دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی و یکم، مرداد و شهریور ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

تعیین جواب بهینه معادله‌ی کوپر- اشمیت با پیاده سازی روش‌های بسط پایه‌های ژاکوپی و ایرفویل

شادان صدیق بهزادی[*1]، فاطمه گروه‌ای[2]، علی رفیعی[3]

[(۱و۲و۳)] گروه ریاضی و آمار، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قزوین، قزوین، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۱۰/۰۳   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۳/۰۹

چکیده

در این مقاله، معادله‌ی کوپر –اشمیت را به روش هم محلی با پایه‌های ژاکوپی و ایرفویل، حل می‌کنیم. این معادله PDE یکی از معادلات مهم و پرکاربرد در فیزیک و شیمی است. این معادله غیرخطی درمهندسی مکانیک به صورت پدیده موج ظاهر شده، و در فیزیک پلاسما درباره سیستم‌هایی بحث می‌کند که از ذرّات باردار مثبت و منفی تشکیل شده‌اند و می‌توانند آزادانه حرکت کنند. مقایسه سطح تولیدات گرم الکترون و سطح آن باعث انتشار هارمونیک برخی از نشانه‌های منشاء می‌شود والکترون‌های گرما در پلاسما، به صورت کروی تابش می‌شوند [۱]. معادله کوپر-اشمیت نقش مهمی در پراکندگی غیر خطی موج ایفا می کند. امواج انفرادی در پراکندگی غیر خطی رسانه‌ها پخش می‌شوند. این امواج یک فرم پایدار را حفظ می‌کنند. به دلیل تعادل پویا و غیر خطی بودن این معادله راه حل تقریبی در بسیاری از مقالات ارائه شده است [۲و۳]. در این مقاله با پیاده‌سازی روش‌های عددی روی معادله مورد نظر، دستگاه‌های غیر خطی حاصل می‌شود که می‌توان آنها را با روش‌های حل دستگاه‌های غیرخطی، مثل روش تکراری نیوتن حل کرد. وجود، یکتایی جواب و همگرایی روش‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد و در مثالی نشان خواهیم داد که با تکرار کم به معیار توقف $\frac{|u_{n+1}-u_n|}{u_n} \prec \varepsilon$ می‌توان رسید و این نشان دهنده‌ی دقت جواب با این روش‌ها است.

کلمات کلیدی: روش هم محلی، معادله‌ی کوپر-اشمیت، پایه متعامد ژاکوپی، پایه متعامد ایرفویل.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: shadan_behzadi@yahoo.com

۱- مقدمه

معادله کوپر-اشمیت در فیبرهای نوری، در تشخیص بیماری‌ها و آزمایش‌های گوناگون در پزشکی کاربرد فراوان دارد، که ازآن جمله می‌توان دُزیمتری غدد سرطانی، شناسایی نارسایی‌های داخلی بدن، جراحی لیزری، استفاده در دندانپزشکی و اندازه‌گیری مایعات و خون را نام برد. همچنین تارهای نوری در دستگاه‌هایی به نام درون‌بین یا آندوسکوپ استفاده می‌شود [۴]. کاربردهای دیگر فیبرنوری در علوم هوافضا، نظامی، خودرو، سنسورها، سنجش زیست محیطی، انتقال سیگنال، تصویربرداری، نور پردازی و بخش صنعت می‌باشد. فیبرنوری نقش بزرگی در توسعه انواع صنایع دارد، که ارتباطات، ارتباط داده، جمع‌آوری داده، تصویر برداری و به کارگیری روش‌های ارتباطی خاص در ظرفیت‌های بالا را برای صنایع اداری و تجاری فراهم می‌کند. بیشتر کاربردهای تجاری و صنعتی‌ای که در آنها از فیبر نوری استفاده شده به منظور ساخت محصولاتی با ساخت و ساز و یا عملکرد خاص برای افزایش اطمینان از عملکرد مناسب آنها می‌باشد. بحث سالیتون در ریاضیات و فیزیک، یک موج منزوی خود-تقویت‌کننده (یک بسته موج یا پالس) است که وقتی با سرعت ثابت حرکت می‌کند شکلش را حفظ می‌کند. سالیتون‌ها در نتیجه خنثی‌سازی آثار غیرخطی و پاشندگی در محیط حاصل می‌شوند که به رابطه پراش بین فرکانس و سرعت امواج بر می‌گردند. سالیتون‌ها به عنوان جواب‌های دسته‌ی گسترده‌ای از معادلات دیفرانسیل جزئی بطور غیرخطی پاشنده ناشی می‌شوند که سیستم‌های فیزیکی را توصیف می‌کنند [۴]. این ویژگی در بسیاری از برنامه‌های کاربردی استفاده می‌شود، از جانب هیدرودینامیک به اپتیک غیر خطی، از پلاسما و شوک امواج، از تورنادو تا نقطه قرمز بزرگ مشتری از جریان ترافیک به اینترنت و از سونامی تا آشفتگی [۵]. اخیرا، بخاطر اهمیت کلیدی در زمینه‌های کوانتومی و فناوری نانو به ویژه در نانو هیدرودینامیک از سالیتون‌ها استفاده شده است[۶]. بسیاری از ریاضیدانان مقالاتی را برای معادله کوپر اشمیت نوشتند، به عنوان مثال [۷-۸] را ببینید. معادلات کوپر- اشمیت نقش مهمی در مطالعه امواج پراکنده غیرخطی ایفا می‌کند (عبدلوت ۱۹۷۶؛ بونا و همکاران، ۱۹۸۵) به دلیل توصیف پدیده‌هایی مانند امواج آب‌های کم عمق و موج‌های پلاسمای صوتی یونی، ازلحاظ فیزیکی مهم است [۹]. ظاهر موج انفرادی در طبیعت نسبتا زیاد تکرار می‌شود، به ویژه در مایعات، پلاسما، فیزیک حالت جامد، فیزیک ماده چگال، فیبرنوری، شیمیایی‌سینماتیک، مدارهای الکتریکی، ژنتیک زیستی، رسانه الاستیک و غیره. معادلات دیفرانسیل جزئی (PDEs) در بسیاری از زمینه‌های علم کاربرد دارد و در سال‌های اخیر بسیار مورد بررسی قرار می‌گیرد و حل دقیق معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی اهمیت زیادی در علم دارد. معادله کوپر- اشمیت در مقالات زیادی مورد بررسی و حل قرار گرفته است. و راه حل های زیادی پیشنهاد شده است [۱۰] اما تاکنون روی حالت کسری این معادله تحقیقاتی صورت نگرفته است. در بخش دوم این مقاله به معرفی روش‌های هم محلی با پایه‌های ژاکوپی و ایرفویل می‌پردازیم و در بخش سوم وجود یکتایی جواب بررسی شده وبه اثبات همگرایی جواب خواهیم پرداخت. در بخش چهارم با بیان الگوریتم و آوردن یک مثال عددی به بررسی و مقایسه سرعت همگرایی پرداخته و در بخش پنجم با بیان نتیجه‌گیری، به بیان مزیت روش‌ها اشاره‌ای خواهیم داشت.

۲- ۲- معرفی روش‌های هم محلی

۲-۱- چند جمله‌ای ژاکوپی

چند جمله‌ای ژاکوپی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u_n(x,t)=$$
$$w(x)w(t)\sum_{i=0}^{n}a_i p_i^{\alpha,\beta}(x)p_i^{\alpha,\beta}(t),\alpha,\beta\succ -1, \tag{۱}$$
$$w(x)=\frac{(1-x)^{\alpha}}{(1+x)^{\beta}}\qquad w(x)=\frac{(1-t)^{\alpha}}{(1+t)^{\beta}}$$
$$p_i^{\alpha,\beta}(x)=$$
$$\frac{(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}}{(-2)^i i!}.\frac{d^i}{dx^i}\left[(1-x)^{i+\alpha}(1+x)^{i+\beta}\right],$$
$$\left(p_i^{\alpha,\beta}\right)'(x)=$$
$$\frac{1}{2}(i+\alpha+\beta+1)p_i^{(\alpha+1,\beta+1)}(x).$$

در حالت کلی داریم:

$$\left(p_i^{\alpha,\beta}\right)^{(m)}(x)=$$
$$\frac{1}{m!}(i+\alpha+\beta+m)p_{i-m}^{(\alpha+m,\beta+m)}(x),i\ge m,$$
$$p_i^{\alpha,\beta}(t)=$$
$$\frac{(1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta}}{(-2)^i i!}.\frac{d^i}{dx^i}\left[(1-t)^{i+\alpha}(1+t)^{i+\beta}\right],$$
$$\left(p_i^{\alpha,\beta}\right)^{(m)}(t)=$$
$$\frac{1}{m!}(i+\alpha+\beta+m)p_{i-m}^{(\alpha+m,\beta+m)}(t),i\ge m.$$

۲-۲- چند جمله‌ای ایرفویل

$$u_n(x,t)=w(x)w(t)\sum_{i=0}^{n}\alpha_i s_i(x)s_i(t), \tag{۲}$$
$$w(x)=\sqrt{\frac{(1+t)}{(1-t)}},\quad w(x)=\sqrt{\frac{(1+x)}{(1-x)}}$$
$$s_i(t)=\frac{\cos\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)\arccos t\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\arccos t\right]},$$
$$s_i(x)=\frac{\cos\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)\arccos x\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\arccos x\right]},$$
$$u_i(t)=\frac{\sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)\arccos t\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\arcsin t\right]},$$
$$u_i(x)=\frac{\sin\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)\arccos x\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\arcsin x\right]},$$
$$(1+x)s_i'(x)=\left(i+\frac{1}{2}\right)u_i(x)-\frac{1}{2}s_i(x),$$
$$(1+t)s_i'(t)=\left(i+\frac{1}{2}\right)u_i(t)-\frac{1}{2}s_i(t).$$

۲-۳- معرفی معادله کوپر- اشمیت و حل آن با چندجمله‌ای ژاکوپی

معادله کوپر- اشمیت را با شرایط اولیه $u(x,0)=f(x)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u_t=u_{xxxxx}+10u_{xxx}u+25u_{xx}u_x+20u^2u_x. \tag{۳}$$

برای حل معادله داریم:

$$u(x,t)-u(x,0)=$$
$$\int_0^t u_{xxxxx}dt+10\int_0^t u_{xxx}u\,dt+25\int_0^t u_{xx}u_x dt+20\int_0^t u^2u_x dt. \tag{۴}$$

بنابر معادله (۱) و مشتق گیری نسبت به x داریم:

$$u(x,t)=$$
$$w(t).[w'(x)\sum_{i=0}^{n}a_i p_i^{\alpha,\beta}(x)p_i^{\alpha,\beta}(t)+ \tag{۵}$$
$$w(x)\sum_{i=0}^{n}a_i\left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)'p_i^{\alpha,\beta}(t)].$$
$$u_{xx}=$$
$$w(t)[w''(x)\sum_{i=0}^{n}a_i p_i^{\alpha,\beta}(x)p_i^{\alpha,\beta}(t)+ \tag{۶}$$
$$2w'(x)\sum_{i=0}^{n}a_i\left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)'p_i^{\alpha,\beta}(t)+$$
$$w(x)\sum_{i=0}^{n}a_i\left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)''p_i^{\alpha,\beta}(t)],$$
$$u_{xxx}=w(t)[w^{(3)}(x)\sum_{i=0}^{n}a_i p_i^{\alpha,\beta}(x)p_i^{\alpha,\beta}(t)+ \tag{۷}$$
$$3w''(x)\sum_{i=0}^{n}a_i\left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)'p_i^{\alpha,\beta}(t)$$
$$3w'(x)\sum_{i=0}^{n}a_i\left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)''p_i^{\alpha,\beta}(t)+$$
$$w(x)\sum_{i=0}^{n}a_i\left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)^{(3)}p_i^{\alpha,\beta}(t)],$$
$$u_{xxxx}=w(t)[w^{(4)}(x)\sum_{i=0}^{n}a_i p_i^{\alpha,\beta}(x)p_i^{\alpha,\beta}(t)+ \tag{۸}$$
$$4w^{(3)}(x)\sum_{i=0}^{n}a_i\left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)'p_i^{\alpha,\beta}(t)+$$
$$6w''(x)\sum_{i=0}^{n}a_i\left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)''p_i^{\alpha,\beta}(t)+$$
$$4w'(x)\sum_{i=0}^{n}a_i\left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)^{(3)}p_i^{\alpha,\beta}(t)+$$
$$w(x)\sum_{i=0}^{n}a_i\left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)^{(4)}p_i^{\alpha,\beta}(t)],$$

$$
\begin{aligned}
u_{xxxxx} = w(t)[&w^{(5)}(x)\sum_{i=0}^{n} a_i p_i^{\alpha,\beta}(x)\, p_i^{\alpha,\beta}(t) + \\
&5w^{(4)}(x)\sum_{i=0}^{n} a_i \left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)^{/} p_i^{\alpha,\beta}(t) + \\
&10w^{(3)}(x)\sum_{i=0}^{n} a_i \left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)^{//} p_i^{\alpha,\beta}(t) + \\
&10w^{//}(x)\sum_{i=0}^{n} a_i \left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)^{(3)} p_i^{\alpha,\beta}(t) + \\
&5w^{/}(x)\sum_{i=0}^{n} a_i \left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)^{(4)} p_i^{\alpha,\beta}(t) + \\
&w(x)\sum_{i=0}^{n} a_i \left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)^{(5)} p_i^{\alpha,\beta}(t)].
\end{aligned} \tag{۹}
$$

پس با جاگذاری در معادله (۴) خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = f(x) + &\\
\int_0^t w(t)[&w^{(5)}(x)\sum_{i=0}^{n} a_i p_i^{\alpha,\beta}(x)\, p_i^{\alpha,\beta}(t) + \\
&5w^{(4)}(x)\sum_{i=0}^{n} a_i \left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)^{/} p_i^{\alpha,\beta}(t) + \\
&10w^{(3)}(x)\sum_{i=0}^{n} a_i \left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)^{//} p_i^{\alpha,\beta}(t) + \\
&10w^{//}(x)\sum_{i=0}^{n} a_i \left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)^{(3)} p_i^{\alpha,\beta}(t) + \\
&5w^{/}(x)\sum_{i=0}^{n} a_i \left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)^{(4)} p_i^{\alpha,\beta}(t) + \\
&w(x)\sum_{i=0}^{n} a_i \left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)^{(5)} p_i^{\alpha,\beta}(t)]dt + \\
\int_0^t 10(w(t)[&w^{(3)}(x)\sum_{i=0}^{n} a_i p_i^{\alpha,\beta}(x)\, p_i^{\alpha,\beta}(t) + \\
&3w^{//}(x)\sum_{i=0}^{n} a_i \left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)^{/} p_i^{\alpha,\beta}(t) + \\
&3w^{/}(x)\sum_{i=0}^{n} a_i \left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)^{//} p_i^{\alpha,\beta}(t) + \\
&w(x)\sum_{i=0}^{n} a_i \left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)^{(3)} p_i^{\alpha,\beta}(t)]u(x,t))dt + \\
\int_0^t 25(w(t)[&w^{//}(x)\sum_{i=0}^{n} a_i p_i^{\alpha,\beta}(x)\, p_i^{\alpha,\beta}(t) + \\
&2w^{/}(x)\sum_{i=0}^{n} a_i \left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)^{/} p_i^{\alpha,\beta}(t) + \\
&w(x)\sum_{i=0}^{n} a_i \left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)^{/} p_i^{\alpha,\beta}(t) + \\
&w(x)\sum_{i=0}^{n} a_i \left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)^{//} p_i^{\alpha,\beta}(t)] \times \\
&(w(t)[w^{/}(x)\sum_{i=0}^{n} a_i p_i^{\alpha,\beta}(x)\, p_i^{\alpha,\beta}(t) + \\
&w(x)\sum_{i=0}^{n} a_i \left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)^{/} p_i^{\alpha,\beta}(t)]]))dt + \\
\int_0^t 20(u^2(x,t)&w(t)[w^{/}(x)\sum_{i=0}^{n} a_i p_i^{\alpha,\beta}(x)\, p_i^{\alpha,\beta}(t) + \\
&w(x)\sum_{i=0}^{n} a_i \left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)^{/} p_i^{\alpha,\beta}(t)])dt.
\end{aligned} \tag{۱۰}
$$

با تبدیل روابط بالا به صورت ماتریس خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
A_{ij} &= \sum_{i=0}^{n} a_i p_i^{\alpha,\beta}(x_i)\, p_i^{\alpha,\beta}(t_j), \\
B_{ij} &= \sum_{i=0}^{n} a_i \left(p_i^{\alpha,\beta}(x)\right)^{/} p_i^{\alpha,\beta}(t_j), \\
C_{ij} &= \sum_{i=0}^{n} a_i \left(p_i^{\alpha,\beta}(x_i)\right)^{//} p_i^{\alpha,\beta}(t_j), \\
D_{ij} &= \sum_{i=0}^{n} a_i \left(p_i^{\alpha,\beta}(x_i)\right)^{(3)} p_i^{\alpha,\beta}(t_j), \\
E_{ij} &= \sum_{i=0}^{n} a_i \left(p_i^{\alpha,\beta}(x_i)\right)^{(4)} p_i^{\alpha,\beta}(t_j), \\
F_{ij} &= \sum_{i=0}^{n} a_i \left(p_i^{\alpha,\beta}(x_i)\right)^{(5)} p_i^{\alpha,\beta}(t_j),
\end{aligned} \tag{۱۱}
$$

پس خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = f(x) + &\\
\int_0^t w(t)[&w^{(5)}(x)A_{ij} + 5w^{(4)}(x)B_{ij} + \\
&10w^{(3)}(x)C_{ij} + 10w^{//}(x)D_{ij} + \\
&5w^{/}(x)E_{ij} + w(x)F_{ij}]dt + \\
\int_0^t 10(w(t)[&w^{(3)}(x)A_{ij} + \\
&3w^{//}(x)B_{ij} + 3w^{/}(x)C_{ij} + \\
&w(x)D_{ij}] \times u(x,t)dt + \\
\int_0^t 25(w(t) \times &\\
[&w^{//}(x)A_{ij} + \\
&2w^{/}(x)B_{ij} + \\
&w(x)C_{ij}] \times (w(t)[w^{/}(x)A_{ij} + w(x)B_{ij}]))dt + \\
\int_0^t 20(u^2(x,t)&w(t)[w^{/}(x)A_{ij} + \\
&w(x)B_{ij})dt.
\end{aligned} \tag{۱۲}
$$

با قرار دادن

$$
\begin{aligned}
&w(t) = e, w(x) = p, \\
&w^{/}(x) = q, w^{//}(x) = r, \\
&w^{(3)}(x) = s, w^{(4)}(x) = m, \\
&w^{(5)}(x) = n.
\end{aligned}
$$

داریم:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f(x) + \\ &\int_0^t e[nA_{ij} + 5mB_{ij} + \\ &10sC_{ij} + 10rD_{ij} + \\ &5qE_{ij} + pF_{ij}]dt + \\ &10\int_0^t (e[sA_{ij} + 3rB_{ij} + 3qC_{ij} + \\ &pD_{ij}].u(x,t)dt \\ &\int_0^t 25(e[rA_{ij} + 2qB_{ij} + \\ &pC_{ij}].(e[qA_{ij} + pB_{ij}]))dt + \\ &\int_0^t 20(u^2(x,t).e[qA_{ij} + pB_{ij}])dt. \end{aligned} \tag{۱۳}$$

این معادله به صورت یک ماتریس نوشته شده و قابل حل به کمک روش‌های حل عددی می‌باشد.

۲-۳- معرفی معادله کوپر- اشمیت و حل آن با چندجمله‌ای ایرفویل

معادله کوپر-اشمیت را با شرایط اولیه

$$u(x,0) = f(x)$$

به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u_t = u_{xxxxx} + 10u_{xxx}u + 25u_{xx}u_x + 20u^2u_x. \tag{۱۴}$$

برای حل معادله داریم:

$$\begin{aligned} u(x,t) - u(x,0) &= \\ \int_0^t u_{xxxxx}dt &+ 10\int_0^t u_{xxx}udt + \\ 25\int_0^t u_{xx}u_xdt &+ 20\int_0^t u^2u_xdt. \end{aligned} \tag{۱۵}$$

بنابر معادله (۱) و مشتق‌گیری نسبت به x داریم:

$$u(x,t) = w(t).\left[w'(x)\sum_{i=0}^n a_i s_i(x) s_i(t) + w(x)\sum_{i=0}^n a_i (s_i(x))' s_i(t)\right] \tag{۱۶}$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= w(t).[w''(x)\sum_{i=0}^n a_i s_i(x) s_i(t) + \\ &2w'(x)\sum_{i=0}^n a_i (s_i(x))' s_i(t) + \\ &w(x)\sum_{i=0}^n a_i (s_i(x))'' s_i(t)], \end{aligned} \tag{۱۷}$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= w(t).[w''(x)\sum_{i=0}^n a_i s_i(x) s_i(t) + \\ &2w'(x)\sum_{i=0}^n a_i (s_i(x))' s_i(t) + \\ &w(x)\sum_{i=0}^n a_i (s_i(x))'' s_i(t)], \end{aligned} \tag{۱۸}$$

$$\begin{aligned} u_{xxxx} &= w(t).[w^{(4)}(x)\sum_{i=0}^n a_i s_i(x) s_i(t) + \\ &4w^{(3)}(x)\sum_{i=0}^n a_i (s_i(x))' s_i(t) + \\ &6w''\sum_{i=0}^n a_i (s_i(x))'' s_i(t) + \\ &4w'\sum_{i=0}^n a_i (s_i(x))^{(3)} s_i(t) + \\ &w(x)\sum_{i=0}^n a_i (s_i(x))^{(4)} s_i(t)], \end{aligned} \tag{۱۹}$$

$$\begin{aligned} u_{xxxxx} &= \\ &w(t)\times[w^{(5)}(x)\sum_{i=0}^n a_i s_i(x) s_i(t) + \\ &5w^{(4)}(x)\sum_{i=0}^n a_i (s_i(x))' s_i(t) + \\ &10w^{(3)}(x)\sum_{i=0}^n a_i (s_i(x))'' s_i(t) + \\ &10w''\sum_{i=0}^n a_i (s_i(x))^{(3)} s_i(t) \\ &5w'(x)\sum_{i=0}^n a_i (s_i(x))^{(4)} s_i(t) + \\ &w(x)\sum_{i=0}^n a_i (s_i(x))^{(5)} s_i(t)]. \end{aligned} \tag{۲۰}$$

پس با جاگذاری در معادله (۱۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f(x) + \\ &\int_0^t w(t).[w^{(5)}(x)\sum_{i=0}^n a_i s_i(x) s_i(t) + \\ &5w^{(4)}(x)\sum_{i=0}^n a_i (s_i(x))' s_i(t) + \\ &10w^{(3)}(x)\sum_{i=0}^n a_i (s_i(x))'' s_i(t) + \\ &10w''\sum_{i=0}^n a_i (s_i(x))^{(3)} s_i(t) + \\ &5w'(x)\sum_{i=0}^n a_i (s_i(x))^{(4)} s_i(t) + \\ &w(x)\sum_{i=0}^n a_i (s_i(x))^{(5)} s_i(t)].dt + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&10\int_0^t (w(t).[w^{(3)}(x)\sum_{i=0}^{n} a_i s_i(x) s_i(t) + \\
&3w^{(2)}(x)\sum_{i=0}^{n} a_i \big(s_i(x)\big)^{/} s_i(t) + \\
&3w^{/}\sum_{i=0}^{n} a_i \big(s_i(x)\big)^{//} s_i(t) + \\
&w(x)\sum_{i=0}^{n} a_i \big(s_i(x)\big)^{(3)} s_i(t)]) u(x,t)dt + \\
&25\int_0^t w(t).[w^{//}(x)\sum_{i=0}^{n} a_i s_i(x) s_i(t) + \\
&2w^{/}(x)\sum_{i=0}^{n} a_i \big(s_i(x)\big)^{/} s_i(t) + \\
&w(x)\sum_{i=0}^{n} a_i \big(s_i(x)\big)^{//} s_i(t)]\times \\
&(w(t)\times w^{/}(x)\sum_{i=0}^{n} a_i s_i(x) s_i(t) + \\
&w(x)\sum_{i=0}^{n} a_i \big(s_i(x)\big)^{/} s_i(t))dt + \\
&20\int_0^t u^{2}(x,t).(w(t). \\
&w^{/}(x)\sum_{i=0}^{n} a_i s_i(x) s_i(t) + \\
&w(x)\sum_{i=0}^{n} a_i \big(s_i(x)\big)^{/} s_i(t))dt.
\end{aligned}
\qquad (۲۱)
$$

با تبدیل روابط بالا به صورت ماتریس خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
M_{ij} &= \sum_{i=0}^{n} a_i s_i(x_i) s_i(t_j), \\
N_{ij} &= \sum_{i=0}^{n} a_i \big(s_i(x_i)\big)^{/} s_i(t_j), \\
O_{ij} &= \sum_{i=0}^{n} a_i \big(s_i(x_i)\big)^{//} s_i(t_j), \\
P_{ij} &= \sum_{i=0}^{n} a_i \big(s_i(x_i)\big)^{(3)} s_i(t_j), \\
Q_{ij} &= \sum_{i=0}^{n} a_i \big(s_i(x_i)\big)^{(4)} s_i(t_j), \\
R_{ij} &= \sum_{i=0}^{n} a_i \big(s_i(x_i)\big)^{(5)} s_i(t_j),
\end{aligned}
$$

پس خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&u(x,t) = f(x) + \\
&\int_0^t w(t).[w^{(5)}(x) M_{ij} + 5w^{(4)}(x) N_{ij} + \\
&10w^{(3)}(x) O_{ij} + 10w^{//} P_{ij} + \\
&5w^{/}(x) Q_{ij} + w(x) R_{ij}]dt + \\
&10\int_0^t (w(t).[w^{(3)}(x) M_{ij} + \\
&3w^{(2)}(x) N_{ij} + 3w^{/} O_{ij} + \\
&w(x) P_{ij}]).u(x,t)dt + \\
&25\int_0^t w(t).[w^{//}(x) M_{ij} + \\
&2w^{/}(x) N_{ij} + w(x) O_{ij}]\times \\
&(w(t) w^{/}(x) M_{ij} + \\
&w(x) N_{ij})dt + 20\int_0^t u^{2}(x,t).(w(t). \\
&w^{/}(x) M_{ij} + w(x) N_{ij})dt.
\end{aligned}
\qquad (۲۲)
$$

با قرار دادن

$$
\begin{aligned}
&w(t) = e, w(x) = p, \\
&w^{/}(x) = q, w^{//}(x) = r, \\
&w^{(3)}(x) = s, w^{(4)}(x) = m, \\
&w^{(5)}(x) = n.
\end{aligned}
$$

داریم:

$$
\begin{aligned}
&u(x,t) = f(x) + \\
&\int_0^t e.[nM_{ij} + 5mN_{ij} + \\
&10sO_{ij} + 10rP_{ij} + 5qQ_{ij} + pR_{ij}]dt + \\
&10\int_0^t (e.[sM_{ij} + 3rN_{ij} + 3qO_{ij} + \\
&pP_{ij}])u(x,t)dt + 25\int_0^t e.[rM_{ij} + \\
&2qN_{ij} + pO_{ij}]\times(e\,q M_{ij} + \\
&pN_{ij})dt + 20\int_0^t u^{2}(x,t).(e.q M_{ij} + pN_{ij})dt.
\end{aligned}
$$

این معادله به صورت یک ماتریس نوشته شده و قابل حل به کمک روش‌های حل عددی می‌باشد.

۳- اثبات‌ها

۳-۱- وجود و یکتایی جواب

مسئله جواب یکتا دارد وقتی که $0 \prec \alpha_1 \prec 1$ و

مقدار $\alpha_1=T(L_1+L_2+L_3+L_4)$ باشد. فرض کنیم:

$$\begin{aligned}
&u_{xxxxx}(x,t)=F_1(u(x,t)),\\
&u_{xxx}(x,t)u(x,t)=F_2(u(x,t)),\\
&u_{xx}(x,t)u_x(x,t)=F_3(u(x,t)),\\
&u^2(x,t)u_x(x,t)=F_4(u(x,t)).\\
&\forall x\in J=[0,T],\ 0\prec t\prec T.
\end{aligned}$$

تابع $u(x,t)$ در شرط لیپ شیتز صدق می‌کند و داریم:

$$\begin{aligned}
&\|F_1(u(x,t))-F_1(u^*(x,t))\|\le L_1\|u(x,t)-u^*(x,t)\|,\\
&\|F_2(u(x,t))-F_2(u^*(x,t))\|\le L_2\|u(x,t)-u^*(x,t)\|,\\
&\|F_3(u(x,t))-F_3(u^*(x,t))\|\le L_3\|u(x,t)-u^*(x,t)\|,\\
&\|F_4(u(x,t))-F_4(u^*(x,t))\|\le L_4\|u(x,t)-u^*(x,t)\|.
\end{aligned}$$

اثبات: فرض می‌کنیم مسئله جواب یکتا نداشته باشد و $u(x,t)$ و $u^*(x,t)$ جواب‌های مسئله باشند، داریم:

$$\begin{aligned}
&\|u(x,t)-u^*(x,t)\|=\\
&\|\int_0^t F_1(u(x,t))d\tau+10\int_0^t F_2(u(x,t))d\tau+\\
&25\int_0^t F_3(u(x,t))d\tau+20\int_0^t F_4(u(x,t))d\tau-\\
&(\int_0^t F_1(u^*(x,t))d\tau+10\int_0^t F_2(u^*(x,t))d\tau+\\
&25\int_0^t F_3(u^*(x,t))d\tau+20\int_0^t F_4(u^*(x,t))d\tau)\|\le\\
&\int_0^t\|F_1(u(x,t))-F_1(u^*(x,t))\|d\tau+\\
&10\int_0^t\|F_2(u(x,t))-F_2(u^*(x,t))\|d\tau+\\
&25\int_0^t\|F_3(u(x,t))-F_3(u^*(x,t))\|d\tau+\\
&20\int_0^t\|F_4(u(x,t))-F_4(u^*(x,t))\|d\tau\\
&\le L_1\|u(x,t)-u^*(x,t)\|+10L_2\|u(x,t)-u^*(x,t)\|+\\
&25L_3\|u(x,t)-u^*(x,t)\|+20L_4\|u(x,t)-u^*(x,t)\|\\
&\le T(L_1+L_2+L_3+L_4)=\alpha_1|u-u^*|
\end{aligned}$$

پس $(1-\alpha_1)|u-u^*|\le 0$ و در نتیجه $u(x,t)=u^*(x,t)$.

۳-۲- همگرایی روش‌ها

۱-۳-۲- همگرایی روش هم محلی ژاکوپی

قضیه ۱: کران بالای معادله‌ی $u_n(x,t)=\sum_{i=0}^{n}a_i p_i^{\alpha,\beta}(x)p_i^{\alpha,\beta}(t)$ برای مسئله ۱ به کمک روش هم محلی ژاکوپی به مقدار زیر همگراست:

$$|E_n(x,t),0|\le c_1\frac{n^{-z+1}}{1-z}+c_2n^{-z+1}.$$

اثبات: داریم:

$$\begin{aligned}
&|\sum_{i=0}^{n}a_i p_i^{\alpha,\beta}(x)p_i^{\alpha,\beta}(t),\sum_{i=0}^{n}a_i^{(n)}p_i^{\alpha,\beta}(x)p_i^{\alpha,\beta}(t)|\\
&|\sum_{i=0}^{n}a_i p_i^{\alpha,\beta}(x)p_i^{\alpha,\beta}(t)+\\
&\sum_{i=0}^{n}a_i^{(n)}p_i^{\alpha,\beta}(x)p_i^{\alpha,\beta}(t),\sum_{i=0}^{n}a_i^{(n)}p_i^{\alpha,\beta}(x)p_i^{\alpha,\beta}(t)|\\
&\le|\sum_{i=0}^{n}a_i p_i^{\alpha,\beta}(x)p_i^{\alpha,\beta}(t),\\
&\sum_{i=0}^{n}a_i^{(n)}p_i^{\alpha,\beta}(x)p_i^{\alpha,\beta}(t)|+\\
&|\sum_{i=n+1}^{\infty}a_i^{(n)}p_i^{\alpha,\beta}(x)p_i^{\alpha,\beta}(t),0|\\
&\le\sum_{i=0}^{n}|p_i^{\alpha,\beta}(x)p_i^{\alpha,\beta}(t)||a_i-a_i^{(n)}|+\\
&\sum_{i=n+1}^{\infty}|p_i^{\alpha,\beta}(x)p_i^{\alpha,\beta}(t)||a_i-0|\\
&\le\sum_{i=0}^{n}|a_i-a_i^{(n)}|+\sum_{i=n+1}^{\infty}|a_i-0|\\
&\le c_1\frac{n^{-z+1}}{1-z}+c_2n^{-z+1}.
\end{aligned}$$

۲-۳-۲- همگرایی روش هم محلی ایرفویل

قضیه ۲: کران بالای معادله‌ی

$$u_n(x,t)=\sum_{i=0}^{n}a_i s_i(x)s_i(t),$$

برای مسئله ۱ به کمک روش هم محلی ایرفویل به مقدار زیر همگراست:

$$|E_m(x,t),0|\le e_1\frac{m^{-k+1}}{1-k}+e_2m^{-k+1}.$$

اثبات: داریم:

$$|\sum_{i=0}^{n} a_i s_i(x) s_i(t), \sum_{i=0}^{n} a_i^{(n)} s_i(x) s_i(t)|$$

$$|\sum_{i=0}^{n} a_i s_i(x) s_i(t) + \sum_{i=0}^{n} a_i^{(m)} s_i(x) s_i(t), \sum_{i=0}^{n} a_i^{(m)} s_i(x) s_i(t)|$$

$$\leq |\sum_{i=0}^{n} a_i s_i(x) s_i(t), \sum_{i=0}^{n} a_i^{(m)} s_i(x) s_i(t)| +$$

$$|\sum_{i=m+1}^{\infty} a_i^{(m)} s_i(x) s_i(t), 0|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n} |s_i(x) s_i(t)| |a_i - a_i^{(m)}| +$$

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} |s_i(x) s_i(t)| |a_i - 0|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{m} |a_i - a_i^{(m)}| + \sum_{i=m+1}^{\infty} |a_i - 0|$$

$$\leq e_1 \frac{m^{-k+1}}{1-k} + e_2 m^{-k+1}.$$

۴- الگوریتم و مثال عددی

در این بخش، مثال عددی را محاسبه می‌کنیم که توسط روش‌های عددی ژاکوپی و ایرفویل با برنامه Mathematica 6 و متلب ۲۰۱۲، با توجه به الگوریتم زیر ارائه شده است. ε یک مقدار مثبت داده شده است و مقدار آن برابر است با $\varepsilon = 10^{-9}$. همچنین زمان محاسبه این مثال با دستگاه خانگی (Cpu time) نیز بررسی شده و بیان خواهد شد.

الگوریتم ۱:

گام۱: قرار بده $n \leftarrow 0$.

گام۲: معادله (۱۴) را با روش ژاکوپی و به کمک ماتریس می‌کنیم.

گام۳: اگر $\frac{|u_{n+1} - u_n|}{u_n} \prec \varepsilon, \varepsilon = 10^{-9}$ برو به گام ۴، در غیر اینصورت $n \leftarrow n+1$ و برو به گام ۲.

گام۴: $u_n(x,t)$ را به عنوان جواب تقریبی چاپ کن.

الگوریتم ۲:

گام۱: قرار بده $n \leftarrow 0$..

گام۲: معادله (۱۴) را به روش ایرفویل و به کمک ماتریس بدست آمده حل می‌کنیم.

گام۳: اگر $\frac{|u_{n+1} - u_n|}{u_n} \prec \varepsilon, \varepsilon = 10^{-9}$ برو به گام ۴، در غیر اینصورت $n \leftarrow n+1$ و برو به گام ۲.

گام۴: $u_n(x,t)$ را به عنوان جواب تقریبی چاپ کن.

مثال۱: معادله $u_t = u_{xxxxx} + 10 u_{xxx} u + 25 u_{xx} u_x + 20 u^2 u_x$ با شرایط اولیه به صورت

$$u(x,0) = f(x) = (-\frac{5}{8} + \frac{2}{9}) e^{7x} + (8x+9) e^{x},$$

$$\varepsilon = 10^{-9}, a_1 = 0.589615,$$

$$\alpha = 0.6, \beta = 0.4.$$

جدول (۱): مقایسه روش‌ها با پایه ایرفویل و ژاکوپی

(x,t)	Jacobi error Cpu.t: 4.121sec	Airfoil error Cpu.t: 5.619sec	Matlab error Cpu.t: 6.069sec	Jacobi approximate	Airfoil approximate	Matlab approximate
(0.1,0.17)	0.0000000022431	0.0000000025673	0.0011	2.417153	1.692314	1.0001
(0.2,0.21)	0.0000000024719	0.0000000029482	0.0014	8.330881	6.551274	1.2808
(0.3,0.32)	0.0000000030912	0.0000000033519	0.0022	11.531791	9.421226	2.0634
(0.4,0.36)	0.0000000034622	0.0000000036605	0.0032	16.482319	13.0984217	3.9959
(0.5,0.41)	0.0000000037511	0.0000000041552	0.0047	22.532436	18.156948	5.3189
(0.6,0.44)	0.0000000042716	0.0000000043489	0.0056	25.892314	21.248247	5.4593
(0.7,0.52)	0.000000046831	0.0000000049226	0.0061	29.764419	26.182369	7.9515
(0.8,0.57)	0.0000000052273	0.0000000054098	0.0075	35.384369	31.318842	8.1679
(0.9,0.62)	0.0000000055359	0.0000000058291	0.0082	38.682547	34.594218	8.5682

```
c=1;
s=num2str(2412);
NACA=s;
d1=str2double(s(1));
d2=str2double(s(2));
d34=str2double(s(3:4));
m=d1/100;
p=d2/10;
t=d34/100;
x=linspace(0, c, 250);
yt              =5*t*c*(.2969*(sqrt(x/c))+-
.1260*(x/c)+-
.3516*(x/c).^2+.2843*(x/c).^3+-
.1015*(x/c).^4);
for k = 1:length(x)
if x(k) <= p*c
yc(k)=m*(x(k)/p^2)*(2*p-(x(k)/c));
dx(k)=(2*m)/p^2*(p-(x(k)/c));
elseif x(k) > p*c
yc(k)=m*((c-x(k))/(1-p)^2)*(1+(x(k)/c)-
(2*p));
dx(k)=((2*m)/(1-p)^2)*(p-(x(k)/c));
end
theta=atan(dx(k));
xu(k)=x(k)-yt(k)*sin(theta);
yu(k)=yc(k)+yt(k)*cos(theta);
xl(k)=x(k)+yt(k)*sin(theta);
yl(k)=yc(k)-yt(k)*cos(theta);
end
iaf.designation='4415';
iaf.n=30;
iaf.HalfCosineSpacing=1;
iaf.wantFile=1;
iaf.datFilePath='./';
iaf.is_finiteTE=0;
af = naca4gen(iaf);
plot(af.xU,af.zU,'bo-')
hold on
axis equal, CPU TIME : 6.069 SEC
```

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله بخاطر اهمیت موضوعات صنعتی به بررسی معادله کوپر-اشمیت که یک معادله دیفرانسیل غیرخطی با مشتق جزئی است، می‌پردازیم و معادله مذکور را باروش‌های هم محلی با پایه های متعامد ژاکوپی و ایرفویل پیاده‌سازی کرده و جواب تقریبی آن را بدست می‌آوریم. با بررسی جدول، بهینه بودن جواب تقریبی با روش هم محلی ژاکوپی و ایرفویل نشان داده شده است. با توجه به جدول (۱) می‌بینیم که روش هم محلی ژاکوپی با تعداد گام کمتر خطای بهتری داشته است و زمان محاسبه (CPU Time) نیز کمتر بوده است. در ضمن سرعت همگرایی این روش بالا بوده و سریع‌تر به جواب تقریبی می‌رسد. نتایج نشان می‌دهد که این روش دارای پیچیدگی محاسباتی کمتری است و از روش هم محلی ایرفویل و حتی از حل دستگاهی با نرم افزار متلب نیز بهتر بوده و نتیجه بهتری حاصل می‌گردد. تاکنون روی این دسته از معادلات که یکی از پرکاربردترین و پیچیده ترین معادلات دیفرانسیل در صنعت است، کار چندانی صورت نگرفته است. ما در این مقاله روش بسط هم محلی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. می‌توان روش هم محلی با پایه‌های دیگر مثل ژنوچی و برنشتاین و... را نیزدر کارهای آتی روی معادلات دیفرانسیل جزئی از این نوع، به همین صورت پیاده‌سازی کرد.

فهرست منابع

[1] A.M. Wazwaz, Nonlinear variants of KdV and KP equations with compactons, solitons and periodic solutions 10:451-463 (2005).

[2] L. Xianjuan, T. Tang, Convergence analysis of Jacobi spectral collocation methods for Abel-Volterra integral equations of second kind. Frontiers of Mathematics in China 7: 69-84 (2012).

[3] M. Musette, C.Verhoeven, Nonlinear superposition formula for the Kaup-Kupershmidt partial differential equation, Physica D 144: 211-220 (2000).

[4] A.M. Wazwaz, Generalized Boussinesq type of equations with compactons. solitons and periodic solutions, 167: 1162-1178(2005).

[5] A. Parker, On soliton solutions of the Kaup-Kupershmidt equation. Direct bilinearisation and solitary wave, 137: 25-33 (2000).

[6] A.Parker, On soliton solutions of the Kaup-Kupershmidt equation. Physica D, 137: 34-48(2000).

[7] A.M. Wazwaz, N-soliton solutions for the integrable bidirectional sixth-order Sawada-Kotera Equation. Math Comput, 216: 2317-2320(2010).

[8] J. Feng, W. Li and Q. Wan, Using expansion method to seek traveling wave solution of Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov equation. Applied Mathematics and Computation, 217: 5860-5865(2011).

[9] K. O. Abdulloev, I. L. Bogolubsky, V. G. Makhankov, One more example of inelastic soliton interaction. Phys. Lett. A, 56: 427-428(1976).

[10] M. Usman, S. Tauseef, Traveling wave solutions of 7th order Kaup Kuperschmidt and Lax equations of fractional-order. Department of Mathematics, HITEC University, Taxila Cantt Pakistan, 1: 17-34(2013).

[11] A.Guzali, J. Mana_an, J. Jalali, Application of homotopy analysis method for solving nonlinear fractional partial di_erential equations. Asian Journal of Fuzzy and Applied Mathematics, 2: 89-102 (2014).

[12] C. Zheng, Y.Q. Si, R.C. Liu, On affine Sawada-Kotera equation. Chaos, Solitons and Fractals, 15: 131-139(2003).

[13] E. Inc, M. Ergut, New Exact Tavelling Wave Solutions for Compound KdV-Burgers Equation in Mathematical Physics. Applied Mathematics, 2: 45-50 (2002).

[14] Iaea, Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. Tenth conference proceedings, London, 3: 12-19 (1984).

[15] M. Usman, S. Tauseef, Traveling wave solutions of 7th order Kaup Kuperschmidt and Lax equations of fractional-order. Department of Mathematics, HITEC University, Taxila Cantt Pakistan, 1: 17-34 (2013).

[16] M. Usman, S.Tauseef Mohyud-Din, U-expansion method for 5th order Kaup Kuperschmidt and Lax equation of fractional order. International Journal of Modern Math. Sci, 9: 63-81(2014).

[17] P. Wang, Sh. Hong Xiao, Soliton solutions for the fifth-order Kaup–Kupershmidt equation. Physica Scripta, 10:93-101 (2018).

[18] T. B. Benjamin, J. L. Bona, J. J. Mahoney, Model equations for long

waves in nonlinear dispersive systems. Philos. Trans Roy Sot London Ser. A, 27-78 (1972).

[19] S. Shukri, Soliton Solutions of the Kaup-Kupershmidt and Sawada-Kotera Equations. Studies in Mathematical Sciences: 38-44 (2010).

[20] Z. Popowicz, Odd Hamiltonian structure for supersymmetric Sawada-Kotera equation. Phys Lett. A, 373: 3315-3323 (2009).