دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی و دوم، مهر و آبان ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

بردارهای نوع مزدوج و احتمال جابجایی در یک گروه متناهی

کیوان مرادی‌پور*

استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه فنی و حرفه‌ای، تهران، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۱/۲۴ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۴/۱۲

چکیده

در این مقاله ابتدا ۲- گروه‌های متادوری ناجابه‌جایی و پوچ‌توان بورل از رده دو و رده حداقل سه را معرفی می‌کنیم. سپس، تمامی نمایش‌های این گروه‌ها را به‌صورت یک ۲-گروه دو مولدی متناهی مانند G' طوری تعریف می‌کنیم که همه حالات ممکن رده‌بندی‌های معرفی‌شده را پوشش دهد. هم‌چنین، مرکزسازها، اندازه‌های آن‌ها و بردارهای نوع مزدوج گروه G' را به دست می‌آوریم. سرانجام به‌عنوان کاربرد مستقیمی از نتایج به‌دست‌آمده، فرمول‌های دقیقی برای n- امین درجه جابجایی G' ارائه می‌دهیم. در پایان، نتیجه می‌گیریم اندازه تمام مرکز سازهای ۲- گروه‌های متادوری ناآبلی و n- امین درجه جابجایی آن‌ها یکسان است.

واژه‌های کلیدی: بردار نوع مزدوج، درجه جابجایی، گروه متادوری.

* عهده‌دار مکاتبات:
Email: Kayvan.mrp@gmail.com

۱- مقدمه

در مطالعه گروه‌ها، اهمیت کلاس‌های مزدوج در ساختار گروه‌های متناهی نقش قابل‌توجهی دارد. نتایج جالبی در مورد رابطه بین بردارهای نوع مزدوج گروه متناهی G و پوچ‌توانی آن گروه، همین‌طور اندازه‌های کلاس‌های مزدوج و حل‌پذیری G به‌دست آمده است [۱,۲,۳]. هم‌چنین، تأثیر اندازه کلاس‌های مزدوج بر روی گروه‌های توان اول، در چند تحقیق مورد مطالعه قرار گرفته است. در اینجا قصد نداریم همه کارهای انجام شده را ذکر کنیم ولی خواننده می‌تواند برای مطالعه بیشتر به منابع [۴,۵,۶] مراجعه نماید. به‌عنوان نمونه، اشرفی در مطالعه مرکزسازهای متمایز بعضی از گروه‌های متناهی، ساختار تعدادی از گروه‌های با ۶ مرکزساز مجزا را مورد بررسی قرار داده است [۷]. اخیراً عرفانیان و همکاران، با استفاده از مرکز سازهای یک گروه متناهی، احتمال جابجایی یک عنصر تصادفی با توان n را با سایر اعضای آن گروه، محاسبه کرده است [۸].

برای هر گروه متناهی G، نماد $P_n(G)$ برای نمایش n-امین درجه جابه‌جایی آن گروه استفاده، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$P_n(G)=\frac{1}{|G|^2}|\{(a,b):a^nb=ba^n,\ a,b\in G\}|.$$

این عبارت می‌تواند به‌صورت زیر نمایش داده شود

$$P_n(G)=P_{p^m}(G)=\frac{1}{|G|^2}\sum_{g\in G}|C_G(g^{p^m})|,$$

که در آن $m\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$ و $C_G(g^{p^m})$ مرکزساز g^{p^m} در است. محاسبه $P_n(G)$ از این نظر اهمیت دارد که این فرمول تعمیم حالت خاص $m=0$ با عنوان درجه جابجایی گروه G با نمایش $P_1(G)=P(G)$ است که توسط تعدادی از محققین مورد مطالعه و ارزیابی قرارگرفته است [۹].

در تحقیقات اخیر، عرفانیان و همکاران، همچنین یک فرمول صریح برای n- امین درجه جابجایی یک p-گروه **۲**-مولدی از کلاس دو به دست آورده‌اند [۱۰].

در این مقاله ابتدا تمامی **۲**-گروه‌های متناهی و ناجابه‌جایی دسته‌بندی می‌شوند. سپس، ضمن به دست آوردن مرکزسازهای این گروه‌ها، بردارهای نوع مزدوج آن‌ها نیز محاسبه می‌شوند. سرانجام، به‌عنوان کاربردی مستقیم از نتایج حاصل شده، n-امین درجه جابجایی این کلاس‌ها معرفی می‌شود.

۲- چند تعریف و لم موردنیاز

در این بخش چند لم و نتیجه را روی مرکزسازهای اعضا گروه G ارائه و به اثبات آنها می‌پردازیم. از این نتایج برای بعضی از محاسبات در بخش‌های بعدی استفاده می‌شود.

برای هر $x\in G$، نماد x^G نمایش کلاس مزدوج شامل x و $|x^G|$ که اندیس x در G نامیده می‌شود طول x^G است. همین‌طور از نماد $[b,a]=bab^{-1}a^{-1}=a^ba^{-1}$ برای *جابه‌جاگر* a و b استفاده می‌شود.

تعریف ۲-۱: فرض کنید p یک عدد اول و n یک عدد صحیح مثبت باشد. عدد $e_p(n)$ بزرگ‌ترین توان p در n نامیده می‌شود. به عبارتی $p^{e_p(n)}\mid n$ ولی $p^{e_p(n)+1}\nmid n$.

تعریف ۲-۲: اگر G یک گروه باشد، مجموعه همه طول‌های کلاس‌های مزدوج این گروه که با $\mathrm{ctv}(G)$ نمایش داده می‌شود، بردار نوع مزدوج G نامیده می‌شود.

تعریف ۲-۳: گروه G متادوری است هرگاه شامل یک زیرگروه دوری و نرمال N باشد

به‌طوری‌که گروه خارج قسمت G/N نیز دوری باشد.

یک p-گروه متادوری G به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$G=\langle a,b \mid a^{p^{\alpha}}=1,\ b^{p^{\beta}}=a^{p^{\alpha-\varepsilon}},\ a^{b}=a^{r}\rangle, \qquad (1.2)$$

که در آن $r=p^{\alpha-\gamma}\pm 1$ و $\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon$ اعداد صحیح مثبت‌اند[۳]. در حالتی که $r=p^{\alpha-\gamma}-1$ باشد گروه G را از نوع منفی و در حالت $r=p^{\alpha-\gamma}+1$ آن را گروه از نوع مثبت می‌نامیم.

در گروه توصیف شده G معادله **(۱.۲)**، روابط زیر برای اثبات نتایج پیش رو مورد استفاده قرار می‌گیرند.

$$a^{i}b^{j}a^{s}b^{t}=a^{i+sr^{j}}b^{j+t}.$$

همین‌طور، تساوی زیر را خواهیم داشت:

$$(a^{i}b^{j})^{k}=a^{i(1+r^{j}+\cdots+r^{(k-1)j})}b^{kj}=a^{i\frac{1-r^{kj}}{1-r^{j}}}b^{kj} \qquad (2.2)$$

که در آن $1\le i,s\le p^{\alpha},\ 1\le j,t\le p^{\beta}$. به‌علاوه

$$(a^{i}b^{j})^{a^{s}b^{t}}=a^{r^{t}(i+s-sr^{j})}b^{j}.$$

بنابراین، مرکزساز عضو $a^{i}b^{j}$ از G برابر است با:

$$C_G(a^{i}b^{j})=\{a^{s}b^{t}:1\le s\le p^{\alpha},\ 1\le t\le p^{\beta},\ s(1-r^{j})r^{t}\overset{p^{\alpha}}{\equiv} i(1-r^{t})\} \qquad (3.2)$$

در اینجا بنابر کلاس‌بندی p-گروه‌های متادوری نا آبلی بورل، ۲-گروه‌های کلاس دو و بیشتر می‌توانند به پنج خانواده غیر همریخت با نمایش‌های زیر دسته‌بندی شوند[۱۱].

قضیه ۲−۴: فرض کنید G یک **۲**-گروه ناجابه‌جایی متادوری از کلاس دو باشد. در این صورت G با گروه زیر، موسوم به گروه کواترنیون از مرتبه ۸ یک ریخت است.

$$\text{(i)}\quad G\simeq\langle a,b \mid a^{4}=1,\ b^{2}=[b,a]=a^{2}\rangle.$$

قضیه ۲−۵: فرض کنید G یک گروه از نوع منفی باکلاس حداقل سه باشد. در این صورت G دقیقاً با یکی از گروه‌های زیر یک‌ریخت است:

$$\text{(ii)}\quad G\simeq\langle a,b \mid a^{2^{\alpha}}=b^{2}=1,\ a^{b}=a^{-1}\rangle,$$

که در آن $\alpha\ge 3$.

$$\text{(iii)}\quad G\simeq\langle a,b \mid a^{2^{\alpha}}=1,\ b^{2}=a^{2^{\alpha-1}},\ a^{b}=a^{-1}\rangle,$$

که در آن $\alpha\ge 3$.

$$\text{(iv)}\quad G\simeq\langle a,b \mid a^{2^{\alpha}}=b^{2^{\beta}}=1,\ a^{b}=a^{-1}\rangle,$$

که در آن $\alpha\ge 3$ و $\beta>1$.

$$\text{(v)}\quad G\simeq\langle a,b \mid a^{2^{\alpha}}=1,\ b^{2^{\beta}}=a^{2^{\alpha-1}},\ a^{b}=a^{-1}\rangle,$$

که در آن $\alpha\ge 3$ و $\beta>1$.

برای اختصار، تمام ۲-گروه‌های متادوری ارائه شده در قضیه‌های ۴.۲و ۵.۲ را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد

$$G\simeq\langle a,b \mid a^{2^{\alpha}}=1,\ b^{2^{\beta}}=a^{2^{\alpha-\varepsilon}},\ a^{b}=a^{-1}\rangle \qquad (4.2)$$

که در آن $\alpha\ge 3$، $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$ و ε یک عدد صحیح مثبت است.

این گروه، همه حالات ممکن کلاس‌بندی گروه‌های ذکرشده در قضیه‌های ۴.۲و ۵.۲ را پوشش می‌دهد.

در این مقاله از کلاس‌بندی ۲-گروه‌های ناآبلی

متناهی متادوری بورل با ساختار معادله (۴.۲) استفاده می‌کنیم.

۳- اندازه مرکزسازها و بردارهای نوع مزدوج

در این بخش، فرمول دقیقی برای اندازه مرکزسازهای یک عضو دلخواه از ۲-گروه‌های متادوری G' معادله (۴.۲) را به دست می‌آوریم. در این روند هم‌چنین مجموعه اندازه‌های هر کلاس مزدوج، $\mathrm{ctv}(G)$ را محاسبه می‌کنیم.

قضیه ۳-۱: فرض کنید G یک ۲-گروه متادوری با نمایش $G\simeq\langle a,b \mid a^{2^{\alpha}}=1, b^{2^{\beta}}=a^{2^{\alpha-\varepsilon}}, a^b=a^{-1}\rangle$ باشد. در این صورت برای هر $a^ib^j\in G$، داریم:

الف) اگر $a^ib^j\in Z(G)$ آنگاه $|C_G(a^ib^j)|=2^{\alpha+\beta}$.

ب) اگر $a^ib^j\notin Z(G)$ و j زوج باشد، آنگاه $|C_G(a^ib^j)|=2^{\alpha+\beta-1}$.

ج) اگر $a^ib^j\notin Z(G)$ و j فرد باشد، آنگاه $|C_G(a^ib^j)|=2^{\beta-1}$.

اثبات: واضح است که $Z(G)=\langle a^{2^{\alpha-1}}, b^2\rangle$. با محاسبه مستقیم می‌توان نشان داد:

$$C_G(a^ib^{2j})=C_G(a^i)=\begin{cases}\langle a,b^2\rangle, & a^i\notin Z(G)\\ \langle a,b\rangle, & a^i\in Z(G).\end{cases}$$

فرض می‌کنیم $x\in C_G(a^ib^{2j})$، در این صورت

$$xa^i=xa^ib^{2j}b^{-2j}=a^ib^{2j}xb^{-2j}=a^ix,$$

زیرا b^{2j} یک عنصر مرکزی است. برعکس، حالتی را در نظر می‌گیریم که $x\in C_G(a^i)$، خواهیم داشت

$$xa^ib^{2j}=a^ixb^{2j}=a^ib^{2j}x=a^ix.$$

بنابراین، $C_G(a^ib^{2j})=C_G(a^i)$. حال اگر $a^i\in Z(G)$ آنگاه هر عنصر $C_G(a^i)$ می‌تواند به‌صورت a^mb^n نمایش داده شود که در آن m و n دو عدد صحیح اند، پس $C_G(a^i)=\langle a,b\rangle$. اگر $a^i\notin Z(G)$ و $a^sb^t\in C_G(a^i)$ آنگاه از رابطه $a^b=a^{-1}$ و با انجام محاسبات ساده تساوی $a^sb^ta^i=a^{s+i(-1)^t}b^t=a^{s+i}b^t$ حاصل می‌شود. بنابراین،

$$s+i(-1)^t\equiv i+s \pmod{2^{\alpha}}$$

از این رو برای هر $k\in\mathbb{Z}$ داریم $i((-1)^t-1)=2^{\alpha}k$. اگر t یک عدد زوج باشد آنگاه برای هر i داریم $k=0$، بنابراین $C_G(a^i)=\langle a,b^2\rangle$. اگر t فرد باشد آنگاه عدد صحیحی مانند k' وجود دارد به‌طوری‌که $2i=2^{\alpha}k'$، پس $i=2^{\alpha-1}k'$. ازاینجا نتیجه می‌شود $a^i\in Z(G)$ که یک تناقض است. اکنون، اندازه مرکزساز عضو a^ib^{2j} از گروه G را حساب می‌کنیم. با استفاده از محاسبات بالا، در حالتی که $a^i\notin Z(G)$، تساوی زیر برقرار است:

$$|C_G(a^ib^j)|=|C_G(a^i)|=|\langle a,b^2\rangle| =\frac{|\langle a\rangle|\cdot|\langle b^2\rangle|}{|\langle a\rangle|\cap|\langle b^2\rangle|} =\frac{2^{\alpha}.2^{\beta+\varepsilon-1}}{2^{\varepsilon}}=2^{\alpha+\beta-1}.$$

اگر $a^i\in Z(G)$ آنگاه،

$$C_G(a^ib^j)|=|C_G(a^i)|=|\langle a,b\rangle| =\frac{|\langle a\rangle|\cdot|\langle b\rangle|}{|\langle a\rangle|\cap|\langle b\rangle|} =\frac{2^{\alpha}.2^{\beta+\varepsilon}}{2^{\varepsilon}}=2^{\alpha+\beta}.$$

بنابراین،

$$|C_G(a^ib^{2j})|=\begin{cases}2^{\alpha+\beta-1}, & a^ib^{2j}\notin Z(G)\\ 2^{\alpha+\beta}, & a^ib^{2j}\in Z(G).\end{cases}$$

از طرف دیگر، با انجام محاسبات مشابه، تساوی زیر و همین‌طور اندازه مرکزسازهای G را می‌توان به دست آورد. بنابراین،

$$C_G(a^ib^{2j+1}) = C_G(a^ib) = \begin{cases} \langle a^{2^{\alpha-1}}, a^{-i}b\rangle, & a^i \notin Z(G) \\ \langle a^{2^{\alpha-1}}, b\rangle, & a^i \in Z(G). \end{cases}$$

حال با توجه به معادلات فوق، مرتبه مرکزساز عضو a^ib^{2j} از گروه G برابر است با $|C_G(a^ib^{2j+1})| = 2^{\beta+1}$. از این رو، برای هر عضو دلخواه a^ib^j از گروه G که در آن $1 \le i \le 2^\alpha$ و $1 \le j \le 2^\beta$، اندازه مرکز ساز آن برابر است با

$$|C_G(a^ib^{2j+1})| = \begin{cases} 2^{\alpha+\beta}, & a^ib^j \in Z(G) \\ 2^{\alpha+\beta-1}, & a^ib^j \notin Z(G),\ j \text{ even} \\ 2^{\beta+1}, & a^ib^j \notin Z(G),\ j \text{ odd}. \end{cases}$$

اثبات همان چیزی که خواسته شد.

در نتیجه زیر، مجموعه بردارهای نوع مزدوج گروه G را با استفاده از اندازه مرکزسازهای این گروه که در قضیه ۳–۱ به دست آورده‌ایم محاسبه می‌کنیم

نتیجه ۳–۲: فرض کنید G یک ۲-گروه متادوری با نمایش

$$G \simeq \langle a,b \mid a^{2^\alpha} = 1,\ b^{2^\beta} = a^{2^{\alpha-\varepsilon}},\ a^b = a^{-1}\rangle,$$

باشد طوری که $\alpha \ge 2$، در این صورت $ctv(G) = \{1, 2, 2^{\alpha-1}\}$.

اثبات: قضیه ۳–۱ نشان می‌دهد که مقادیر $2^{\alpha+\beta}$، $2^{\alpha+\beta-1}$ و $2^{\beta+1}$ حالت‌های ممکن اندازه‌های مرکزساز اعضا گروه G هستند. با تقسیم مرتبه G یعنی $2^{\alpha+\beta}$ بر اندازه مرکزسازهای این گروه، به مجموعه ctv(G) می‌رسیم.

۴- n-امین درجه‌های جابجایی گروه G

در این بخش، n-امین درجه جابجایی ۲-گروه‌های متادوری G را محاسبه می‌کنیم. قبل از ارائه قضیه اصلی (۴–۲)، لازم است چند قضیه و لم به صورت زیر بیان و اثبات شوند.

قضیه ۴–۱: فرض کنید G یک ۲-گروه متادوری متناهی باشد. در این صورت $P_n(G) = P_{2^m}(G)$ که در آن $n = 2^m \cdot \bar{n}$ به‌طوری‌که $gcd(2, \bar{n}) = 1$.

اثبات: فرض کنید G یک گروه از نمای 2^kباشد. اگر $m \ge k$ آنگاه $[a,b]^{2^m \cdot \bar{n}} = 1$ و $P_n(G) = 1$. در حالتی که $m < k$ باشد، $[a,b]^{2^m \cdot \bar{n}}$ به $\bar{n}$ بستگی ندارد یعنی $[a,b]^{2^m} = 1$. این حالت به خاطر ۲-گروه بودن G است؛ بنابراین $P_n(G) = P_{2^m}(G)$.

براساس لم ۱.۳، $P_n(G)$ می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود

$$P_n(G) = P_{2^m}(G) = \frac{1}{|G|^2}\sum_{g \in G} |C_G(g^{2^m})|$$

که در آن m یک عدد صحیح نامنفی و $C_G(g^{2^m})$ مرکزساز g^{2^m} در G است.

لم ۴–۲: فرض کنید

$$G = \langle a,b \mid a^{p^\alpha} = 1,\ b^{p^\beta} = a^{p^{\alpha-\varepsilon}},\ a^b = a^r\rangle,$$

که در آن $r = p^{\alpha-\gamma} + 1$ و p یک عدد فرد اول یا $\alpha - \gamma \ge 2$. اگر $a^{i_m}b^{j_m} = (a^ib^j)^{p^m}$، آنگاه

$$e_p(i_m) = e_p(i) + m \qquad (1)$$

$$e_p(j_m) = e_p(j) + m. \qquad (2)$$

اثبات: از معادله (۲.۲) داریم

$$a^{i_m}b^{j_m} = (a^ib^j)^{p^m} = a^{i(1+r^j+\dots+r^{(p^m-1)j})}b^{p^mj} = a^{i\cdot\frac{1-r^{p^mj}}{1-r^j}}b^{p^mj}.$$

این واقعیت که $e_p(i_m)=e_p(i\frac{1-r^{p^m j}}{1-r^j})$، ایجاب می‌کند

$$\begin{aligned}e_p(i_m)&=e_p(i)+e_p(1-r^{p^m j})-e_p(1-r^j)\\&=e_p(i)+\alpha-\gamma+e_p(p^m j)-(\alpha-\gamma+e_p(j))\\&=e_p(i)+m.\end{aligned}$$

که نتیجه به دست می‌آید.

نتیجه ۴ – ۳: فرض کنید G یک ۲- گروه متادوری با نمایش $G=\langle a,b|a^{2^\alpha}=1, b^{2^\beta}=a^{2^{\alpha-\varepsilon}}, a^b=a^{-1}\rangle$ و $\alpha\geq 2$ باشد. اگر $a^{i_m}b^{j_m}=(a^ib^j)^{2^m}$، آنگاه

$$e_2(i_m)=e_2(i)+m \qquad (3)$$
$$e_2(j_m)=e_2(j)+m. \qquad (4)$$

اثبات: واضح است.

نتیجه ۳ – ۳ نشان می‌دهد که تساوی $P_n(G)=P_{2^{e_2(n)}}(G)$ برقرار است؛ بنابراین، از این پس تساوی $n=2^m$ را در نظر می‌گیریم که در آن $m\geq 0$.

با توجه به بحث‌های فوق و قضیه زیر می‌توان به فرمولی دقیق برای n–امین درجه جابجایی ۲-گروه G برحسب پارامترهای α و m دست یافت.

قضیه ۴ – ۲: فرض کنید G یک ۲- گروه متادوری ناآبلی به‌صورت

$$G=\langle a,b\,|\,a^{2^\alpha}=1,\ b^{2^\beta}=a^{2^{\alpha-\varepsilon}},\ a^b=a^{-1}\rangle$$

باشد که در آن $m>0$ و $\alpha\geq 2$، در این صورت

$$P_{2^m}(G)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2^{\alpha-m+1}}.$$

اثبات: ابتدا تساوی زیر را اثبات می‌کنیم.

$$(a^ib^j)^{2^m}=\begin{cases}b^{2^m j} & ,\ j \text{ odd}\\ a^{2^m i}b^{2^m j} & ,\ j \text{ even.}\end{cases}$$

با توجه به لم ۳ – ۲ داریم:

$$\begin{aligned}(a^ib^j)^{2^m}&=a^{i(1+r^j+\cdots+r^{(2^m-1)j})}b^{2^m j}\\&=a^{i\cdot\frac{1-r^{2^m j}}{1-r^j}}b^{2^m j}.\end{aligned}$$

همین‌طور با توجه به رابطه $a^b=a^{-1}$، اگر j فرد باشد آنگاه $(a^ib^j)^{2^m}=(a^\cdot b^j)^{2^m}=b^{2^m j}$ و اگر j زوج باشد داریم:

$$(a^ib^j)^{2^m}=a^{i(1+1+\cdots+1)}b^{2^m j}=a^{2^m i}b^{2^m j}.$$

از محاسبات فوق و قضیه ۳ – ۱ نتایج زیر به دست می‌آیند:

$$|C_G(a^{i_m}b^{j_m})|=\begin{cases}2^{\alpha+\beta-1}, & j \text{ even}, 2^{\alpha+m-1}\nmid i\\ 2^{\alpha+\beta}, & j \text{ odd or } (j \text{ even}, 2^{\alpha+m-1}|i).\end{cases}$$

بنابراین، n-امین درجه جابجایی گروه G در این حالت برابر است با

$$\begin{aligned}P_{2^m}(G)&=\frac{1}{2^{2\alpha+2\beta}}\sum_{a^ib^j\in G}|C_G(a^{i_m}b^{j_m})|\\&=\frac{1}{2^{2\alpha+2\beta}}[2^{\alpha+\beta}(2^\alpha\cdot 2^{\beta-1}+2^{m+1}\cdot 2^{\beta-1})\\&\qquad+2^{\alpha+\beta-1}(2^\alpha-2^{m+1})\cdot 2^{\beta-1}]\\&=\frac{3}{4}+\frac{1}{2^{\alpha-m+1}}.\end{aligned}$$

نتیجه ۴ – ۵: فرض کنید G، ۲- گروه متادوری ناآبلی قضیه ۴ – ۲ باشد، در این صورت درجه جابجایی G برابر است با

$$P(G)=\frac{1}{4}+\frac{3}{2^{\alpha+1}}.$$

اثبات: با توجه به قضیه ۳–۱ و قضیه ۴–۴، در حالتی که $m=0$ داریم:

$$
\begin{aligned}
&P(G)\\
&=P_1(G)\\
&=\frac{1}{2^{2\alpha+2\beta}}\left(\sum_{a^ib^j\in Z(G)}+\sum_{\substack{a^ib^j\notin Z(G)\\ j\ \text{even}}}+\sum_{\substack{a^ib^j\notin Z(G)\\ j\ \text{odd}}}\right)|C_G(a^{im}b^{jm})|\\
&=\frac{1}{2^{2\alpha+2\beta}}[2^{\alpha+\beta}\cdot 2^{\beta-1}+2^{\alpha+\beta-1}\cdot 2^{\beta-1}(2^{\alpha}-2)+2^{\beta+1}\cdot 2^{\beta-1}\cdot 2^{\alpha})]\\
&=\frac{1}{4}+\frac{3}{2^{\alpha+1}}.
\end{aligned}
$$

اثبات همان چیزی که خواستیم.

مثال ۴–۶: با در نظر گرفتن حالت‌های $m=2$ و $\alpha=4$ در قضیه ۴–۲، ۴-امین درجه جابجایی ۲-گروه‌های متادوری Q_{32} و D_{32} عبارت‌اند از $P_4(D_{32})=P_4(Q_{32})=\frac{7}{8}$. همین‌طور با اعمال مقدار $\alpha=2$ در ۲-گروه G و با توجه به نتیجه ۴–۵، درجه جابجایی گروه‌های متادوری D_8 و Q_8 برابر خواهند شد. درواقع، $P_1(D_8)=P_1(Q_8)=\frac{5}{8}$.

۵- نتایج

در این مقاله، مرکزسازها و بردارهای نوع مزدوج ۲-گروه‌های متادوری ناآبلی و متناهی محاسبه شده‌اند، همین‌طور احتمال جابجایی عناصر دلخواه با توان n با هر عنصر از گروه G مورد مطالعه قرار گرفته است. در آخر، درجه جابجایی چند گروه خاص به‌عنوان کاربرد مستقیمی از نتایج به‌دست آمده مورد ارزیابی قرارگرفته است. همچنین نشان داده شد، اندازه همه ۲-گروه‌های متادوری ارائه شده در رده‌بندی بورل با هم برابرند. علاوه براین درجه جابجایی این گروه‌ها نیز دارای فرمول یکسانی هستند.

فهرست منابع

[1] A. R. Camina, R. D. Camina. The influence of conjugacy class sizes on the structure of finite groups: a survey. Asian-Eur. J. Math 4(4): 559-588(2011)

[2] N. Itˆo. On finite groups with given conjugate type II. Osaka J. Math 7: 231-251(1970)

[3] X. Liua, Y. Wangc, H. Wei. Notes on the length of conjugacy classes of finite groups. J. Pure Appl. Algebra 196: 111-117(2005)

[4] A. Ahmad, S. Magidin, R. F. Morse. Two generator p-groups of nilpotency class 2 and their conjugacy classes. Publ. Math. Debrecen 81: 145-166(2012)

[5] A. Beltran, M. J. Felipe. Some class size conditions implying solvability of finite groups. J. Group Theory 9: 787-797(2006)

[6] K. Moradipour, N. H. Sarmin, A. Erfanian. Conjugacy classes and commutativity degree of metacyclic p-groups. Science Asia 38: 113-117(2012)

[7] Al. Ashrafi. Counting the centralizers of some finite groups. Korean J. Comput. Appl. Math. 7: 115-124(2000)

[8] A. Erfanian, B. Tolue, N. H. Sarmin. Some considerations on the n-th commutativity degrees of finite groups. Ars. Comb 3: 495-506(2011)

[9] M. Zarin. On solubility of groups with finitely many centralizers. B. Iran. Math. Soc. 39: 517-521(2013)

[10] F. Normahia, N. H. Sarmin, A. Erfanian, B. Tolue. The relative n-th commutativity degree of 2-generator p-groups of nilpotency class two. Ars. Comb 109: 65-70(2013)

[11] J. R. Beuerle. An elementary classification of finite metacyclic p-groups of class at least three. Algebra Colloq 12:553-562 (2005)