دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی و دوم، مهر و آبان ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

روش محاسباتی برای اعمال حسابی فازی روی اعداد فازی دو قطبی و کاربرد آن

فضل‌الله عباسی[1*]، صالح شاکری[2]

[(۱و۲)] گروه ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد آیت‌الله آملی، آمل، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۸/۰۴   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۱۰/۲۴

چکیده

یک مجموعه فازی دو قطبی ابزاری قدرتمند برای به تصویر کشیدن فازی و عدم اطمینان است. این مدل نسبت به مدل فازی انعطاف‌پذیر و کاربردی‌تر است. ما مفاهیم خاصی را تعریف می‌کنیم، از جمله یک عدد فازی دو قطبی و اعمال حسابی مقدماتی فازی دو قطبی. در این مقاله، اعمال حسابی فازی جدید براساس انتقال-میانگین از عباسی و همکارانش [۱،۲] روی اعداد فازی دوقطبی پیشنهاد می‌کنیم. اعداد فازی دوقطبی-۲ و برش آنها را تعریف می‌کنیم. در مورد خواص این اعمال پیشنهادی و کیفیت‌های اساسی آنها به تفصیل بحث شده است. چندین مثال مصور برای نشان دادن موفقیت و توانایی روش پیشنهادی ارائه شده است. در پایان نشان داده می‌شود که اعمال پیشنهادی در مقایسه با سایر روش‌ها واقع بینانه‌تر است، یعنی تکیه گاه کوچکتری دارند. علاوه بر این، ما رویکرد جدید خود را برای یافتن حل معادلات خطی فازی دو قطبی، تجزیه و تحلیل می‌کنیم.
در این مقاله سعی شده است علاوه بر آشنایی با حساب اعداد فازی بر پایه انتقال میانگین و ارائه راه حل‌های عملی برای انجام محاسبات در حالت‌های خاص، مشکلات موجود در این راه مشخص شود.

واژه‌های کلیدی: اعداد فازی دو قطبی، حساب فازی دو قطبی، اعمال انتقال-میانگین، معادله خطی فازی دو قطبی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: k.9121946081@gmail.com

۱. مقدمه

منطق فازی نوعی رویکرد در علم کامپیوتر است که در منطق بولی به جای روش متداول صحیح یا غلط (صفر یا یک) که کامپیوترهای مدرن برپایه آن طراحی شده‌اند از درجه درستی استفاده می‌کند. ایده اصلی مربوط به منطق فازی اولین بار توسط پروفسور لطفی‌زاده [۱۸] در دانشگاه برکلی و دهه ۶۰ میلادی ارائه شد. دکتر لطفی‌زاده در آن زمان بر روی مسئله درک زبان انسان توسط کامپیوتر کار می‌کرد. زبان طبیعی انسان (مانند بیشتر فعالیت‌ها در زندگی و جهان هستی) به آسانی به مقادیر مطلق ۰و۱ تبدیل نمی‌شود.

منطق فازی به‌عنوان راه اصلی و در نظر گرفتن منطق بولی به‌عنوان یک حالت خاص از آن می‌تواند به درک بهتر موضوع کمک کند.

منطق فازی با ارائه تعریف ریاضی و کمّی برای مفاهیم توصیفی، مبهم و غیر قطعی امکان کاربرد تجربیات و دانش بشری را در سیستم‌های محاسباتی فراهم می‌کند.

حساب فازی یک ابزار قدرتمند در بسیاری از مسائل مهندسی از قبیل تصمیم‌گیری، تئوری کنترل، سیستم‌های فازی و استدلال‌های تقریبی است. همانطوری‌که به خوبی شناخته شده است، عملگرهای حسابی روی اعداد فازی معمولاً بر پایه اصل گسترش (روی دامنه عضویت) یا بر پایه عملگرهای بازه‌ای (روی دامنه α- برش) بنا گردیده‌اند.[۱۱،۱۲،۱۳،۱۵،۱۶،۱۸]

البته بدیهی است که برای اعداد فازی پیوسته، عملگرهای حساب فازی با اصل گسترش و روش α- برش معادلند. استفاده از اصل گسترش در حساب فازی منجر به نتایج مشکوک است که مهمترین آنها عبارتند از:

- ✓ مسئله توابع عضویت غیرخطی پرهزینه در اجرای مستقیم این اصل در عملگرهای حساب فازی،
- ✓ بیش از حد بزرگ بودن محوطه تضمین شده از جواب با عملگرهای حساب بازه‌ای استاندارد (اثر وابستگی)
- ✓ داشتن نتایجی، از قبیل:

$$A - A \neq 0, \quad A \div A \neq 1, \quad A \cdot A \neq A^2$$

از این‌رو عملگرهایی بر پایه انتقال- میانگین، توسط عباسی و همکارانش [۱،۲] در راستای داشتن عضوهای بی‌اثر نسبت به عملگرهای جمع و ضرب (نه لزوماً منحصر به فرد) معرفی گردیده و نتایج عملگرها را به اعداد درگیر و ابهامات مطرح شده در آن نسبت داده‌اند. نهایتاً، نشان داده شد که نگرش جدید، مشکلات مطرح شده مسائل فازی بر پایه اصل گسترش را رفع کرده و در اعم مسائل فازی نتایج کاربردی و قابل قبولی دارد.

لذا منطقی است که عملگرهای حساب فازی در راستای معرفی عضوهای بی‌اثر غیر قطعی (نه لزوماً منحصر به فرد) مرتبط با جمع و ضرب، طرح ریزی گردد.

ژانگ مفهوم مجموعه های فازی دو قطبی را به عنوان مجموعه‌ای از مجموعه‌های فازی آغاز کرد [۱۹،۲۰]، اگرچه مجموعه‌های فازی دو قطبی و مجموعه‌های فازی شهودی شبیه یکدیگر هستند، اما آنها اساساً مفاهیمی متمایز هستند که توسط لی [۱۴] ذکر شده است. در چندین حوزه، توانایی مدیریت با اطلاعات فازی دو قطبی مهم است. الغامدی و همکاران [۳] روشهای تصمیم‌گیری چند معیاره را در محیط فازی دو قطبی در نظر گرفتند. به تازگی، اکرم و ارشد [۴] یک روش TOPSIS فازی دوقطبی ذوزنقه‌ای جدید را برای تصمیم‌گیری گروهی و اکرم و همکارانش [۶] یک روش برای حل دستگاه معادلات خطی دوقطبی پیشنهاد دادند.

یک مجموعه فازی دو قطبی، ابزاری قدرتمند برای به تصویر کشیدن فازی و عدم اطمینان است.

این مدل نسبت به مدل فازی انعطاف‌پذیر و کاربردی تر است. در این مقاله، اعمال حسابی فازی جدید براساس انتقال- میانگین روی اعداد فازی دو قطبی از [۱،۲] پیشنهاد می‌گردد. در مورد خواص این اعمال پیشنهادی و کیفیت‌های اساسی آنها به تفصیل بحث شده است. چندین مثال مصور برای نشان دادن موفقیت و توانایی روش پیشنهادی ارائه شده است. علاوه براین، ما رویکرد جدید خود را برای یافتن حل معادلات خطی فازی دو قطبی، بکار خواهیم گرفت.

۲. تعاریف پایه

این بخش به ارائه مختصر در مورد برخی مفاهیم اساسی موضوع مورد بحث از جمله، تعاریف نمایش α- برش، عدد فازی شبه ذوزنقه‌ای، عدد فازی دو قطبی و عدد فازی دو قطبی ۲ اختصاص یافته است.

۲،۱. نمایش α- برش

نمایش α- برش، مجموعه فازی A را می‌توان بشرح زیر داشت: [۱۸]

$$A=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha.A_\alpha,\quad A_\alpha=[\underline{A}_\alpha\ ,\ \overline{A}_\alpha],$$

جائیکه،

$$A_\alpha=\{x\mid\mu_A(x)\geq\alpha\},$$
$$\alpha.A_\alpha=\{(x,\alpha)\mid x\in A_\alpha\}.$$

به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\mu_A(x)=\sup_{x\in A_\alpha}\alpha.$$

۲،۲. عدد فازی شبه ذوزنقه‌ای

عدد فازی شبه ذوزنقه‌ای به مجموعه فازی A گفته می‌شود هرگاه تابع عضویت آن به فرم زیر باشد:[۲]

$$\mu_A(x)=\begin{cases}l_A(x), & \underline{a}\leq x\leq a_1,\\ 1, & a_1\leq x\leq a_2,\\ r_A(x), & a_2\leq x\leq\overline{a},\\ 0, & \text{درسایرنقاط.}\end{cases}$$

جاییکه $l_A(x)$ و $r_A(x)$ به ترتیب توابع غیر کاهشی و غیر افزایشی‌اند و

$$l_A(a_1)=1,$$
$$r_A(a_2)=1.$$

ضمناً عدد فازی شبه مثلثی در حالتی است که:

$$a_1=a_2$$

لازم به ذکر است ، عدد فازی ذوزنقه‌ای و مثلثی حالت خاصی از اعداد فازی شبه ذوزنقه‌ای و شبه مثبثی‌اند طوریکه $l_A(x)$ و $r_A(x)$ خطی‌اند.

۲،۳. عدد فازی دو قطبی

یک عدد فازی دوقطبی A، زوج اعداد فازی $(\underline{A}\ ,\ \overline{A})$ گویند هرگاه: [۱۱]

$$A^-:\ R\ \to[-1,0],$$
$$A^+:\ R\ \to[0,1],$$

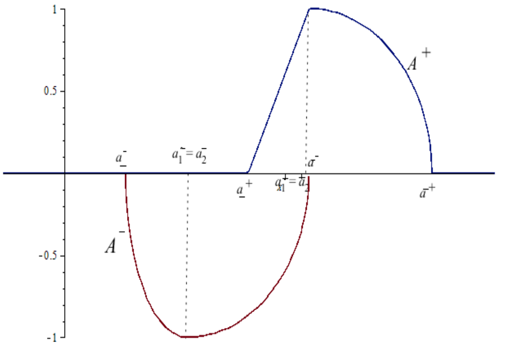
با توابع عضویت به شرح زیر:

$$\mu_{A^-}(x)=\begin{cases}l_{A^-}(x), & \underline{a}^-\leq x\leq a_1^-,\\ -1, & a_1^-\leq x\leq a_2^-,\\ r_{A^-}(x), & a_2^-\leq x\leq\overline{a}^-,\\ 0, & \text{درسایرنقاط.}\end{cases}$$

و

$$\mu_{A^+}(x)=\begin{cases}l_{A^+}(x), & \underline{a}^+\leq x\leq a_1^+,\\ 1, & a_1^+\leq x\leq a_2^+,\\ r_{A^+}(x), & a_2^+\leq x\leq\overline{a}^+,\\ 0, & \text{درسایرنقاط.}\end{cases}$$

جاییکه زوج $(l_{A^+}(x)\ ,\ -l_{A^-}(x))$ و $(r_{A^+}(x)\ ,\ -r_{A^-}(x))$ به ترتیب توابع غیر کاهشی و غیر افزایشی‌اند.



شکل ۱. نمایش گرافیکی عدد فازی دو قطبی

۳. نگرش نو به اعمال حسابی روی اعداد فازی دو قطبی

اعمال جبری روی اعداد فازی مورد نیاز بسیاری از علاقه‌مندان به موضوع مجموعه‌های فازی است و اغلب این محاسبات دارای پیچیدگی خاص هستند. در مقالات بسیاری سعی شده است با تعریف اعمال جدید ضرب و جمع روی اعداد فازی، از این مجموعه یک گروه یا میدان ساخته شود. اما طبیعی ترین اعمال تعریف شده، بر روی مجموعه اعداد حقیقی بوده است. در این بخش، حساب فازی برپایه انتقال میانگین روی اعداد فازی دوقطبی معرفی می‌گردد. نخست در راستای معرفی α- برش اعداددفازی دو قطبی، اعداد فازی دوقطبی۲ را تعربف می‌کنیم.

۳،۱. عدد فازی دو قطبی ۲

یک عدد فازی دوقطبی ۲ A، زوج اعداد فازی $(-\underline{A}\ ,\ \overline{A})$ گویند هرگاه: [۱۱]

$$-A^-:\ R \to [0,1],$$
$$A^+:\ R \to [0,1],$$

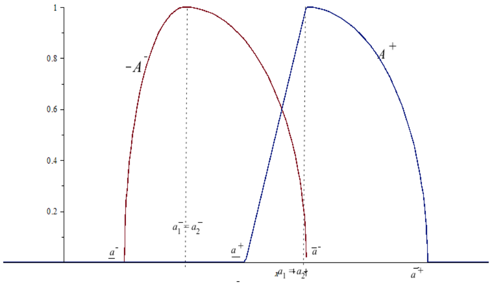
با توابع عضویت به شرح زیر:

$$\mu_{-A^-}(x)=\begin{cases} -l_{A^-}(x), & \underline{a}^- \le x \le a_1^-, \\ 1, & a_1^- \le x \le a_2^-, \\ -r_{A^-}(x), & a_2^- \le x \le \overline{a}^-, \\ 0, & \text{درسایرنقاط.} \end{cases}$$

و

$$\mu_{A^+}(x)=\begin{cases} l_{A^+}(x), & \underline{a}^+ \le x \le a_1^+, \\ 1, & a_1^+ \le x \le a_2^+, \\ r_{A^+}(x), & a_2^+ \le x \le \overline{a}^+, \\ 0, & \text{درسایرنقاط.} \end{cases}$$

جاییکه زوج $(l_{A^+}(x)\ ,\ -l_{A^-}(x))$ و $(r_{A^+}(x)\ ,\ -r_{A^-}(x))$ به‌ترتیب توابع غیرکاهشی و غیر افزایشی‌اند.



شکل ۲. نمایش گرافیکی عدد فازی دو قطبی ۲

یادآوری۱: بدیهی است که، هر عددفازی دوقطبی با یک عدد فازی دو قطبی۲ متناظراست و بالعکس. از دلایل تعریف عددفازی دوقطبی۲، می‌توان به تعریف α- برش و اعمال حسابی روی اعداد فازی دوقطبی اشاره کرد که در قسمت‌های بعدی بیان خواهند شد.

۳،۲. تعریف α- برش عدد فازی دو قطبی ۲

نمایش α- برش، عدد فازی دو قطبی ۲ A را می‌توان بشرح زیر داشت:

$$A=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha.<-A^-_\alpha,A^+_\alpha> \quad ,$$

$$-A^-_\alpha=[-\underline{A}^-_\alpha \quad , \quad -\overline{A}^-_\alpha],$$

$$A^+_\alpha=[\underline{A}^+_\alpha \quad , \quad \overline{A}^+_\alpha],$$

جائیکه،

$$-A^-_\alpha=\{x \mid \mu_{-A^-}(x)\geq\alpha\},$$

$$A^+_\alpha=\{x \mid \mu_{A^+}(x)\geq\alpha\},$$

$$\alpha.(-A^-_\alpha)=\{(x,\alpha) \mid x\in -A^-_\alpha\},$$

$$\alpha.A^+_\alpha=\{(x,\alpha) \mid x\in A^+_\alpha\},$$

به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که:

$$<\mu_{A^-}(x),\mu_{A^+}(x)>=<\sup_{x\in A^-_\alpha}\alpha,\sup_{x\in A^+_\alpha}\alpha>.$$

اکنون آماده‌ایم اعمال حسابی برپایه انتفال میانگین را روی اعدادد فازی دوقطبی معرفی کنیم ولی لازم به ذکر است که، قبل از اجرای اعمال حسابی، اعداد فازی دو قطبی داده شده را به اعداد فازی دو قطبی ۲ متناظرشان تبدیل کرده و نهایتاً اعمال را روی اعداد فازی دو قطبی ۲ها انجام می‌دهیم.
از اینرو، اعمال حسابی بر پایه انتقال میانگین روی اعداد فازی دو قطبی ۲ را بشرح زیر خواهیم داشت.

۳،۳. اعمال حسابی بر پایه انتقال میانگین روی اعداد فازی دو قطبی ۲

فرض کنید A و B دو عدد فازی دو قطبی ۲ با نمایش α- برش زیر باشند:

$$A=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha.<-A^-_\alpha,A^+_\alpha> \quad ,$$

$$-A^-_\alpha=[-\underline{A}^-_\alpha \quad , \quad -\overline{A}^-_\alpha],$$

$$A^+_\alpha=[\underline{A}^+_\alpha \quad , \quad \overline{A}^+_\alpha],$$

با

$$A^-_1=[-\underline{A}^-_1 \quad , \quad -\overline{A}^-_1],$$

$$A^+_1=[\underline{A}^+_1 \quad , \quad \overline{A}^+_1],$$

و

$$B=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha.<-B^-_\alpha,B^+_\alpha> \quad ,$$

$$-B^-_\alpha=[-B^-_\alpha \quad , \quad -\overline{B}^-_\alpha],$$

$$B^+_\alpha=[\underline{B}^+_\alpha \quad , \quad \overline{B}^+_\alpha],$$

با

$$B^-_1=[-\underline{B}^-_1 \quad , \quad -\overline{B}^-_1],$$

$$B^+_1=[\underline{B}^+_1 \quad , \quad \overline{B}^+_1].$$

با فرض

$$\phi^-=\frac{-\underline{A}^-_1+(-\overline{A}^-_1)}{2} \quad , \quad \psi^-=\frac{-\underline{B}^-_1+(-\overline{B}^-_1)}{2},$$

$$\phi^+=\frac{\underline{A}^+_1+\overline{A}^+_1}{2} \quad , \quad \psi^+=\frac{\underline{B}^+_1+\overline{B}^+_1}{2},$$

عملگرهای مقدماتی A و B بصورت زیر تعریف می‌گردد:
(با نمایه α-برش)

جمع

$$A\oplus B=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha.<-(A\oplus B)^-_\alpha,(A\oplus B)^+_\alpha> \quad ,$$

$$-(A\oplus B)^-_\alpha=[-\underline{(A\oplus B)}^-_\alpha \quad , \quad -\overline{(A\oplus B)}^-_\alpha],$$

$$(A\oplus B)^+_\alpha=[\underline{(A\oplus B)}^+_\alpha \quad , \quad \overline{(A\oplus B)}^+_\alpha],$$

جائیکه،

$$-(A\oplus B)^-_\alpha=\left[\frac{\phi^-+\psi^-}{2}+\left(\frac{-\underline{A}^-_\alpha+(-\underline{B}^-_\alpha)}{2}\right),\frac{\phi^-+\psi^-}{2}+\left(\frac{-\overline{A}^-_\alpha+(-\overline{B}^-_\alpha)}{2}\right)\right],$$

$$(A\oplus B)^+_\alpha=\left[\frac{\phi^++\psi^+}{2}+\left(\frac{\underline{A}^+_\alpha+\underline{B}^+_\alpha}{2}\right),\frac{\phi^++\psi^+}{2}+\left(\frac{\overline{A}^+_\alpha+\overline{B}^+_\alpha}{2}\right)\right],$$

قرینه

$$-A=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha.<-(-A)^-_\alpha,(-A)^+_\alpha> \quad ,$$

$$-(-A)^-_\alpha=[-\underline{(-A)}^-_\alpha \quad , \quad -\overline{(-A)}^-_\alpha],$$

$$(-A)^+_\alpha=[\underline{(-A)}^+_\alpha \quad , \quad \overline{(-A)}^+_\alpha],$$

جائیکه،

$$-(-A)^-_\alpha=\left[2\phi^-+(-\underline{A}^-_\alpha),2\phi^-+(-\overline{A}^-_\alpha)\right],$$

$$(-A)^+_\alpha=\left[2\phi^++\underline{A}^+_\alpha,2\phi^++\overline{A}^+_\alpha\right],$$

تفاضل

$$A - B = A \oplus (-B),$$

$$A - B = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha . < -(A - B)^-_\alpha , (A - B)^+_\alpha > \quad ,$$

$$-(A - B)^-_\alpha = [-\underline{(A - B)}^-_\alpha \quad , \quad -\overline{(A - B)}^-_\alpha],$$

$$(A - B)^+_\alpha = [\underline{(A - B)}^+_\alpha \quad , \quad \overline{(A - B)}^+_\alpha],$$

جائیکه،

$$-(A-B)^-_\alpha = \left[\frac{\phi^- - 3\psi^-}{2} + \left(\frac{-\underline{A}^- + (-\underline{B}^-_\alpha)}{2} \right), \frac{\phi^- - 3\psi^-}{2} + \left(\frac{-\overline{A}^-_\alpha + (-\overline{B}^-_\alpha)}{2} \right) \right],$$

$$(A-B)^+_\alpha = \left[\frac{\phi^+ - 3\psi^+}{2} + \left(\frac{\underline{A}^+_\alpha + \underline{B}^+_\alpha}{2} \right), \frac{\phi^+ - 3\psi^+}{2} + \left(\frac{\overline{A}^+_\alpha + \overline{B}^+_\alpha}{2} \right) \right],$$

ضرب

$$A \otimes B = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha . < -(A \otimes B)^-_\alpha , (A \otimes B)^+_\alpha > \quad ,$$

$$-(A \otimes B)^-_\alpha = [-\underline{(A \otimes B)}^-_\alpha \quad , \quad -\overline{(A \otimes B)}^-_\alpha],$$

$$(A \otimes B)^+_\alpha = [\underline{(A \otimes B)}^+_\alpha \quad , \quad \overline{(A \otimes B)}^+_\alpha],$$

جائیکه،

$$-(A\otimes B)^-_\alpha = \begin{cases} \left[\left(\frac{\psi^-}{2}\right)(-\underline{A}^-_\alpha) + \left(\frac{\phi^-}{2}\right)(-\underline{B}^-_\alpha), \left(\frac{\psi^-}{2}\right)(-\overline{A}^-_\alpha) + \left(\frac{\phi^-}{2}\right)(-\overline{B}^-_\alpha) \right] & \phi^-, \psi^- \geq 0 \\ \left[\left(\frac{\psi^-}{2}\right)(-\overline{A}^-_\alpha) + \left(\frac{\phi^-}{2}\right)(-\underline{B}^-_\alpha), \left(\frac{\psi^-}{2}\right)(-\underline{A}^-_\alpha) + \left(\frac{\phi^-}{2}\right)(-\overline{B}^-_\alpha) \right] & \phi^- \geq 0, \psi^- \leq 0 \\ \left[\left(\frac{\psi^-}{2}\right)(-\overline{A}^-_\alpha) + \left(\frac{\phi^-}{2}\right)(-\overline{B}^-_\alpha), \left(\frac{\psi^-}{2}\right)(-\underline{A}^-_\alpha) + \left(\frac{\phi^-}{2}\right)(-\underline{B}^-_\alpha) \right] & \phi^-, \psi^- \leq 0 \\ \left[\left(\frac{\psi^-}{2}\right)(-\underline{A}^-_\alpha) + \left(\frac{\phi^-}{2}\right)(-\overline{B}^-_\alpha), \left(\frac{\psi^-}{2}\right)(-\overline{A}^-_\alpha) + \left(\frac{\phi^-}{2}\right)(-\underline{B}^-_\alpha) \right] & \phi^- \leq 0, \psi^- \geq 0 \end{cases}$$

,

$$(A\otimes B)^+_\alpha = \begin{cases} \left[\left(\frac{\psi^+}{2}\right)\underline{A}^+_\alpha + \left(\frac{\phi^+}{2}\right)\underline{B}^+_\alpha, \left(\frac{\psi^+}{2}\right)\overline{A}^+_\alpha + \left(\frac{\phi^+}{2}\right)\overline{B}^+_\alpha \right] & \phi^+, \psi^+ \geq 0 \\ \left[\left(\frac{\psi^+}{2}\right)\overline{A}^+_\alpha + \left(\frac{\phi^+}{2}\right)\underline{B}^+_\alpha, \left(\frac{\psi^+}{2}\right)\underline{A}^+_\alpha + \left(\frac{\phi^+}{2}\right)\overline{B}^+_\alpha \right] & \phi^+ \geq 0, \psi^+ \leq 0 \\ \left[\left(\frac{\psi^+}{2}\right)\overline{A}^+_\alpha + \left(\frac{\phi^+}{2}\right)\overline{B}^+_\alpha, \left(\frac{\psi^+}{2}\right)\underline{A}^+_\alpha + \left(\frac{\phi^+}{2}\right)\underline{B}^+_\alpha \right] & \phi^+, \psi^+ \leq 0 \\ \left[\left(\frac{\psi^+}{2}\right)\underline{A}^+_\alpha + \left(\frac{\phi^+}{2}\right)\overline{B}^+_\alpha, \left(\frac{\psi^+}{2}\right)\overline{A}^+_\alpha + \left(\frac{\phi^+}{2}\right)\underline{B}^+_\alpha \right] & \phi^+ \leq 0, \psi^+ \geq 0 \end{cases}$$

معکوس

$$A^{-1} = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha . < -(A^{-1})^-_\alpha , (A^{-1})^+_\alpha > \quad ,$$

$$-(A^{-1})^-_\alpha = [-\underline{(A^{-1})}^-_\alpha \quad , \quad -\overline{(A^{-1})}^-_\alpha],$$

$$(A^{-1})^+_\alpha = [\underline{(A^{-1})}^+_\alpha \quad , \quad \overline{(A^{-1})}^+_\alpha],$$

جائیکه،

$$-(A^{-1})^-_\alpha = \left[\frac{1}{(\phi^-)^2}(-\underline{A}^-_\alpha), \frac{1}{(\phi^-)^2}(-\overline{A}^-_\alpha) \right],$$

$$(A^{-1})^+_\alpha = \left[\frac{1}{(\phi^+)^2}\underline{A}^+_\alpha, \frac{1}{(\phi^+)^2}\overline{A}^+_\alpha \right],$$

تقسیم

$$A \otimes B^{-1} = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha . < -(A \otimes B^{-1})^-_\alpha , (A \otimes B^{-1})^+_\alpha > \quad ,$$

$$-(A \otimes B^{-1})^-_\alpha = [-\underline{(A \otimes B^{-1})}^-_\alpha \quad , \quad -\overline{(A \otimes B^{-1})}^-_\alpha],$$

$$(A \otimes B^{-1})^+_\alpha = [\underline{(A \otimes B^{-1})}^+_\alpha \quad , \quad \overline{(A \otimes B^{-1})}^+_\alpha],$$

جائیکه،

$$-(A\otimes B^{-1})^-_\alpha = \begin{cases} \left[\left(\frac{1}{2\psi^-}\right)(-\underline{A}^-_\alpha) + \left(\frac{\phi^-}{2(\psi^-)^2}\right)(-\underline{B}^-_\alpha), \left(\frac{1}{2\psi^-}\right)(-\overline{A}^-_\alpha) + \left(\frac{\phi^-}{2(\psi^-)^2}\right)(-\overline{B}^-_\alpha) \right] & \phi^-, \psi^- \geq 0 \\ \left[\left(\frac{1}{2\psi^-}\right)(-\overline{A}^-_\alpha) + \left(\frac{\phi^-}{2(\psi^-)^2}\right)(-\underline{B}^-_\alpha), \left(\frac{1}{2\psi^-}\right)(-\underline{A}^-_\alpha) + \left(\frac{\phi^-}{2(\psi^-)^2}\right)(-\overline{B}^-_\alpha) \right] & \phi^- \geq 0, \psi^- \leq 0 \\ \left[\left(\frac{1}{2\psi^-}\right)(-\overline{A}^-_\alpha) + \left(\frac{\phi^-}{2(\psi^-)^2}\right)(-\overline{B}^-_\alpha), \left(\frac{1}{2\psi^-}\right)(-\underline{A}^-_\alpha) + \left(\frac{\phi^-}{2(\psi^-)^2}\right)(-\underline{B}^-_\alpha) \right] & \phi^-, \psi^- \leq 0 \\ \left[\left(\frac{1}{2\psi^-}\right)(-\underline{A}^-_\alpha) + \left(\frac{\phi^-}{2(\psi^-)^2}\right)(-\overline{B}^-_\alpha), \left(\frac{1}{2\psi^-}\right)(-\overline{A}^-_\alpha) + \left(\frac{\phi^-}{2(\psi^-)^2}\right)(-\underline{B}^-_\alpha) \right] & \phi^- \leq 0, \psi^- \geq 0 \end{cases}$$

,

$$(A\otimes B^{-1})^+_\alpha = \begin{cases} \left[\left(\frac{1}{2\psi^+}\right)\underline{A}^+_\alpha + \left(\frac{\phi^+}{2(\psi^+)^2}\right)\underline{B}^+_\alpha, \left(\frac{1}{2\psi^+}\right)\overline{A}^+_\alpha + \left(\frac{\phi^+}{2(\psi^+)^2}\right)\overline{B}^+_\alpha \right] & \phi^+, \psi^+ \geq 0 \\ \left[\left(\frac{1}{2\psi^+}\right)\overline{A}^+_\alpha + \left(\frac{\phi^+}{2(\psi^+)^2}\right)\underline{B}^+_\alpha, \left(\frac{1}{2\psi^+}\right)\underline{A}^+_\alpha + \left(\frac{\phi^+}{2(\psi^+)^2}\right)\overline{B}^+_\alpha \right] & \phi^+ \geq 0, \psi^+ \leq 0 \\ \left[\left(\frac{1}{2\psi^+}\right)\overline{A}^+_\alpha + \left(\frac{\phi^+}{2(\psi^+)^2}\right)\overline{B}^+_\alpha, \left(\frac{1}{2\psi^+}\right)\underline{A}^+_\alpha + \left(\frac{\phi^+}{2(\psi^+)^2}\right)\underline{B}^+_\alpha \right] & \phi^+, \psi^+ \leq 0 \\ \left[\left(\frac{1}{2\psi^+}\right)\underline{A}^+_\alpha + \left(\frac{\phi^+}{2(\psi^+)^2}\right)\overline{B}^+_\alpha, \left(\frac{1}{2\psi^+}\right)\overline{A}^+_\alpha + \left(\frac{\phi^+}{2(\psi^+)^2}\right)\underline{B}^+_\alpha \right] & \phi^+ \leq 0, \psi^+ \geq 0 \end{cases}$$

یادآوری۲:

بدیهی است که، نتایج اعمال حسابی پیشنهادی که اعداد فازی دوقطبی ۲ می‌باشند ذر نهایت می‌توان با در نظر گرفتن منفی تابع عضویت اول زوج اعداد فازی آنها به اعداددفازی دوقطبی تبدبل کرد.

۳،۳. مثال‌های عددی

در این بخش در چندمثال عددی به کارگیری اعمال حساب فازی جدید و مقایسه نتایج اعمال حساب فازی برپایه اصل گسترش (α- برش) با اعمال حساب فازی پیشنهادی تشریح خواهیم کرد.

مثال ۳،۳،۱: فرض کنید A و B دو عدد فازی دو قطبی با توابع عضویت زیر باشند:

$$\mu_{A^-}(x)=\begin{cases}1-x, & 1\le x\le 2,\\ -1, & 2\le x\le 2^-,\\ \frac{1}{2}x-2, & 2\le x\le 4,\\ 0, & \text{درسایرنقاط.}\end{cases}$$ ،

$$\mu_{A^+}(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{9}, & 0\le x\le 3,\\ 1, & 3\le x\le 5,\\ \frac{(7-x)^2}{4}, & 5\le x\le 7,\\ 0, & \text{درسایرنقاط.}\end{cases}$$

و

$$\mu_{B^-}(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x, & 3\le x\le 5,\\ -1, & 5\le x\le 5,\\ x-6, & 5\le x\le 5,\\ 0, & \text{درسایرنقاط.}\end{cases}$$ ،

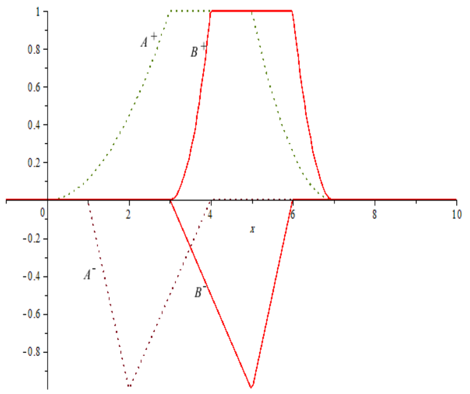
$$\mu_{B^+}(x)=\begin{cases}(x-3)^2, & 3\le x\le 4,\\ 1, & 4\le x\le 6,\\ (7-3)^2, & 6\le x\le 7,\\ 0, & \text{درسایرنقاط.}\end{cases}$$

نخست،اعداد فازی دو قطبی ۲ متناظر با اعداد A و B با فرم α-برش را بدست می‌آوریم که بشرح زیر است:

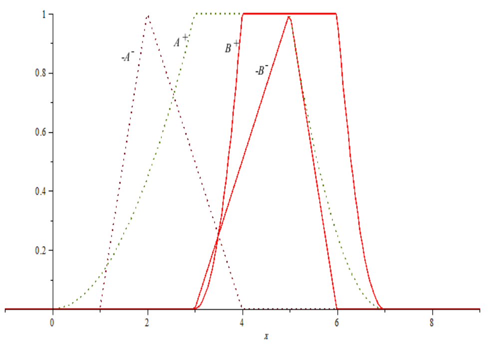
$$A=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha.<-(A^-)_\alpha, A^+_\alpha> ,$$
$$-(A^-)_\alpha=[\alpha+1 \quad , \quad 4-2\alpha],$$
$$A^+_\alpha=[3\sqrt{\alpha} \quad , \quad 7-2\sqrt{\alpha}],$$

و

$$B=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha.<-(B^-)_\alpha, B^+_\alpha> ,$$
$$-(B^-)_\alpha=[2\alpha+3 \quad , \quad 6-\alpha],$$
$$B^+_\alpha=[3+\sqrt{\alpha} \quad , \quad 7-\sqrt{\alpha}],$$



شکل ۳. اعداد فازی دو قطبی مثال ۳،۳،۱



شکل ۴. اعداد فازی دو قطبی ۲ مثال ۳،۳،۱

– براساس اعمال حساب فازی برپایه اصل گسترش (α-برش) داریم:

$$A\oplus B=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha.<-(A\oplus B)^-_\alpha,(A\oplus B)^+_\alpha> ,$$
$$-(A\oplus B)^-_\alpha=[3\alpha+4 \quad , \quad 10-3\alpha],$$
$$(A\oplus B)^+_\alpha=[3+4\sqrt{\alpha} \quad , \quad 14-3\sqrt{\alpha}],$$
$$A-B=A\oplus(-B),$$

$$A-B=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha.<-(A-B)^-_\alpha,(A-B)^+_\alpha> ,$$
$$-(A-B)^-_\alpha=[2\alpha-5 \quad , \quad 1-4\alpha],$$
$$(A-B)^+_\alpha=[4\sqrt{\alpha}-7 \quad , \quad 4-3\sqrt{\alpha}],$$

$$A\otimes B=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha.<-(A\otimes B)^-_\alpha,(A\otimes B)^+_\alpha> ,$$
$$-(A\otimes B)^-_\alpha=[\frac{(4\alpha+5)^2-1}{8} \quad , \quad \frac{(8-2\alpha)^2-16}{2}],$$
$$(A\otimes B)^+_\alpha=[12\sqrt{\alpha} \quad , \quad 49-19\sqrt{\alpha}],$$

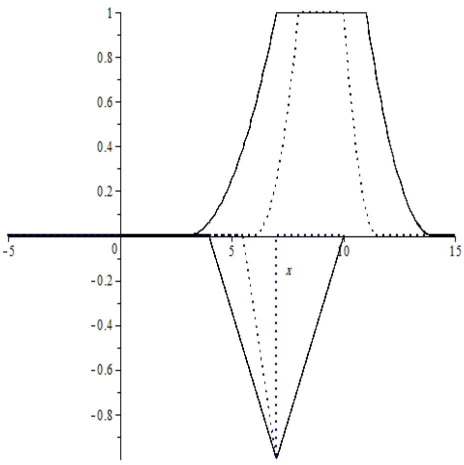
$$A \otimes B^{-1} = \bigcup_{\alpha\in(0,1]} \alpha . < -(A \otimes B^{-1})^{-}_{\alpha}, (A \otimes B^{-1})^{+}_{\alpha} > \quad ,$$
$$-(A \otimes B^{-1})^{-}_{\alpha} = [\frac{\alpha+1}{6-\alpha} \quad , \quad \frac{4-2\alpha}{2\alpha+3}],$$
$$(A \otimes B^{-1})^{+}_{\alpha} = [\frac{1}{2}\sqrt{\alpha} \quad , \quad \frac{7}{3}-\frac{13}{12}\sqrt{\alpha}],$$

- بر اساس اعمال حساب فازی بر پایه انتقال- میانگین داریم:

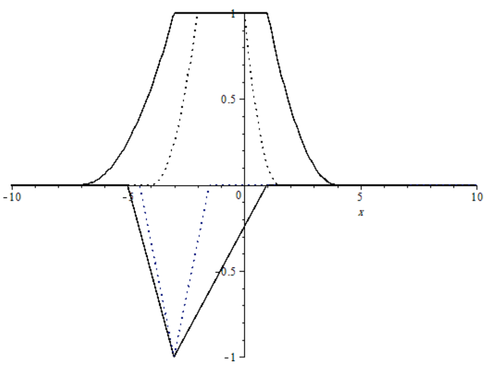
$$A \oplus B = \bigcup_{\alpha\in(0,1]} \alpha . < -(A \oplus B)^{-}_{\alpha}, (A \oplus B)^{+}_{\alpha} > \quad ,$$
$$-(A \oplus B)^{-}_{\alpha} = [\frac{7}{2}+\frac{3\alpha+4}{2} \quad , \quad \frac{7}{2}+\frac{10-3\alpha}{2}],$$
$$(A \oplus B)^{+}_{\alpha} = [6+2\sqrt{\alpha} \quad , \quad \frac{23-3\sqrt{\alpha}}{2}],$$
$$A - B = A \oplus (-B),$$
$$A - B = \bigcup_{\alpha\in(0,1]} \alpha . < -(A - B)^{-}_{\alpha}, (A - B)^{+}_{\alpha} > \quad ,$$
$$-(A - B)^{-}_{\alpha} = [\frac{-13}{2}+\frac{3\alpha+4}{2} \quad , \quad \frac{-13}{2}+\frac{10-3\alpha}{2}],$$
$$(A - B)^{+}_{\alpha} = [2\sqrt{\alpha}-4 \quad , \quad \frac{3-3\sqrt{\alpha}}{2}],$$
$$A \otimes B = \bigcup_{\alpha\in(0,1]} \alpha < -(A \otimes B)^{-}_{\alpha}, (A \otimes B)^{+}_{\alpha} > \quad ,$$
$$-(A \otimes B)^{-}_{\alpha} = [\frac{5}{2}(\alpha+1)+(2\alpha+3) \quad , \quad \frac{5}{2}(4-2\alpha)+(6-\alpha)],$$
$$(A \otimes B)^{+}_{\alpha} = [\frac{15}{2}\sqrt{\alpha}+2(3+\sqrt{\alpha}) \quad , \quad \frac{5}{2}(7-2\sqrt{\alpha})+2(7-\sqrt{\alpha})],$$
$$A \otimes B^{-1} = \bigcup_{\alpha\in(0,1]} \alpha < -(A \otimes B^{-1})^{-}_{\alpha}, (A \otimes B^{-1})^{+}_{\alpha} > \quad ,$$
$$-(A \otimes B^{-1})^{-}_{\alpha} = [\frac{1}{10}(\alpha+1)+\frac{2}{50}(2\alpha+3) \quad , \quad \frac{1}{10}(4-2\alpha)+\frac{2}{50}(6-\alpha)],$$
$$(A \otimes B^{-1})^{+}_{\alpha} = [\frac{3}{10}\sqrt{\alpha}+\frac{2}{25}(3+\sqrt{\alpha}) \quad , \quad \frac{1}{10}(7-2\sqrt{\alpha})+\frac{2}{25}(7-\sqrt{\alpha})],$$

لازم به ذکر است که نتایج اعمال بر پایه اصل گسترش و انتقال میانگین بصورت اعداد فازی دو قطبی ۲ می‌باشد که با قرار دادن α- بجای α در نمایش α- برش عددفازی اول زوج اعداد فازی دو قطبی ۲ها می‌توان به اعداد فازی دو قطبی تبدیل کرد.

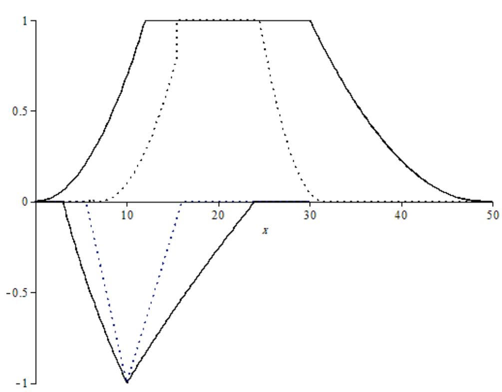
به وضوح از تصاویر ۵ تا۸ می‌بینیم که نتایج اعمال پیشنهادی از نتایج اعمال اصل گسترش واقعی‌ترند به‌عبارت دیگر اینکه دارای تکیه‌گاه (support) کوچکترند.



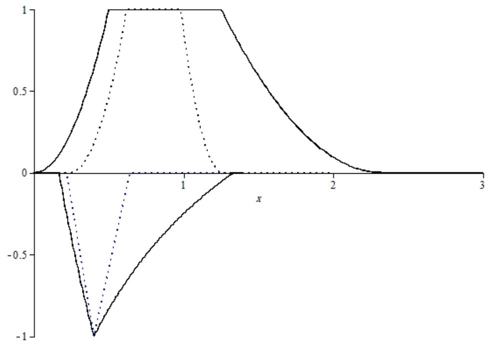
شکل ۵: نتایج عمل جمع برپایه اصل گسترش و انتقال- میانگین جمع اعداد فازی دو قطبی مثال ۳،۳،۱



شکل ۶: نتایج عمل تفاضل بر پایه اصل گسترش و انتقال-میانگین جمع اعداد فازی دو قطبی مثال ۳،۳،۱



شکل ۷: نتایج عمل ضرب برپایه اصل گسترش و انتقال-میانگین جمع اعداد فازی دو قطبی مثال ۳،۳،۱



شکل ۸: نتایج عمل تقسیم برپایه اصل گسترش و انتقال-میانگین جمع اعداد فازی دو قطبی مثال ۳،۳،۱

مثال ۲،۳،۳: فرض کنید A و B دو عدد فازی دو قطبی ۲ با فرم‌های α -برش زیر باشند:

$$A=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha.<-(A^-)_\alpha, A^+_\alpha> \quad ,$$
$$-(A^-)_\alpha=[2\alpha+1 \quad , \quad 3+\sqrt{1-\alpha}],$$
$$A^+_\alpha=[3-\sqrt{4-4\alpha} \quad , \quad 3+\sqrt{16-16\alpha}],$$

و

$$B=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha.<-(B^-)_\alpha, B^+_\alpha> \quad ,$$
$$-(B^-)_\alpha=[(2\alpha+2)^2 \quad , \quad (5-\alpha)^2],$$
$$B^+_\alpha=[2-\sqrt{-\ln\alpha} \quad , \quad 2-\ln\alpha],$$

آنگاه براساس اعمال حساب فازی پیشنهادی داریم:

$$A\oplus B=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha.<-(A\oplus B)^-_\alpha,(A\oplus B)^+_\alpha> \quad ,$$
$$-(A\oplus B)^-_\alpha=[\frac{19}{2}+\frac{2\alpha+1+(2\alpha+2)^2}{2} \quad , \quad \frac{19}{2}+\frac{3+\sqrt{1-\alpha}+(5-\alpha)^2}{2}],$$
$$(A\oplus B)^+_\alpha=[\frac{5}{2}+\frac{5-(\sqrt{4-4\alpha}+\sqrt{-\ln\alpha}}{2} \quad , \quad \frac{5}{2}+\frac{5+(\sqrt{16-16\alpha}-\ln\alpha)}{2}],$$
$$A-B=A\oplus(-B),$$

$$A-B=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha.<-(A-B)^-_\alpha,(A-B)^+_\alpha> \quad ,$$
$$-(A-B)^-_\alpha=[\frac{-45}{2}+\frac{2\alpha+1+(2\alpha+2)^2}{2} \quad , \quad \frac{-45}{2}+\frac{3+\sqrt{1-\alpha}+(5-\alpha)^2}{2}],$$
$$(A-B)^+_\alpha=[\frac{-3}{2}+\frac{5-(\sqrt{4-4\alpha}+\sqrt{-\ln\alpha}}{2} \quad , \quad \frac{-3}{2}+\frac{5+(\sqrt{16-16\alpha}-\ln\alpha)}{2}],$$

$$A\otimes B=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha.<-(A\otimes B)^-_\alpha,(A\otimes B)^+_\alpha> \quad ,$$
$$-(A\otimes B)^-_\alpha=[8(2\alpha+1)+\frac{3}{2}(2\alpha+2)^2 \quad , \quad 8(3+\sqrt{1-\alpha})+\frac{3}{2}(5-\alpha)^2],$$
$$(A\otimes B)^+_\alpha=[3-\sqrt{4-4\alpha}+\frac{3}{2}(2-\sqrt{-\ln\alpha}) \quad , \quad 3+\sqrt{16-16\alpha}+\frac{3}{2}(2-\ln\alpha)],$$

$$A\otimes B^{-1}=\bigcup_{\alpha\in(0,1]}\alpha<-(A\otimes B^{-1})^-_\alpha,(A\otimes B^{-1})^+_\alpha> \quad ,$$
$$-(A\otimes B^{-1})^-_\alpha=[\frac{1}{32}(2\alpha+1)+\frac{3}{512}(2\alpha+2)^2 \quad , \quad \frac{1}{32}(3+\sqrt{1-\alpha})+\frac{3}{512}(5-\alpha)^2],$$
$$(A\otimes B^{-1})^+_\alpha=[\frac{1}{4}(3-\sqrt{4-4\alpha})+\frac{3}{8}(2-\sqrt{-\ln\alpha}) \quad , \quad \frac{1}{4}(3+\sqrt{16-16\alpha})+\frac{3}{8}(2-\ln\alpha)],$$

۳،۴. چند لم و قضیه مقدماتی

در این بخش چند لم و قضیه مرتبط با موضوع بحث را بدون اثبات ارائه خواهیم داد.

از آنجائی‌که، پایه و اساس اعمال پیشنهادی روی اعداد فازی دو قطبی تفکر انتقال میانگین عباسی و همکارانش [۱،۲] بوده، لذا چند لم و قضیه زیر را مستقیماً می‌توانیم نتیجه‌گیری کنیم.

یکی از موارد اشاره شده در مورد اعمال حساب فازی برپایه اصل گسترش (با نمایه α- برش) اثر وابستگی بوده، مبنی بر اینکه تکیه گاه نتایج عملگرها بزرگ‌اند. در قضیه زیر نشان داده شده است که، تکیه‌گاه نتایج عملگرهای حساب فازی پایه انتقال – میانگین، نسبت به اعمال حساب فازی بر پایه اصل گسترش کوچکترند.

قضیه ۳،۴،۱: (عدم اثر وابستگی)

تکیه‌گاه نتایج عملگرهای حساب فازی برپایه انتقال – میانگین نسبت به عملگرهای حساب فازی برپایه اصل گسترش کوچکترند.

قضیه ۳،۴،۲: (عضوهای بی‌اثر)

فرض کنید BF(R) مجموعه‌ای از اعداد فازی دو قطبی باشد. آنگاه؛

$$\forall A\in BF(R) \ \ \exists 0_A\in BF(R) \ ; \ A\oplus 0_A=0_A\oplus A=A \ \ \& A-A=0_A,$$
$$\forall A\in BF(R) \ ; A\otimes 1_A=1_A\otimes A=A \ \ \& A\otimes A^{-1}=1_A.$$

با تعاریف 0_A و 1_A بشرح زیر:

$$\mu_{0_A^-}(x)=\begin{cases} l_{0_A^-}(x+\phi^-), & \underline{a}^- - \phi^- \le x \le \dfrac{a^-_1 - a^-_2}{2},\\ -1, & \dfrac{a^-_1 - a^-_2}{2} \le x \le \dfrac{a^-_2 - a^-_1}{2},\\ r_{0_A^-}(x+\phi^-), & \dfrac{a^-_2 - a^-_1}{2} \le \mathrm{x} \le \bar{a}^- - \phi^-,\\ 0, & \text{درسایرنقاط.} \end{cases}$$

$$\mu_{0_A^+}(x)=\begin{cases} l_{0_A^+}(x+\phi^+), & \underline{a}^+ - \phi^+ \le x \le \dfrac{a^+_1 - a^+_2}{2},\\ 1, & \dfrac{a^+_1 - a^+_2}{2} \le x \le \dfrac{a^+_2 - a^+_1}{2},\\ r_{0_A^+}(x+\phi^+), & \dfrac{a^+_2 - a^+_1}{2} \le \mathrm{x} \le \bar{a}^+ - \phi^+,\\ 0, & \text{درسایرنقاط.} \end{cases}$$

و

$$\mu_{1_A^-}(x)=\begin{cases} \begin{cases} l_{1_A^-}(\phi^- x), & \dfrac{\underline{\underline{a}}^-}{\phi^-} \le x \le \dfrac{a^-_1}{\phi^-},\\ -1, & \dfrac{a^-_1}{\phi^-} \le x \le \dfrac{a^-_2}{\phi^-}, \\ r_{1_A^-}(\phi^- x), & \dfrac{a^-_2}{\phi^-} \le \mathrm{x} \le \dfrac{\bar{\bar{a}}^-}{\phi^-},\\ 0, & \text{درسایرنقاط.} \end{cases} & \phi^- > 0 \\ \begin{cases} r_{1_A^-}(\phi^- x), & \dfrac{\bar{\bar{a}}^-}{\phi^-} \le x \le \dfrac{a^-_2}{\phi^-},\\ -1, & \dfrac{a^-_2}{\phi^-} \le x \le \dfrac{a^-_1}{\phi^-}, \\ l_{1_A^-}(\phi^- x), & \dfrac{a^-_1}{\phi^-} \le \mathrm{x} \le \dfrac{\underline{\underline{a}}^-}{\phi^-},\\ 0, & \text{درسایرنقاط.} \end{cases} & \phi^- < 0. \end{cases}$$

$$\mu_{1_A^+}(x)=\begin{cases} \begin{cases} l_{1_A^+}(\phi^+ x), & \dfrac{\underline{\underline{a}}^+}{\phi^+} \le x \le \dfrac{a^+_1}{\phi^+},\\ 1, & \dfrac{a^+_1}{\phi^+} \le x \le \dfrac{a^+_2}{\phi^+}, \\ r_{1_A^+}(\phi^+ x), & \dfrac{a^+_2}{\phi^+} \le \mathrm{x} \le \dfrac{\bar{\bar{a}}^+}{\phi^+},\\ 0, & \text{درسایرنقاط.} \end{cases} & \phi^+ > 0 \\ \begin{cases} r_{1_A^+}(\phi^+ x), & \dfrac{\bar{\bar{a}}^+}{\phi^+} \le x \le \dfrac{a^+_2}{\phi^+},\\ 1, & \dfrac{a^+_2}{\phi^+} \le x \le \dfrac{a^+_1}{\phi^+}, \\ l_{1_A^+}(\phi^+ x), & \dfrac{a^+_1}{\phi^+} \le \mathrm{x} \le \dfrac{\underline{\underline{a}}^+}{\phi^+},\\ 0, & \text{درسایرنقاط.} \end{cases} & \phi^+ < 0. \end{cases}$$

با توجه به اینکه

$$\phi^- = \frac{a^-_1 + a^-_2}{2}$$

$$\phi^+ = \frac{a^+_1 + a^+_2}{2}$$

لم ۳.۴.۱. فرض کنید A و B دو عدد فازی دو قطبی باشند، آنگاه:

$i)\quad A \oplus B = B \oplus A,$

$ii)\quad A \otimes B = B \otimes A,$

$iii)\quad -(A \oplus B) = -A - B,$

$iv)\quad -(-A) = A,$

$v)\quad A \otimes A = 2 \otimes A,$

$vi)\quad A^n = A \otimes A \otimes \cdots A_n$

۴. کاربرد اعمال حسابی پیشنهادی در معادلات فازی

در این بخش، به حل معادلات جبری با پارامترهای اعداد فازی دو قطبی اشاره خواهیم کرد. معادلات فازی توسط دوبویس و پراده [۱۲،۱۳] مورد بررسی قرار گرفت. سانچز [۱۷] راه حل معادله فازی را با استفاده از اعمال گسترش پیشنهاد داده بود. بر این اساس محققان زیادی، روش‌های مختلفی را برای حل معادلات فازی ارائه داده‌اند.[۷،۸،۹،۱۰] اگر اعمال درگیر در معادلات فازی برپایه اصل گسترش باشد، به دلیل عدم وجود عضوهای بی‌اثر جمع و ضرب چنین اعمالی، استفاده از روش‌های کلاسیک را برای حل معادلات فازی بسیار محدود امکان‌پذیر می‌سازد. زیرا، غالباً هیچ راه حلی وجود ندارد یا شرایط بسیار محکمی وجود دارد که معادلات بتوانند جواب فازی داشته باشند. همچنین، جواب‌های ارائه شده در این تکنیک‌ها تکیه‌گاه بزرگی دارند (عدم اثر وابستگی). این موارد فوق انگیزه‌هایی است که ما به دنبال یک رویکرد جدید برای حل معادلات فازی هستیم. از این رو، ما اعمال درگیر در معادلات فازی براساس مفهوم انتقال میانگین درنظر می‌گیریم، چرا که ویژگی عدم وابستگی دراعمال پیشنهادی، ما را به جواب‌های واقع بینانه‌تر می‌رساند.

در پرداختن به حل معادله فازی در [۶]، روشی بر اساس اعمال انتقال میانگین فازی ارائه شده است. اگرچه این روش مزایایی دارد بیش از تکنیک‌های

قبلی، مبتنی بر سهولت محاسبات و واقع بینانه‌تر بودن (داشتن تکیه‌گاه کوچکتر) جواب‌ها، اما ممکن است جواب‌ها در معادله اصلی معتبر باشد یا نه، به همین دلیل، بصورت تقریبی فازی پیشنهاد شده است.

۴،۱. تقریب اعداد فازی دو قطبی

دو عدد فاز دوقطبی A و B را تقریباً برابر گویند با نماد $A \cong B$ هرگاه،

$$\phi_A^{\ -} = \frac{a^-_1 + a_2^-}{2} \quad = \quad \phi_B^{\ -} = \frac{b^-_1 + b_2^-}{2},$$
$$\phi_A^{\ +} = \frac{a^+_1 + a_2^+}{2} \quad = \quad \phi_B^{\ +} = \frac{b^+_1 + b_2^+}{2}.$$

۴،۲. حل معادله $AX + B = C$

فرض کنید A، B و C در معادله $AX + B = C$ سه عدد فازی دو قطبی۲ با فرم‌های α-برش زیر باشند:

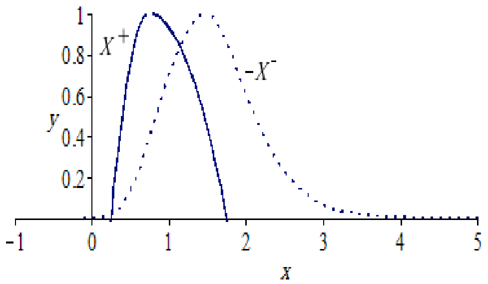
$$A = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha . < -(A^-)_\alpha , A^+_{\ \alpha} > \quad ,$$
$$-(A^-)_\alpha = [2 - \sqrt{-\ln \alpha} \quad , \quad 2 - \ln \alpha],$$
$$A^+_{\ \alpha} = [4 - \frac{4}{3}\sqrt{4 - 4\alpha} \quad , \quad 4 + \frac{4}{3}\sqrt{16 - 16\alpha}],$$
$$B = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha . < -(B^-)_\alpha , B^+_{\ \alpha} > \quad ,$$
$$-(B^-)_\alpha = [3 - \sqrt{4 - 4\alpha} \quad , \quad 3 + \sqrt{16 - 16\alpha}],$$
$$B^+_{\ \alpha} = [3 - \sqrt{4 - 4\alpha} \quad , \quad 3 + \sqrt{16 - 16\alpha}],$$

و

$$C = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha . < -(C^-)_\alpha , C^+_{\ \alpha} > \quad ,$$
$$-(C^-)_\alpha = [6 - \sqrt{4 - 4\alpha} \quad , \quad 6 + \sqrt{16 - 16\alpha}],$$
$$C^+_{\ \alpha} = [6 - \sqrt{4 - 4\alpha} \quad , \quad 6 + \sqrt{16 - 16\alpha}],$$

در این‌صورت جواب معادله به فرم عدد فازی دو قطبی ۲،

$$X \cong A^{-1}(C - B)$$
$$= \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha < -(X^-)_\alpha , X^+_{\ \alpha} > \ ,$$
$$-(X^-)_\alpha = [\frac{1}{4}(3 - \sqrt{4 - 4\alpha}) + \frac{3}{8}(2 - \sqrt{-\ln \alpha}) \ , \ \frac{1}{4}(3 + \sqrt{16 - 16\alpha}) + \frac{3}{8}(2 - \ln \alpha)],$$
$$X^+_{\ \alpha} = [\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{4 - 4\alpha}) \ , \ \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{16 - 16\alpha})],$$



شکل ۹. جواب عدد فازی دو قطبی ۲ معادله ۴.۲

۵. نتیجه‌گیری و تحقیقات آینده

اعمال جبری روی اعداد فازی مورد نیاز بسیاری از علاقه‌مندان به موضوع مجموعه‌های فازی است و اغلب این محاسبات دارای پیچیدگی خاص هستند. در این مقاله سعی شده است علاوه بر آشنایی با حساب اعداد فازی بر پایه انتقال میانگین و ارائه راه حل‌های عملی برای انجام محاسبات در حالت‌های خاص، مشکلات موجود در این راه مشخص شود.
در این مقاله ابتدا به معرفی اعداد فازی دو قطبی که حالت تعمیم یافته از اعداد فازی هستند، پرداختیم و اعمال برپایه انتقال میانگین عباسی و همکارانش [۱،۲] را روی چنین اعدادی را بیان کردیم. سپس خصوصیاتی از آنها مورد بررسی قرار گرفت. در نهایت چندین مثال مصور برای نشان دادن موفقیت و توانایی روش پیشنهادی ارائه شده است. علاوه بر این، ما رویکرد جدید خود را برای یافتن حل معادلات خطی فازی دو قطبی، بکار بردیم.
برای تحقیقات آینده، ما در تلاشیم تا از چنین اعداد فازی با اعمال پیشنهاد شده در مسائل دیگر از قبیل قابلیت اطمینان فازی و مسیر بحرانی فازی و غیره ..... استفاده نمائیم.

فهرست منابع

[1] Abbasi, F., Tofigh Allahviranloo, and Saeid Abbasbandy. "A new attitude coupled with fuzzy thinking to fuzzy rings and fields." Journal of Intelligent & Fuzzy Systems 29.2 (2015): 851-861.

[2] Abbasi, F., S. Abbasbandy, and J. J. Nieto. "A new and efficient method for elementary fuzzy arithmetic operations on pseudo-geometric fuzzy numbers." Journal of Fuzzy Set Valued Analysis 2 (2016): 156-173.

[3] Alghamdi, M. A., Noura Omair Alshehri, and Muhammad Akram. "Multi-criteria decision-making methods in bipolar fuzzy environment." International Journal of Fuzzy Systems 20.6 (2018): 2057-2064.

[4] Akram, Muhammad, and Maham Arshad. "A novel trapezoidal bipolar fuzzy TOPSIS method for group decision-making." Group Decision and Negotiation 28.3 (2019): 565-584.

[5] Akram, Muhammad, Ghulam Muhammad, and Tofigh Allahviranloo. "Bipolar fuzzy linear system of equations." Computational and Applied Mathematics 38.2 (2019): 69.

[6] Allahviranloo, Tofigh, Irina Perfilieva, and F. Abbasi. "A new attitude coupled with fuzzy thinking for solving fuzzy equations." Soft Computing 22.9 (2018): 3077-3095.

[7] Biacino, Loredana, and Ada Lettieri. "Equations with fuzzy numbers." Information Sciences 47.1 (1989): 63-76.

[8] Buckley, James J. "Solving fuzzy equations." Fuzzy sets and systems 50.1 (1992): 1-14.

[9] Buckley, J. J., and Yunxia Qu. "Solving linear and quadratic fuzzy equations." Fuzzy sets and systems 38.1 (1990): 43-59.

[10] Buckley, James J., Esfandiar Eslami, and Yoichi Hayashi. "Solving fuzzy equations using neural nets." Fuzzy Sets and Systems 86.3 (1997): 271-278.

[11] Chen, Juanjuan, et al. "m-Polar Fuzzy Sets: An Extension of Bipolar Fuzzy Sets." The Scientific World Journal (2014).

[12] Dubois D, Prade H, Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Academic Press, New York, 1980.

[13] Dubois D, Prade H, Fuzzy numbers: an overview In: Bezdek, J. C., ed., Analysis of Fuzzy Information Vol.1: Mathematics and Logic. CRC Press, Boca, Raton, FL, 1987, 3-29

[14] Lee, K. M. "Bipolar-valued fuzzy sets and their basic operations: In: Proceedings of the International Conference." (2000): 307-317.

[15] Moore, Ramon E. Methods and applications of interval analysis. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1979.

[16] Mizumoto, M., and K. Tanaka. "The four operations of arithmetic on fuzzy numbers." Syst. Comput. Controls 7.5 (1976): 73-81.

[17] Sanchez, Elie. "Solution of fuzzy equations with extended operations." Fuzzy sets and Systems 12.3 (1984): 237-248.

[18] Zadeh, Lotfi A. "Fuzzy sets." Information and control 8.3 (1965): 338-353.

[19] Zhang, Wen-Ran. "Bipolar fuzzy sets and relations: a computational framework for cognitive modeling and multiagent decision analysis." NAFIPS/IFIS/NASA'94. Proceedings of the First International Joint Conference of The North American

Fuzzy Information Processing Society Biannual Conference. The Industrial Fuzzy Control and Intellige. IEEE, 1994.

[20] Zhang, W-R. "(Yin)(Yang) bipolar fuzzy sets." 1998 IEEE International Conference on Fuzzy Systems Proceedings. IEEE World Congress on Computational Intelligence (Cat. No. 98CH36228). Vol. 1. IEEE, 1998.