های برتر و نیز دخالت دادن نظر تصمیم‌گیرندگان در مراحل انتخاب، سه آستانه معرفی و مورد استفاده قرار می‌گیرند. نام آستانه‌ها و علائم اختصاری مورد استفاده هر کدام به شرح زیر است:

q: آستانه بی‌تفاوتی

p : آستانه ترجیح

v: آستانه رد

هر یک از این آستانه‌ها باید به‌طور جداگانه برای هر یک از شاخص‌ها تعریف شوند. به‌عنوان مثال برای شاخص j ام آستانه‌های بی‌تفاوتی، ترجیح و رد به ترتیب با q_j ، p_j و v_j نشان داده می‌شوند. این آستانه‌ها توسط فرد یا تیم تصمیم‌گیرنده تعیین می‌شوند. لذا تجربه و آگاهی فرد تصمیم‌گیرنده، نقش بسیار اساسی در تعیین این شاخص‌ها دارد.

فرض کنید P_j دلالت بر ارجحیت قوی و Q_j ارجحیت ضعیف و I_j دلالت بر بی‌تفاوتی داشته باشند آنگاه:

در مقایسه دو گزینه a_1 و a_2 از دیدگاه شاخص j ام (مقایسه g_{ja_1} با g_{ja_2})، پنج حالت ممکن است بین دو گزینه پیش آید:

۱. اگر $g_{ja_2}-q_j<g_{ja_1}-g_{ja_2}<q_j$، آنگاه a_1 تقریبا با a_2 برابر است و به صورت $a_1I_ja_2$ نشان داده می‌شود.

۲. اگر $q_j<g_{ja_1}-g_{ja_2}<p_j$، آنگاه a_1 بر a_2 ترجیح دارد و به صورت $a_1Q_ja_2$ نشان داده می‌شود.

۳. اگر $p_j<g_{ja_1}-g_{ja_2}$، آنگاه a_1 به طور کامل a_2 را رد می‌کند و به صورت $a_1P_ja_2$ نشان داده می‌شود.

۴. اگر $-p_j < g_{ja_1} - g_{ja_2} < -q_j$، آنگاه a_2 بر a_1 ترجیح دارد و به صورت $a_2 Q_j a_1$ نشان داده می‌شود.

۵. اگر $g_{ja_1} - g_{ja_2} < -p_j$، آنگاه a_2 به طور کامل a_1 را رد می‌کند و به صورت $a_2 P_j a_1$ نشان داده می‌شود.

یکی از پارامترهای مهم دیگر در انتخاب گزینه‌ی مناسب در این روش و این گام، انتخاب وزن یا درجه اهمیت هر یک از شاخص‌ها می‌باشد، که برای این منظور با استفاده از حل مدل $(P1)$ بردارهای وزنی نرمال شده $W_k = (w_{1k}, w_{2k}, ..., w_{nk})$ برای هر تصمیم‌گیرنده d_k به‌دست می‌آیند.

گام ۳: تشکیل ماتریس توافق برای هر شاخص

در این مرحله با استفاده از ماتریس‌های تصمیم تشکیل شده در گام اول و آستانه‌های تعیین شده در گام دوم و با توجه به ارتباط گزینه‌ها نسبت به شاخص‌ها توسط هر تصمیم‌گیرنده، یک ماتریس توافق $\tilde{C}_k(a_i, a_l)$ تشکیل می‌شود. هر یک از درایه‌های ماتریس‌های توافق مذکور برای هر k با استفاده از روابط زیر قابل محاسبه‌اند:

$$\tilde{C}_k(a_i, a_l) = \prod_{j=1}^{n} (\tilde{c}_{jk}(a_i, a_l))^{w_{jk}}; \ k = 1, 2, ..., q, \ \forall i \neq l$$

به طوری که؛

$$\tilde{c}_{jk}(a_i, a_l) = \begin{cases} 1 & s_{ij} + q_j \geq s_{lj} \\ 0 & s_{ij} + p_j \leq s_{lj} \\ \dfrac{p_j - (s_{lj} - s_{ij})}{p_j - q_j} & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن s_{ij} تابع نمره برای گزینه a_i نسبت به شاخص c_j می‌باشد. یعنی $s_{ij} = \mu_{a_{ij}} - \nu_{a_{ij}}$.

گام ۴: تشکیل ماتریس مخالف برای هر شاخص

در این مرحله نیز همانند گام سوم، با استفاده از ماتریس تصمیم و نیز آستانه‌های تعیین شده، ماتریس‌های مخالف $\tilde{D}_k(a_i, a_l)$ نسبت به هر شاخص توسط هر تصمیم‌گیرنده k ام با استفاده از روابط زیر تشکیل می‌شوند:

$$\tilde{D}_k(a_i, a_l) = \prod_{j=1}^{n} (\tilde{d}_{jk}(a_i, a_l))^{w_{jk}}; \ k = 1, 2, ..., q, \ \forall i \neq l$$

به طوریکه؛

$$\tilde{d}_{jk}(a_i, a_l) = \begin{cases} 0 & s_{ij} + p_j \geq s_{lj} \\ 1 & s_{ij} + v_j \leq s_{lj} \\ \dfrac{p_j + s_{ij} - s_{lj}}{p_j - v_j} & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

گام ۵: تشکیل ماتریس اعتبار

بعد از ساختن ماتریس‌های توافق فازی شهودی $\tilde{C}_k$ و ماتریس‌های مخالف فازی شهودی $\tilde{D}_k$، ماتریس اعتبار $\tilde{S}_k(a_i, a_l)$؛ $\forall i \neq l, \ (k = 1, 2, ..., q)$ توسط هر تصمیم‌گیرنده d_k؛ $(k=1,2,...,q)$ برای اندازه گیری شدت برتری بین گزینه‌های مختلف به‌صورت زیر ساخته می‌شود:

$$\tilde{S}_k(a_i, a_l) = \begin{cases} \tilde{C}_k(a_i, a_l) & \tilde{D}_k(a_i, a_l) \leq \tilde{C}_k(a_i, a_l) \\ \tilde{D}_k(a_i, a_l) & \tilde{D}_k(a_i, a_l) > \tilde{C}_k(a_i, a_l) \end{cases}$$

گام ۶: تشکیل ماتریس جریان برتری خالص

بر اساس ماتریس اعتبار $\tilde{S}_k$، مقدار $F_k(a_i, a_l)$ برای نمایش دادن برتری خالص a_i بر a_l، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_k(a_i, a_l) = \tilde{S}_k(a_i, a_l) - \tilde{S}_k(a_l, a_i); \ k = 1, 2, ..., q, \forall i \neq l$$

گام ۷: شاخص جریان برتری خالص

در این گام، شاخص جریان برتری خالص $\Phi_k(a_i)$؛ $(i=1,2,...,m)$ معرفی می‌گردد، با این مفهوم که گزینه a_i نسبت به بقیه گزینه‌ها برتری خالص دارد.

$$\Phi_k(a_i) = \sum_{l=1, l \neq i}^{m} F_k(a_i, a_l) \quad \forall k = 1, 2, ..., q$$

بر اساس شاخص جریان برتری خالص $\Phi_k(a_i)$، گزینه‌ها می‌توانند رتبه‌بندی شوند.

گام ۸: شاخص جریان برتری خالص گروهی

شاخص جریان برتری خالص گروهی $\Phi_G(a_i)$، $(i=1,2,...,m)$ در ادامه تعریف می‌شود:

$$\Phi_G(a_i)=\sum_{k=1}^{q}\lambda_k\Phi_k(a_i)$$

که در آن λ_k؛ $(k=1,2,...,q)$ وزن‌های تصمیم گیرندگان می‌باشند. توجه کنید که $\Phi_G(a_i)$ نشان دهنده برتری خالص گروهی گزینه a_i نسبت به بقیه گزینه‌ها می‌باشد.

گام ۹: شاخص رضایتمندی گروهی

برای به‌دست آوردن شاخص رضایتمندی گروهی، از روش بزرگترین انحراف بین رتبه‌بندی‌های شخصی و گروهی استفاده می‌شود. فرض کنید $u_k(a_i)$ رتبه گزینه a_i توسط تصمیم‌گیرنده d_kام و $U(a_i)$ رتبه‌بندی گروهی را نشان دهد. آنگاه برای هر k مقدار d_i^k طبق رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$d_i^k=\sum_{j=1}^{i}I\left[u_k(a_i)\le i<U(a_j)\right]$$

که در آن $I[E]=1$ اگر عبارت E درست باشد و $I[E]=0$ اگر عبارت E نادرست باشد. همچنین فرض کنید برای هر k:

$$D_i^k=\sum_{j=1}^{i}I\left[n+1-u_k(a_i)>U(a_j)\right];\quad \forall k$$

آنگاه بزرگترین انحراف بین $u_k(a_i)$ و $U(a_i)$ به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$R_g^k=\frac{\max_i D_i^k-\max_i d_i^k}{\frac{m}{2}};\quad \forall k$$

توجه کنید که برای هر k، $-1\le R_g^k\le 1$ می‌باشد. هر چه R_g^k به ۱ نزدیک‌تر باشد نشان‌دهنده این است که اختلاف کمتری بین رتبه‌بندی‌های شخصی و گروهی وجود دارد و هر چه R_g^k به ۱- نزدیک‌تر باشد نشان‌دهنده اختلاف بیشتر بین رتبه‌بندی‌های شخصی و گروهی می‌باشد. سرانجام شاخص رضایتمندی گروهی از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$R_G=\sum_{k=1}^{q}\lambda_k R_g^k$$

که در آن λ_k؛ $(k=1,2,...,q)$ وزن‌های تصمیم گیرندگان می‌باشند.

نکته ۴-۱: فرض کنید θ، $(-1\le\theta\le 1)$ آستانه پذیرش سطح رضایت‌مندی گروهی باشد که توسط تصمیم گیرندگان مشخص می‌شود. اگر $R_G\ge\theta$ آنگاه R_G به عنوان درجه رضایتمندی گروهی قابل قبول است و رتبه‌بندی نهایی، حاصل می‌شود.

طبق نکته فوق در فرآیند مسأله تصمیم‌گیری گروهی چند شاخصه، اگر در پایان گام ۹، $R_G\ge\theta$ باشد که کار تمام است و رتبه‌بندی حاصل می‌گردد و اگر $R_G<\theta$، آنگاه R_G به عنوان درجه رضایت مندی گروهی، قابل قبول نمی‌باشد. لذا جهت به دست آوردن مقدار قابل قبول، یعنی مقداری که در رابطه $R_G\ge\theta$ صدق کند و همچنین به‌دست آوردن رتبه‌بندی نهایی، گام بعدی اجرا می‌شود. ضمن اینکه همگرایی روش پیشنهادی در پایان گام بعد مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

گام ۱۰: درجه انحراف موزون

فرض کنید $F_k(a_i,a_l)=[f_{il(k)}]$ و $\Pi_{il}=\{f_{il(1)},f_{il(2)},...,f_{il(q)}\}$ مجموعه‌ای از مقادیر جریان برتری خالص تصمیم گیرندگان باشد، که $f_{il(k)}$ مقدار جریان برتری خالص تصمیم‌گیرنده d_k نسبت به زوج گزینه‌های $(a_i,a_l\in A,i\ne l);(a_i,a_l)$ می‌باشد. آنگاه درجه انحراف موزون از طریق رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\xi_{il}=\sqrt{\sum_{k=1}^{q}\lambda_k(f_{il(k)}-\bar{f}_{il})^2}$$

که در آن $\bar{f}_{il}=\sum_{k=1}^{q}\lambda_k f_{il(k)}$ میانگین موزون مجموعه Π_{il} می‌باشد.

ایجاد سازگاری و تنظیم خودکار رضایت‌مندی گروهی شامل دو مرحله می‌باشد:

الف) بزرگترین مؤلفه ماتریس ξ انتخاب و با $\xi_{i^*l^*}$ نشان داده می‌شود. سپس مقدار $f_{i^*l^*(k^*)}$ با استفاده از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\lambda_{k^*}(f_{i^*l^*(k^*)}-\bar{f}_{i^*l^*})^2=\max_{1\le k\le q}\lambda_k(f_{i^*l^*(k)}-\bar{f}_{i^*l^*})^2$$

ب) مقدار $f_{i^*l^*(k^*)}$ با مقدار عددی $f^1_{i^*l^*(k^*)}=\bar{f}_{il}$ (اولین تکرار) جایگزین می‌شود و بقیه مقادیر ثابت می‌مانند. یعنی در تکرار $h+1$ام به ازای هر $h\ge1$:

$$f^{h+1}_{il(k)}=\begin{cases}\bar{f}^h_{il} & i=i^*,l=l^*,k=k^*\\ f^h_{il(k)} & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

اگر $h\le t$ باشد، (t تعداد تکرار مجاز فرآیند مسأله می‌باشد که توسط تصمیم‌گیرندگان مشخص می‌شود)، آنگاه گام ۷ برای داده‌های جدید تکرار می‌شود. در غیر این صورت، اگر $h>t$ آنگاه باید در ماتریس‌های ارزیابی اصلی یا پارامترهای مرتبط مسأله در گام ۱ تجدید نظر شود.

فرض کنید $\Pi^0_{il}=\{f^0_{il(1)},f^0_{il(2)},...,f^0_{il(q)}\}$ یک مجموعه خالص از مقادیر جریان برتری اصلی تصمیم گیرندگان باشد و ξ^0_{il} درجه انحراف موزون آن باشد و $\Pi^1_{il}=\{f^1_{il(1)},f^1_{il(2)},...,f^1_{il(q)}\}$ اولین مجموعه تنظیم شده و Π^1_{il} درجه انحراف موزون متناظر با ξ^1_{il} باشد، واضح است که ξ^1_{il} از ξ^0_{il} کوچکتر است. در واقع این رویکرد همگرا می‌باشد.

قضیه ۴-۱: [۱۶] فرض کنید $\Pi^h_{il}=\{f^h_{il(1)},f^h_{il(2)},...,f^h_{il(q)}\}$؛ $(i,l=1,2,...m,i\ne l)$ مجموعه‌ای از مقادیر جریان برتری خالص تصمیم گیرندگان و ξ^h_{il} درجه انحراف موزون متناظر با آن باشد. آنگاه: $\lim_{h\to\infty}\xi^h_{il}=0$.

اثبات: با توجه به موارد ذکر شده واضح است که دنباله $\{\xi^h_{il}\}$ نزولی است. از طرفی طبق تعریف درجه انحراف موزون $\xi_{il}\ge0$. بنابراین دنباله $\{\xi^h_{il}\}$ یکنوا و کران‌دار می‌باشد. در نتیجه با بکار بردن قضیه وجودی حد برای یک دنباله، وجود حد $\lim_{h\to\infty}\xi^h_{il}$ میسر می‌گردد. فرض کنید $\lim_{h\to\infty}\xi^h_{il}=\xi^{+\infty}_{il}$ ، پس $\xi^{+\infty}_{il}=\inf\{\xi^h_{il}\}$. حال با برهان خلف فرض کنید وجود داشته باشد $\epsilon>0$، به‌طوریکه $\lim_{h\to\infty}\xi^h_{il}=\epsilon$. در روند خودکار زمانی که $\xi_{il}>0$ همیشه یک بیشترین فاصله موزون از $\bar{f}_{il}$ وجود دارد یعنی

$$\lambda_{k^*}(f_{i^*l^*(k^*)}-\bar{f}_{i^*l^*})^2=\max_{1\le k\le q}\lambda_k(f_{i^*l^*(k)}-\bar{f}_{i^*l^*})^2.$$

بنابراین اگر $\xi^{+\infty}_{il}=\epsilon>0$ این روند خودکار متوقف نمی‌شود. با تکرار روند اثبات، برای مجموعه $\Pi^{+\infty}_{il}$ یک مجموعه Π^*_{il} دیگر و یک ξ^*_{il} متناظر به‌دست می‌آید. در نتیجه $\xi^*_{il}<\xi^{+\infty}_{il}$ که در تناقض با تعریف $\xi^{+\infty}_{il}=\inf\{\xi^h_{il}\}$ می‌باشد. بدین ترتیب $\lim_{h\to\infty}\xi^h_{il}\ne\epsilon$ و برابر با صفر است.

۵- مثال کاربردی عددی

برای شفاف‌سازی جزئیات روش پیشنهادی و کاربردی بودن آن، در ادامه یک مسئله انتخاب پروژه سرمایه‌گذاری در نظر گرفته شده است. برای انجام این کار، یک مثال کاربردی از هاشمی و همکاران مورد بررسی قرار می‌گیرد [۲۲]. یک تیم مدیریتی جهت انتخاب بهترین پروژه سرمایه‌گذاری

از مدیریت ۵ سازمان برای ارزیابی ۴ پروژه a_1، a_2، a_3 و a_4 دعوت بعمل می‌آورد. جهت رتبه‌بندی پروژه‌ها، تعداد ۵ تصمیم‌گیرنده d_1، d_2، d_3، d_4 و d_5 اولویت‌های خود را نسبت به شاخص‌های مقدار موجودی خالص (c_1)، نرخ بازدهی (c_2)، تحلیل هزینه - سود (c_3) و دوره برگشت سرمایه (c_4) با توجه به جدول ۱ با عبارات کلامی (مقادیر کیفی) ارائه داده‌اند. ماتریس‌های تصمیم توسط هر تصمیم‌گیرنده به ترتیب به صورت R_1، R_2، R_3، R_4 و R_5 نمایش داده شده‌اند که هر ماتریس بصورت 4×4 برای ارزیابی ۴ گزینه ذخیره نسبت به ۴ شاخص می‌باشد.

R_1	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	H	M	VH	H
a_2	M	ML	VL	M
a_3	M	VVL	M	VH
a_4	M	VH	H	M

R_2	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	M	M	M	ML
a_2	M	H	L	H
a_3	L	M	VVL	H
a_4	H	MH	M	VVH

R_3	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	H	H	M	VH
a_2	M	VH	M	H
a_3	VL	M	L	M
a_4	VH	H	VH	M

R_4	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	H	VH	H	ML
a_2	M	H	VL	M
a_3	VL	L	M	M
a_4	VH	M	MH	H

R_5	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	M	M	H	VH
a_2	H	VH	ML	VH
a_3	L	M	VL	M
a_4	M	H	H	VH

جدول ۱: مقیاس اعداد فازی شهودی با توجه به عبارات کلامی

عدد فازی شهودی	عبارت کلامی
(۱ ، ۰ ، ۰)	به شدت زیاد (EH)
(۰/۹ ، ۰/۱ ، ۰)	خیلی خیلی زیاد (VVH)
(۰/۸ ، ۰/۱ ، ۰/۱)	خیلی زیاد (VH)
(۰/۷ ، ۰/۲ ، ۰/۱)	زیاد (H)
(۰/۶ ، ۰/۳ ، ۰/۱)	متوسط زیاد (MH)
(۰/۵ ، ۰/۴ ، ۰/۱)	متوسط (M)
(۰/۴ ، ۰/۵ ، ۰/۱)	متوسط کم (ML)
(۰/۲۵ ، ۰/۶ ، ۰/۱۵)	کم (L)
(۰/۱ ، ۰/۷۵ ، ۰/۱۵)	خیلی کم (VL)
(۰/۱ ، ۰/۹ ، ۰)	خیلی خیلی کم (VVL)

جدول ۲: آستانه‌های ارائه شده توسط تصمیم‌گیرندگان

آستانه‌ها	c_1	c_2	c_3	c_4
q	۰/۱	۰/۳۵-	۰/۱	۰/۳۵-
p	۰/۵	۰/۳	۰/۳	۰/۱-
v	۰/۷	۰/۵	۰/۵	۰/۱

آستانه‌های ارائه شده توسط پنج تصمیم‌گیرنده در جدول ۲ مشخص شده‌اند.

ابتدا با توجه به نوآوری ایجاد شده در این پژوهش و معرفی مدل‌های برنامه‌ریزی خطی معرفی شده با مدل‌های (P) و ($P1$) بردار وزن W برای شاخص‌ها محاسبه می‌شود. این اوزان درجدول۳ لحاظ شده‌اند.

پس از محاسبه ماتریس‌های توافق و مخالف فازی شهودی و تشکیل ماتریس اعتبار، ماتریس‌های جریان برتری F_1^0 تا F_5^0 در ادامه، محاسبه و نشان داده می‌شوند (از نمایش دادن ماتریس‌های توافق و مخالف فازی شهودی و ماتریس اعتبار، صرف نظر می‌گردد).

جدول ۳: وزن نرمال شده شاخص‌ها

k (شمارنده تصمیم‌گیرنده)	w_{1k}	w_{2k}	w_{3k}	w_{4k}
1	۰/۲۲	۰/۲	۰/۲	۰/۳۸
2	۰/۲۲	۰/۲۵	۰/۲۷	۰/۲۷
3	۰/۲	۰/۲	۰/۲	۰/۴۱
4	۰/۲	۰/۲	۰/۲۲	۰/۳۸
5	۰/۲۹	۰/۲	۰/۲۲	۰/۳

$$F_1^0=\begin{pmatrix} - & 5.768919 & -4.77926 & 5.768919 \\ -5.76892 & - & -9.83491 & 0 \\ 4.779263 & 9.83491 & - & 9.83491 \\ -5.76892 & 0 & -9.83491 & - \end{pmatrix}$$

$$F_2^0=\begin{pmatrix} - & -18.5403 & -8.02762 & -26.281 \\ 18.54027 & - & 2.392771 & -6.21251 \\ 8.027619 & -2.39277 & - & -6.21251 \\ 26.28095 & 6.212506 & 6.212506 & - \end{pmatrix}$$

$$F_3^0=\begin{pmatrix} - & 5.098002 & 14.84518 & 14.84518 \\ -5.098 & - & 9.148478 & 3.958267 \\ -14.8452 & -9.14848 & - & -15.1137 \\ -14.8452 & -3.95827 & 15.11369 & - \end{pmatrix}$$

$$F_4^0=\begin{pmatrix} - & -6.89695 & 5.671335 & -20.6467 \\ 6.896951 & - & 3.80014 & -5.61435 \\ -5.67133 & -3.80014 & - & -5.30237 \\ 20.6467 & 5.614347 & 5.302366 & - \end{pmatrix}$$

$$F_5^0=\begin{pmatrix} - & 0 & 14.25806 & 0 \\ 0 & - & 16.47712 & 0 \\ -14.2581 & -16.4771 & - & -14.2581 \\ 0 & 0 & 14.25806 & - \end{pmatrix}$$

سپس شاخص جریان برتری خالص شخصی و شاخص جریان برتری خالص گروهی برای تمام گزینه‌ها محاسبه شده و در جدول ۴ بیان می‌گردند. جدول ۵ اولین رتبه‌بندی شخصی و گروهی چهار گزینه را براساس مقادیر شاخص جریان برتری خالص شخصی و گروهی نشان می‌دهد.
اولین مقادیر شاخص رضایتمندی شخصی و گروهی محاسبه شده و در جدول ۶ خلاصه می‌گردند.

با توجه به اینکه مقدار آستانه پذیرش سطح رضایت‌مندی گروهی، θ، برای به‌دست آوردن رتبه بندی گروهی نهایی ضروری است، اختصاص دادن مقدار بسیار بالا به θ باعث می‌شود که درجه رضایتمندی گروهی قابل قبول براحتی به‌دست نیاید و لازم شود که مسأله طی چندین تکرار حل شود.

جدول ۴: مقادیر شاخص جریان برتری خالص

Φ_1^0	Φ_2^0	Φ_3^0	Φ_4^0	Φ_5^0	Φ_G^0
۶/۷۶	-۵۲/۸۴	۳۴/۷۸	-۲۱/۸۷	۱۴/۲۶	-۳/۷۸
-۱۵/۶	۱۴/۷۲	۸/۰۱	۵/۰۸	۱۶/۴۷	۵/۷۴
۲۴/۴۵	-۰/۵۸	-۳۹/۱۱	-۱۴/۷۷	-۴۴/۹۹	-۱۵/۰
-۱۵/۶	۳۸/۷۱	-۳/۶۹	۳۱/۵۶	۱۴/۲۶	۱۳/۰۵
Φ_1^0	Φ_2^0	Φ_3^0	Φ_4^0	Φ_5^0	Φ_G^0

جدول ۵: اولین رتبه‌بندی‌های شخصی و گروهی

u_1^0	u_2^0	u_3^0	u_4^0	u_5^0	u_G^0
۲	۴	۱	۴	۲	۳
۳	۲	۲	۲	۱	۲
۱	۳	۴	۳	۳	۴
۳	۱	۳	۱	۲	۱
u_1^0	u_2^0	u_3^0	u_4^0	u_5^0	u_G^0

جدول ۶: اولین مقادیر شاخص رضایتمندی شخصی و گروهی

R_g^1	R_g^2	R_g^3	R_g^4	R_g^5	R_G
۰/۵	۱	۰	۱	۰/۵	۰/۶

برای جلوگیری از چنین حالتی در مسائل تصمیم گیری، پارامتر t بعنوان ماکزیمم تعداد تکرار مجاز فرآیند، تعیین می‌شود. در حالتی که نتایج تصمیم گیری از اهمیت بسیار بالایی برخوردار هستند، کمترین مقدار آستانه سطح پذیرش رضایت‌مندی گروهی θ=0.8 در نظر گرفته می‌شود. در حالت عادی جهت به‌دست آوردن نتایج رتبه‌بندی نهایی مسأله، کمترین مقدار θ نزدیک به 0.5 در نظر گرفته می‌شود [۳۱]. در این مثال شاخص

رضایتمندی گروهی قابل قبول به ازای مقادیر مختلفی از θ در جدول۷ مورد بررسی قرار می‌گیرد. طبق مقادیر مشخص شده در جدول ۷، به ازای مقادیر $0.6<\theta\leq 0.9$ بعد از تکرار سوم، مقدار قابل قبول برای R_G به‌دست می‌آید. رتبه‌بندی‌های شخصی و گروهی و مقادیر شاخص رضایتمندی شخصی و گروهی در تکرار سوم، به‌ترتیب در جدول‌های ۸ و ۹ خلاصه شده‌اند (از ارائه رتبه بندی‌های شخصی و گروهی و مقادیر شاخص رضایتمندی شخصی و گروهی در تکرار دوم صرف نظر می‌گردد). در پایان، مقایسه رتبه‌بندی گزینه‌ها بین روش پیشنهادی با مقادیر مختلف آستانه پذیرش θ و روش ارائه شده توسط هاشمی و همکاران در جدول ۱۰ آمده است [۲۲].

جدول ۷: درجه رضایت‌مندی گروهی قابل قبول به ازای مقادیر مختلف θ

تعداد تکرار t	R_G	θ
۰	۰،۶	$\theta \leq 0.6$
۳	۰،۹	$0.6<\theta\leq 0.9$
۶	۱	$0.9<\theta$

جدول ۸: رتبه‌بندی‌های شخصی و گروهی در تکرار سوم

u_1^3	u_2^3	u_3^3	u_4^3	u_5^3	u_G^3
۲	۴	۱	۳	۲	۱
۳	۲	۲	۲	۱	۲
۱	۳	۴	۴	۳	۴
۳	۱	۳	۱	۲	۳

جدول ۹: مقادیر شاخص رضایتمندی شخصی و گروهی در تکرار سوم

R_g^1	R_g^2	R_g^3	R_g^4	R_g^5	R_G
۰/۵	۱	۱	۱/۵	۰/۵	۰/۹

جدول ۱۰: مقایسه نتایج روش پیشنهادی و روش هاشمی و همکاران

روش پیشنهادی	$a_4 \succ a_2 \succ a_1 \succ a_3$	$\theta\leq 0.6$
	$a_1 \succ a_2 \succ a_4 \succ a_3$	$0.6<\theta\leq 0.9$
	$a_1 \succ a_2 \succ a_4 \succ a_3$	$0.9<\theta$
روش هاشمی و همکاران	$a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ a_4$	

با توجه به داده‌های جدول ۱۰ مشخص است که رتبه‌بندی‌های به‌دست آمده از روش پیشنهادی، متفاوت از رتبه‌بندی حاصل از روش هاشمی و همکاران می‌باشد. یک دلیل عمده این تفاوت، شیوه تعیین وزن شاخص‌ها است، که در روش پیشنهادی وزن شاخص‌ها توسط یک مدل برنامه‌ریزی خطی به دست آمده است. اما در روش هاشمی و همکاران، وزن شاخص‌ها توسط نظر شخصی تصمیم‌گیرندگان تعیین گردیده است. دلیل دیگر این تفاوت، عدم استفاده از شاخص رضایتمندی گروهی جهت بدست آوردن رتبه‌بندی نهایی در روش هاشمی و همکاران می‌باشد.

جهت مقایسه روش پیشنهادی با روش هاشمی و همکاران مثالی ذکر شده است که نقاط قوت و ضعف، مشخص شود. در روش پیشنهاد شده علاوه بر این‌که وزن شاخص ها از طریق یک مدل برنامه ریزی خطی به‌دست آمده است، از شاخص رضایتمندی گروهی استفاده شده است که باعث می‌شود رتبه‌بندی‌های به‌دست آمده از دقت بالاتری برخوردار باشند که این امر در روش ارائه شده توسط هاشمی و همکاران مورد بررسی قرار نگرفته است.

بحث و نتیجه‌گیری

در تکنیک‌های تصمیم‌گیری چند شاخصه پس از ارزیابی گزینه‌ها نسبت به شاخص‌ها، گزینه مطلوب انتخاب می‌شود. ضریب اهمیت یا وزن هر شاخص در مسائل تصمیم‌گیری ضروری است. وزن هر شاخص به اهمیت آن نسبت به دیگر شاخص‌ها دلالت دارد. یک انتخاب دقیق از وزن‌ها می‌تواند کمک شایانی در بدست آوردن نتیجه نهایی باشد. در یک سری از تکنیک‌ها، وزن شاخص‌ها براساس نظر شخصی تصمیم‌گیرندگان مشخص می‌شود. در برخی دیگر از روش‌ها، تصمیم‌گیرندگان وزن‌ها را بر

اساس مدل‌های خاصی محاسبه کرده و مورد استفاده قرار می‌دهند. درهمه این روش‌ها گزینه‌های متفاوتی نسبت به شاخص‌ها به صورت مستقل مورد ارزیابی قرار می‌گیرند و در نهایت گزینه‌ها بر اساس مقادیر به‌دست آمده رتبه‌بندی می‌شوند.

برای حل مسائل تصمیم‌گیری گروهی چند شاخصه، تصمیم‌نهایی توسط گروهی از تصمیم‌گیرندگان صورت می‌گیرد. معمولا تصمیم‌گیرندگان از حوزه‌های مختلفی در نظر گرفته می‌شوند و هر تصمیم‌گیرنده ویژگی شخصی خویش را با توجه به دانش و مهارت و تجربیات خود، دارد. از طرفی ممکن است آنها فقط نسبت به برخی از شاخص‌ها اطلاعات جامعی داشته باشند، بنابراین منطقی نیست که وزن شاخص‌ها توسط تصمیم‌گیرندگان انتخاب شود.

با توجه به تاثیر بسزای داده‌های نادقیق در حل و بررسی مسائل تصمیم‌گیری، ممکن است تعیین اولویت‌ها با داده‌های دقیق برای تصمیم‌گیرندگان مشکل باشد. زیرا اکثر اطلاعات در دسترس تصمیم گیرندگان مبهم و نادقیق می‌باشند. از جمله داده‌های نادقیق می‌توان به داده‌های فازی شهودی اشاره نمود.

در این مقاله پس از معرفی مختصری از داده‌های فازی و فازی شهودی، با ارائه یک مدل برنامه‌ریزی خطی تحت محیط فازی شهودی براساس فاصله بین هر گزینه و گزینه ایده‌آل، وزن شاخص‌ها بدون دخالت نظر تصمیم‌گیرندگان و صرفا براساس داده‌های جدول و ماتریس تصمیم، محاسبه گردید و در نهایت گزینه‌ها بر اساس یک روش رتبه‌بندی جدید مبتنی بر روش تسلط تقریبی ۳ ارزیابی و مقایسه شدند. که در این روش تعریف‌های جدیدی برای ماتریس‌های توافق و مخالف بر اساس تابع نمره و همچنین تعریف جدیدی برای ماتریس اعتبار ارائه شده است و در نهایت از روش بزرگترین انحراف به عنوان شاخص رضایت‌مندی گروهی جهت تایید رتبه‌بندی قابل قبول گزینه‌ها استفاده شده است. در ادامه جهت کاربردی بودن مدل پیشنهادی و مقایسه نتایج آن، یک مثال کاربردی عددی مورد بررسی قرار گرفته است.

فهرست منابع

[1] L. A. Zadeh, Fuzzy sets. Information and Control 8 (3) (1965) 338-353.

[2] S. H. Nasseri, A new approach to solve fully fuzzy linear programming with trapezoidal numbers using conversion functions. Journal of New Researches in Mathematics 1(3) (2015) 19-28.

[3] A. Khoshnava, M. R. Mozaffari, Fully fuzzy transporting problem. Journal of New Research in Mathematics 1(3) (2015) 41-54.

[4] A. Ebrahimnejad, S.H. Nasseri, A dual simplex method for bounded linear programmers with fuzzy numbers. International Journal of Mathematics in Operational Research 2(6)(2010)762-779.

[5] S.H. Nasseri, O. Gholami, M. Fallah Jelodard, A new approach based on alpha cuts for solving data envelopment analysis model with fuzzy stochastic inputs and outputs. Journal of New Research in Mathematics2(5)(2016)61-70.

[6] H. Naseri, K. khazaei kohpar, A Parametric Approach to Solving the Fuzzy Multi-Objective Linear Fractional Programming Problem. Journal of New Research in Mathematics 4 (14) (2018) 87-102.

[7] A. Ebrahimnejad, A revisit of a mathematical model for solving fully fuzzy linear programming problem with trapezoidal fuzzy numbers. Journal of New Research in Mathematics 5 (18) (2019) 145-156.

[8] B. Vahdani, M. Salimi, T. Allahviranloo, A Compromise Decision-Making Model Based on TOPSIS and VIKOR for Multi-Objective Large- Scale Nonlinear Programming Problems with A Block Angular Structure under Fuzzy Environment. Journal of New Research in Mathematics 2 (6) (2016) 81-100.

[9] K. T. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems 20(1) (1986), 87-96.

[10] B. Roy, The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods. Theory and Decision 31 (1991) 49-73.

[11] R. Roostaee, M. Izadikhah, F. H. Lotfi, M. Rostamy Malkhalifeh, A multi-criteria intuitionistic fuzzy group decision making method for supplier selection with VIKOR method. International Journal of Fuzzy System Applications 2 (1) (2012) 1-17.

[12] R. Duan, Q. Han, Z. Wang, Multi attribute group decision making models under intuitionistic fuzzy environment. Applied Mechanics and Materials 263 (2012) 3225-3229.

[13] Z. S. Xu, Multi-person multi-attribute decision making models under intuitionistic fuzzy environment. Fuzzy Optimization and Decision Making 6 (2007) 221-236.

[14] Z. S. Xu, A deviation-based approach to intuitionistic fuzzy multiple attribute group decision making. Group Decision and Negotiation 19(2010)57-76.

[15] S. M. Chen, J. M. Tan, Handling multi criteria fuzzy decision making problems based on vague set theory. Fuzzy Sets and Systems 67 (2) (1994)- 163-172.

[16] F. Shen, J. Xu, Z. Xu, An automatic ranking approach for multi-criteria group

[24] S. M. Chen, S. H. Cheng, C. H. Chiou, Fuzzy multi attribute group decision making based on intuitionistic fuzzy sets and evidential reasoning methodology. Information Fusion 27 (2016) 215-227.

[25] Z. Wu, J. Ahmad, J. Xu, A group decision making framework based on fuzzy VIKOR approach for machine tool selection with linguistic information. Applied Soft Computing 42 (2016) 314-324.

[26] P. Sevastjanov, L. Dymova, Generalised operations on hesitant fuzzy values in the framework of Dempster-Shafer theory. Information Sciences 311 (2015) 39-58.

[27] Z. Eslaminasab, A. Hamzehee, Determining appropriate weight for criteria in multi criteria group decision making problems using an Lp model and similarity measure. Iranian Journal of Fuzzy Systems 16 (3) (2019) 35-46.

[28] Z. S. Xu, Intuitionistic fuzzy aggregation and clustering. Berlin, Heidelberg: Springer, 2012.

[29] D. H. Hong, C. H. Choi, Multi criteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory. Fuzzy Sets and Systems 114 (1) (2000) 103-113.

[30] A. A. Goshtasby, Similarity and dissimilarity measures. In: Image Registration. Advances in Computer Vision and Pattern Recognition. Springer, London, 2012.

[31] F. Mata, L. Mart´ınez, E. Herrera-Viedma, An Adaptive Consensus Support Model for Group Decision-Making Problems in a Multi granular Fuzzy Linguistic Context. IEEE Transactions on fuzzy Systems 17 (2) (2009) 279-290.

decision making under intuitionistic fuzzy environment. Fuzzy Optimization and Decision Making 14 (2015) 311-334.

[17] F. Shen, J. Xu, Z. Xu, An outranking sorting method for multi-criteria group decision making using intuitionistic fuzzy sets. Information Sciences 334 (2016) 338-353.

[18] Z. Wang, J. Xu, W. Wang, Intuitionistic fuzzy multiple attribute group decision making based on projection method, Control and Decision Conference, Chinese, 2009.

[19] Z. Yue, TOPSIS-based group decision making methodology in intuitionistic fuzzy setting. Information Sciences 227 (2014), 141-153.

[20] Z. Yue, Developing a straightforward approach for group decision making based on determining weights of decision makers. Applied Mathematical Modelling 36 (9) (2012), 4106-4117.

[21] F. Ghaemi-Nasab, M. Rostamy-Malkhalifeh, R. Mehrjoo, Decision-Makers Weighting in Fuzzy Multiple Attributes Group Decision-Making. Journal of Communication and Computer 8 (2011) 247-251

[22] S. S. Hashemi, S. H. Razavi Hajiagha, E. K. Zavadskas, H. Amoozad Mahdiraji, Multi criteria group decision making with ELECTRE III method based on interval-valued intuitionistic fuzzy information. Applied Mathematical Modelling 40 (2016) 1554-1564.

[23] S. Xian, W. Sun, S. Xu, Y. Gao, Fuzzy linguistic induced OWA Minkowski distance operator and its application in group decision making. Pattern Anal Applic 19 (2016) 325-335.