

حل عددی مسأله ریلی - استوکس کسری با استفاده از توابع پایه شعاعی مکان - زمان

نفیسه نقره‌ای^۱، اصغر کرایه چیان^{۲*}، علیرضا سهیلی^۳

^(۱و۲و۳) گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۱۱/۰۴ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۷/۲۲

چکیده

در این مقاله، جواب مسأله دو بعدی ریلی - استوکس برای یک جریان گرمایی درجه دوم تعمیم یافته با مشتق کسری را تقریب می‌زنیم. این تقریب بر پایه استفاده از توابع پایه شعاعی (RBFs) مکان- زمان و روش انتگرال‌گیری عددی سینک می‌باشد. در این روش، از تابع پایه شعاعی گاوسین استفاده شده و بین متغیرهای زمان و مکان تمایز قائل نمی‌شویم و نقاط هم‌محلی، هم شامل مختصات زمان و هم شامل مختصات مکان هستند. از روش انتگرال‌گیری عددی سینک با تبدیل نمایی یگانه برای تقریب قسمت انتگرالی مشتق کسری استفاده می‌کنیم. مشتق کسری، ریمان - لیوویل انتخاب شده است. روش ارائه شده روی دو مثال با مقادیر مختلف برای مرتبه مشتق کسری، پیاده سازی شده که نتایج حاصل، اثر بخشی روش را تأیید می‌کند و نشان می‌دهد که با استفاده از تعداد کمی از نقاط هم‌محلی برای تابع پایه شعاعی می‌توان نتایج دقیقی بدست آورد. لازم به ذکر است که تمامی محاسبات با کمک نرم افزار ممتیکا انجام شده است.

واژه‌های کلیدی: مسأله ریلی استوکس، حسابان کسری، روش سینک، تابع پایه شعاعی گاوسین، فرمول‌بندی مکان- زمان.

۱- مقدمه

معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری در رشته‌های مختلف علوم مانند مکانیک، فیزیک، زیست‌شناسی و مهندسی به کار برده می‌شود. تاریخچه و قضیه‌های مربوط به حسابان کسری در [۱، ۲، ۳] بررسی شده است. کتب بسیاری در زمینه کاربرد حسابان کسری موجود است [۴، ۵، ۶، ۷].

مسئله دو بعدی ریلی- استوکس برای یک جریان گرمایی درجه دوم تعمیم یافته با مشتق کسری به صورت

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = {}_0D_t^{1-\gamma} \left[\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} + f(x,y,t), \quad (1)$$

$(x,t) \in \Omega \times (0,T], \quad x = (x,y),$

با شرط مرزی

$$u(x,y,t) = w_1(x,y,t), \quad (2)$$

$(x,t) \in \partial\Omega \times (0,T],$

و شرط اولیه

$$u(x,y,0) = w_2(x,y), \quad (x,y) \in \Omega \quad (3)$$

تعریف شده است که در آن $\Omega = [a,b] \times [c,d]$ ، $0 < \gamma < 1$ و ${}_0D_t^{1-\gamma} u(x,y,t)$ مشتق کسری ریمان- لیوویل از مرتبه $1-\gamma$ می‌باشد و به صورت زیر بیان شده است:

$${}_0D_t^{1-\gamma} u(x,y,t) = \frac{\partial}{\partial t} {}_0I_t^\gamma u(x,y,t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t u(x,y,s) (t-s)^{\gamma-1} ds \right), \quad (4)$$

که در آن ${}_0I_t^\gamma$ عملگر انتگرال کسری می‌باشد. مسئله ریلی- استوکس برای یک جریان گرمایی درجه دوم در [۸، ۹] بررسی شده است. روش‌های

مختلفی مانند روش تفاضلات متناهی صریح و ضمنی [۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴]، سینوس فوریه و تبدیل لاپلاس [۱۵] و روش بدون شبکه RBF [۱۶] برای تقریب جواب مسأله (۱) - (۳) استفاده شده است. در این مقاله، تابع سه متغیره $u(x,y,t)$ را که جواب مسأله (۱) - (۳) است با استفاده از روش هم‌محلی پایه شعاعی گوسین (GRBF) تقریب می‌زنیم. همچنین در معادله (۱) مشتق کسری داریم که شامل انتگرال کسری است. انتگرال کسری را به روش انتگرال‌گیری عددی سینک SE که روش بسیار دقیق برای انتگرال‌گیری عددی می‌باشد، تقریب می‌زنیم. برای این منظور ابتدا در بخش ۲ توابع پایه شعاعی را به اختصار بیان می‌کنیم. در بخش ۳ به معرفی تابع سینک و روش انتگرال‌گیری عددی سینک می‌پردازیم. در بخش ۴ روش عددی مورد نظر را بیان می‌کنیم و در بخش ۵ با ارائه دو مثال، دقت و کارایی روش را نشان می‌دهیم. سرانجام در بخش ۶ نتایج برآمده از این مقاله را بیان می‌کنیم.

۲- روش تقریبی توابع پایه شعاعی

روش توابع پایه شعاعی یک زیرمجموعه از روش‌های بدون شبکه می‌باشد که برای درون‌یابی و تقریب مسائل چند بعدی و همچنین حل معادلات دیفرانسیل جزئی بسیار مناسب است. توابع پایه شعاعی (RBFs) توابعی وابسته به فاصله از نقاط مرکزی هستند. بنابراین می‌توان با پیاده‌سازی آن‌ها، یک صفحه را با داده‌های پراکنده در فضاهای دو بعدی، سه بعدی یا با ابعاد بالاتر بازسازی نمود [۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰].

بسط تقریب $u(x)$ را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$u(x) = \sum_{i=1}^N d_i \Phi(\|x_i - x\|_2) \quad (5)$$

$$= \sum_{i=1}^N d_i \Phi_i(r),$$

اساس روش‌های سینک SE و سینک DE پیشنهاد کردند [۲۱]. بامان و استنگر مروری بر کاربرد روش‌های سینک برای حل انتگرال کسری، مشتقات کسری، معادلات کسری و معادلات دیفرانسیل کسری ارائه دادند [۲۵]. در این بخش، برخی از خواص روش انتگرال عددی سینک را بیان می‌کنیم. تابع سینک به صورت زیر تعریف شده است:

$$\text{Sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

فرض کنید j یک عدد صحیح و h یک عدد مثبت باشد. $-j$ امین تابع سینک انتقال یافته را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$S(j, h)(t) = \text{Sinc}\left(\frac{t - jh}{h}\right).$$

تقریب سینک روی بازه (a, b) به صورت

$$f(\psi_{a,b}(z)) \approx \sum_{k=-M}^M f(\psi_{a,b}(kh))S(k, h)(z), \\ z \in \mathbb{R},$$

است که در آن $\psi_{a,b} = \phi_{a,b}^{-1}$ و $\phi_{a,b}$ نگاشتی یک به یک و هم‌دیس می‌باشد که بازه (a, b) را به \mathbb{R} انتقال می‌دهد.

که در آن $i = 1, \dots, N$ ، \mathbf{x}_i نقاط مرکزی، $\|\cdot\|_2$ نرم اقلیدسی، d_i ضرایب مجهول و Φ تابع RBF می‌باشد.

انواع مختلفی از RBFها وجود دارند که برخی از آنها در جدول ۱ ارائه شده است. بسیاری از RBFها با ثابت ε تعریف شده‌اند که پارامتر شکل نامیده می‌شود. انتخاب پارامتر شکل تأثیر بسزایی در دقت روش RBF دارد. همگرایی نمایی RBF در [۱۹]، [۲۰] بررسی شده است. در این مقاله از تابع پایه گاوسین استفاده می‌شود.

۳- تابع سینک

اوکایاما و همکارانش دو روش جدید سینک را بر پایه تبدیل نمایی یگانه (SE) و تبدیل نمایی دوگانه (DE) برای مشتقات کسری بسط دادند [۲۱]. آنها از این روش‌ها برای حل معادلات انتگرال فردهلم خطی از نوع دوم با هسته منفرد ضعیف استفاده کردند [۲۲]، نتایج به دست آمده برای تعداد زیادی از نقاط هم‌محلی سینک SE و تعداد کمی از نقاط سینک DE بسیار دقیق است. در واقع، نویسندگان در [۲۱، ۲۲، ۲۳] از ایده‌ی رایلی [۲۴] برای گسترش شیوه‌های موجود در روش‌های سینک برای تقریب زدن جواب معادلات انتگرال ولترا خطی از نوع دوم با هسته منفرد ضعیف استفاده کردند.

اوکایاما و همکاران دو فرمول تقریبی جدید برای مشتقات کسری کاپوتو از مرتبه $0 < \alpha < 1$ بر

جدول ۱: معرفی تعدادی از توابع پایه شعاعی

نام	علامت اختصاری	تعریف
چندمربعی	MQ	$\Phi(r) = (\varepsilon^2 r^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$
چند مربعی معکوس	IMQ	$\Phi(r) = (\varepsilon^2 r^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$
گاوسین	GA	$\Phi(r) = e^{-\varepsilon^2 r^2}$
سپلین صفحه مسطح	TPS	$\Phi(r) = r^{2\beta} \log r, \beta \in \mathbb{N}$

در این بخش، ابتدا روش تابع پایه شعاعی گوسین را برای متغیرهای مکان و زمان در معادله (۱) - (۳) بیان می‌کنیم. جواب معادله (۱) - (۳) را به صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$u(x, y, t) = \sum_{i=1}^N d_i \Phi_i(r), \quad (7)$$

که در آن $N = n^3$ و برای $p, q, z = 1, 2, \dots, n$ داریم:

$$\phi_i(r) = \exp(-\varepsilon^2 r^2) = \exp\left(-\varepsilon^2 \left((x - x_p)^2 + (y - y_q)^2 + (t - t_z)^2\right)\right), \quad (8)$$

که در آن طول گام و نقاط شبکه متغیرهای مکان و زمان به صورت زیر است:

$$h_x = \frac{b-a}{n-1}, \quad h_y = \frac{d-c}{n-1}, \quad h_t = \frac{T}{n-1}, \\ x_p = (p-1)h_x, \quad y_q = (q-1)h_y, \\ t_z = (z-1)h_t.$$

حال قسمت انتگرالی مشتق کسری در (۴) را با استفاده از روش سینک SE تقریب می‌زنیم. با تغییر متغیر

$$s = \psi_{0,t}(\tau) = \frac{t}{2} \tanh\left(\frac{\tau}{2}\right) + \frac{t}{2}$$

انتگرال ${}_0 I_t^\gamma [g](t)$ را برای تابع مفروض $g(t)$ به صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$${}_0 I_t^\gamma [g](t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t \frac{g(s)}{(t-s)^{1-\gamma}} ds \\ = \frac{t^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\psi_{0,t}(\tau))}{(1+e^{-\tau})(1+e^\tau)^\gamma} d\tau, \quad (9)$$

بنا به (۶) داریم:

$${}_0 I_t^\gamma [g](t) \approx \mathcal{J}_M [g](t) = \frac{t^\gamma}{\Gamma(\gamma)} h \sum_{k=-M}^M \frac{g(\psi_{0,t}(kh))}{(1+e^{-kh})(1+e^{kh})^\gamma}, \quad (10)$$

از آنجا که مسأله اصلی روی بازه متناهی (a, b) تعریف شده است، پس به تبدیلی نیاز داریم که \mathbb{R} را به یک بازه متناهی (a, b) نگاشت دهد. ما از تبدیل نمایی یگانه

$$t = \psi_{a,b}(z) = \frac{b-a}{2} \tanh\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{a+b}{2},$$

استفاده می‌کنیم [۲۳، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲]. تابع معکوس آن به صورت زیر است:

$$z = (\psi_{a,b})^{-1}(t) = \phi_{a,b}(t) = \log\left(\frac{t-a}{b-t}\right).$$

نقاط سینک را به صورت $t_j = \psi_{a,b}(jh)$ $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ تعریف می‌کنیم و داریم:

$$f(t) = \sum_{j=-M}^M f(\psi_{a,b}(jh)) S(j, h) (\phi_{a,b}(t)), \\ t \in (a, b).$$

همچنین انتگرال عددی سینک به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_a^b f(t) dt = h \sum_{j=-M}^M f(\psi_{a,b}(jh)) \psi'_{a,b}(jh), \quad (6)$$

که در آن M یک عدد صحیح مثبت می‌باشد و $h = \sqrt{\frac{\pi d}{\alpha M}}$ به طوری که $0 < d < \pi$ و $\alpha > 0$ مفروض است.

اگر از ϕ_{SE} استفاده شود، تقریب سینک و انتگرال عددی سینک، نمایی یگانه است و اگر ϕ_{DE} به کار رود، به تقریب سینک و انتگرال عددی سینک، نمایی مضاعف گفته می‌شود.

۴- روش توابع پایه شعاعی مکان- زمان و روش انتگرال‌گیری عددی سینک با تبدیل نمایی یگانه

$$= \sum_{i=1}^N d_i \exp\left(-\varepsilon^2\left((x-x_p)^2+(y-y_q)^2+t_z^2\right)\right) \\ = w_2(x,y), \quad (x,y) \in \Omega$$

با قرار دادن N نقطه مناسب در معادلات (۱۳)- (۱۵) یک دستگاه از معادلات با N معادله و N مجهول d_i به دست می‌آوریم. با حل این دستگاه به روش LU و جایگذاری ضرایب به دست آمده در (۷) می‌توان جواب معادله (۱)- (۳) را تقریب زد.

در ادامه دو قضیه زیر، نمایی بودن کران خطای دو روش انتگرال‌گیری عددی سینک و تابع پایه شعاعی را نشان می‌دهد.

قضیه ۴-۱. فرض کنید تابع f در بازه (a,b) پیوسته و در $D_{SE}(d)=\{z \in \mathbb{C} \mid w \in D_d\}$ تحلیلی باشد که در آن

$$D_d \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}(z)| < d\}, \quad 0 < d < \frac{\pi}{2}.$$

همچنین برای هر $z \in D_{SE}(d)$

$$|f(z)| \leq C_1 \left| \left((b-z)(a+z) \right)^{\frac{\beta}{2}-1} \right|$$

که در آن $C_1 > 0$ و $\beta > 0$ اعداد ثابت هستند. آن‌گاه عدد ثابت C_2 مستقل از M موجود است به طوری که

$$\left| \int_a^b f(t) dt - h \sum_{j=-M}^M f(\psi_{a,b}(jh)) \psi'_{a,b}(jh) \right| \\ \leq C_2 e^{-\sqrt{2\pi d \beta M}}.$$

اثبات. به [۳۰] مراجعه شود.

قضیه ۴-۲. فرض کنید $\Omega \in \mathbb{R}^d$ کران‌دار است و $\Phi(\|x-x_i\|_2)$ یک تابع معین مثبت شرطی باشد و تابع f در رابطه

$$\cdot h = \sqrt{\frac{\pi d}{\gamma M}}$$

با استفاده از (۷) و (۱۰) می‌توان مشتق کسری در معادله (۱) را به صورت زیر تقریب زد:

$${}_0 D_t^{1-\gamma} (\Delta u(x,y,t)) \\ = \frac{d}{dt} ({}_0 I_t^\gamma [\Delta u]) \approx \frac{d}{dt} (\mathcal{J}_M [\Delta u]) \quad (11) \\ = \frac{h}{\Gamma(\gamma)} \frac{d}{dt} \left[t^\gamma \sum_{k=-M}^M \sum_{i=1}^N \frac{d_i \Delta \Phi_i(r^{kh})}{(1+e^{-kh})(1+e^{kh})^\gamma} \right],$$

که در آن

$$\Delta \Phi_i(r^{kh}) = \quad (12) \\ -4\varepsilon^2 \left(1 - \varepsilon^2 (x-x_p)^2 + (y-y_q)^2 \right) \times \\ \exp\left(-\varepsilon^2\left((x-x_p)^2+(y-y_q)^2+(\psi_{0t}(kh)-t_z)^2\right)\right).$$

حال با جایگذاری (۷) و (۱۱) در (۱) و انتگرال‌گیری از دو طرف معادله (۱) داریم:

$$\sum_{i=1}^N d_i \Phi_i(r) - w_2(x,y) \quad (13) \\ = \frac{h}{\Gamma(\gamma)} t^\gamma \sum_{k=-M}^M \sum_{i=1}^N \frac{d_i \Delta \Phi_i(r^{kh})}{(1+e^{-kh})(1+e^{kh})^\gamma} \\ + ht \sum_{k=-M}^M \sum_{i=1}^N \frac{d_i e^{kh} \Delta \Phi_i(r^{kh})}{(1+e^{kh})^2} + \tilde{f}(x,y,t),$$

که در آن $(x,t) \in \Omega \times (0,T]$ و

$$\tilde{f}(x,y,t) = \int_0^t f(x,y,s) ds.$$

همچنین برای شرط مرزی (۲) داریم:

$$\sum_{i=1}^N d_i \Phi_i(r) = w_1(x,y,t), \quad (14) \\ (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T],$$

و برای شرط اولیه (۳) داریم:

$$\sum_{i=1}^N d_i \Phi_i(r^0) \quad (15)$$

را با مقدار مرزی
 $u(0,y,t) = e^y t^{1+\gamma}$, $u(1,y,t) = e^{1+y} t^{1+\gamma}$,
 $u(x,0,t) = e^x t^{1+\gamma}$, $u(x,1,t) = e^{1+x} t^{1+\gamma}$,

و مقدار اولیه
 $u(x,y,0) = 0$,

و جواب دقیق
 $u(x,y,t) = e^{x+y} t^{1+\gamma}$,

در نظر می‌گیریم. با استفاده از (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) و با قرار دادن $d = \frac{3.14}{2}$ ، $h = \sqrt{\frac{\pi d}{\gamma M}}$ و $M=20$ مثال بالا را بازنویسی می‌کنیم.

با انتخاب مقادیر مختلف $h_x = h_y = h_t = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{8}$ و $\gamma = 0.15, 0.4, 0.55, 0.7, 0.8, 0.95$ و $\varepsilon = 0.01$ حداکثر خطای مطلق در جدول‌های ۲ و ۳ بیان شده است. جدول‌های ۲ و ۳ نشان می‌دهد که با استفاده از روش توابع پایه شعاعی مکان-زمان و انتگرال‌گیری عددی سینک خوبی به دست می‌آید.

نمودارهای جواب تقریبی و خطای نسبی حاصل از استفاده از روش توابع پایه شعاعی مکان-زمان و انتگرال‌گیری عددی سینک SE در شکل ۱ برای $t=1$ با $n=4$ ، $\gamma=0.3$ و $\varepsilon=0.01$ و در شکل ۲ برای $t=1$ با $n=5$ ، $\gamma=0.6$ و $\varepsilon=0.01$ ارائه شده است. شکل ۳ نمودارهای خطای مطلق و خطای نسبی حاصل از استفاده از روش توابع پایه شعاعی مکان-زمان و انتگرال‌گیری عددی سینک SE را در $t=1$ با $n=6$ ، $\gamma=0.95$ و $\varepsilon=0.01$ نشان می‌دهد.

$$|f^{(l)}(r)| \leq l! k_1^l, \quad l \geq l_0 \in \mathbb{N}, \quad k_1 > 0, \\ r \in [0, \infty),$$

صدق کند. در این صورت عدد ثابتی مانند C_3 موجود است به طوری که

$$\left\| f(x) - \sum_{i=1}^N d_i \Phi_i(r) \right\| \leq e^{-\frac{C_3}{h}} |f|_{N_\Phi(\Omega)} \\ = k_2 e^{-\frac{C_3}{h}},$$

که در آن $|f|_{N_\Phi(\Omega)} = k_2$ و $N_\Phi(\Omega)$ یک فضای هیلبرت وابسته به Φ می‌باشد. اثبات. به [۱۸] مراجعه شود.

۵- مثال‌های عددی

با دو مثال، کارایی و دقت روش بیان شده در این مقاله را نشان می‌دهیم. در جدول‌های ۲-۶، خطا برای روش توابع پایه شعاعی مکان-زمان و انتگرال‌گیری عددی سینک به صورت زیر تعریف شده است:

$$L_\infty = \max_{1 \leq p \leq n} \max_{1 \leq q \leq n} \max_{1 \leq z \leq n} \left\| u(x_p, y_q, t_z) - u^*(x_p, y_q, t_z) \right\|,$$

که در آن $u^*(x,y,t)$ جواب تقریبی $u(x,y,t)$ است.

مثال ۴-۱. مسأله

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} \\ = {}_0 D_t^{1-\gamma} \left[\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} \right] \\ + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} \\ + e^{x+y} \left[(1+\gamma)t^\gamma - 2 \frac{\Gamma(2+\gamma)}{\Gamma(1+2\gamma)} t^{2\gamma} - 2t^{1+\gamma} \right], \\ (x,y) \in (0,1), \quad t \in (0,1],$$

جدول ۱: خطای روش توابع پایه شعاعی مکان- زمان و انتگرال گیری عددی سینک SE برای مثال ۴-۱ با $M=20$ و

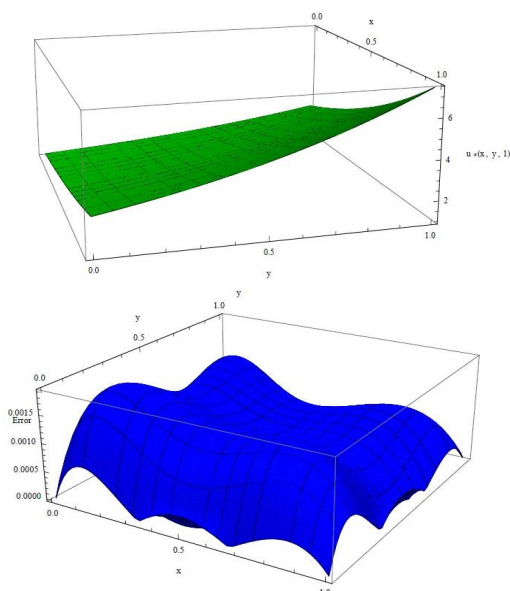
$$\varepsilon = 0.01$$

n	$\gamma = 0.15$	$\gamma = 0.4$	$\gamma = 0.55$
3	2.0469×10^{-3}	5.5898×10^{-3}	5.5044×10^{-3}
4	1.5835×10^{-3}	4.2264×10^{-3}	4.8653×10^{-3}
5	5.8241×10^{-3}	1.2128×10^{-3}	9.8587×10^{-4}
6	5.8076×10^{-3}	5.3967×10^{-4}	2.5808×10^{-4}
7	3.3121×10^{-4}	1.8826×10^{-4}	9.7674×10^{-5}
8	7.8522×10^{-5}	8.9132×10^{-5}	5.9126×10^{-5}

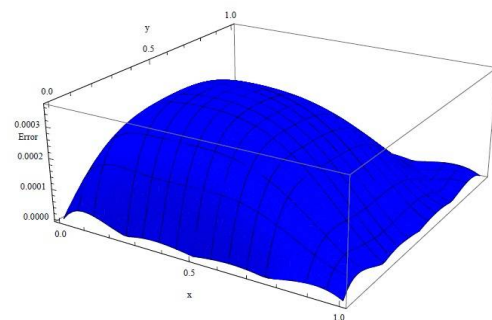
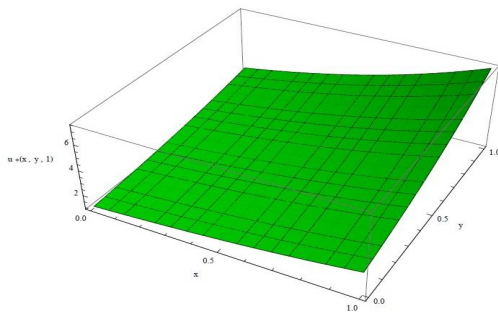
جدول ۲: خطای روش توابع پایه شعاعی مکان- زمان و انتگرال گیری عددی سینک SE برای مثال ۴-۱ با $M=20$ و

$$\varepsilon = 0.01$$

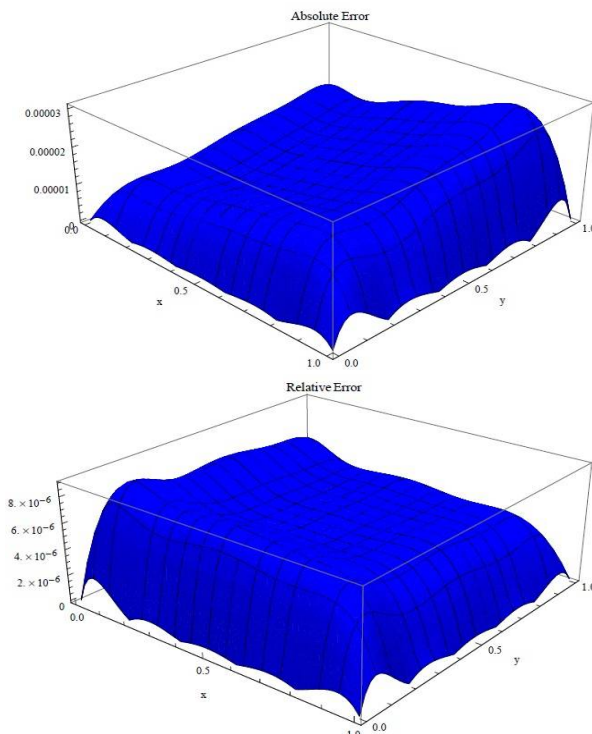
n	$\gamma = 0.7$	$\gamma = 0.8$	$\gamma = 0.95$
3	4.6487×10^{-3}	3.7746×10^{-3}	5.3345×10^{-3}
4	4.7760×10^{-3}	4.3922×10^{-3}	3.5151×10^{-3}
5	7.4693×10^{-4}	5.1887×10^{-4}	1.9407×10^{-4}
6	2.5041×10^{-4}	1.7993×10^{-4}	3.3787×10^{-5}
7	9.5433×10^{-5}	7.7210×10^{-5}	1.5895×10^{-5}
8	5.8062×10^{-5}	2.7349×10^{-5}	8.4634×10^{-6}



شکل ۱: نمودارهای جواب تقریبی (شکل بالا) و خطای نسبی حاصل (شکل پایین) با استفاده از روش توابع پایه شعاعی مکان- زمان و انتگرال گیری عددی سینک SE برای مثال ۴-۱ در $t = 1$ با $n = 4$ و $\gamma = 0.3$ و $\varepsilon = 0.01$



شکل ۲: نمودارهای جواب تقریبی (شکل بالا) و خطای نسبی حاصل (شکل پایین) با استفاده از روش توابع پایه شعاعی مکان- زمان و انتگرال گیری عددی سینک برای مثال ۱-۴ در $t = 1$ با $n = 5$ ، $\gamma = 0.6$ و $\varepsilon = 0.01$



شکل ۳: نمودارهای خطای مطلق حاصل (شکل بالایی) و خطای نسبی حاصل (شکل پایینی) با استفاده از روش توابع پایه شعاعی مکان- زمان و انتگرال گیری عددی سینک برای مثال ۱-۴ در $t = 1$ با $n = 6$ ، $\gamma = 0.95$ و $\varepsilon = 0.01$

مثال ۴-۲. مسأله

$$u\left(-\frac{1}{2\sqrt{\beta}}, Y, t\right) = \exp\left(-\frac{1}{4\beta} - Y^2\right) t^{1+\gamma},$$

$$u\left(\frac{1}{2\sqrt{\beta}}, Y, t\right) = \exp\left(-\frac{1}{4\beta} - Y^2\right) t^{1+\gamma},$$

$$u\left(X, -\frac{1}{2\sqrt{\beta}}, t\right) = \exp\left(-X^2 - \frac{1}{4\beta}\right) t^{1+\gamma},$$

$$u\left(X, \frac{1}{2\sqrt{\beta}}, t\right) = \exp\left(-X^2 - \frac{1}{4\beta}\right) t^{1+\gamma},$$

$$u(X, Y, 0) = 0.$$

شرایط اولیه و مرزی از جواب دقیق به دست می‌آید.

با استفاده از (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) و $h = \sqrt{\frac{\pi d}{\gamma M}}$

با استفاده از (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) و $M=20$ مثال ۴-۲ را بازنویسی

می‌کنیم.

همچنین با انتخاب مقادیر مختلف $h_x = h_y = h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$

و $\varepsilon = 1$ و $\gamma = 0.1, 0.25, 0.35, 0.4, 0.5, 0.65, 0.75, 0.95$ حداکثر خطای مطلق در جدول‌های ۴، ۵ و ۶ نشان داده شده است.

جدول ۴، حداکثر خطای مطلق روش توابع پایه شعاعی مکان- زمان و انتگرال‌گیری عددی سینک SE را در مثال ۴-۲ برای $M=20$ ، $\gamma = 0.25$ ، $\varepsilon = 1$ و $\beta = \frac{1}{10}, \frac{1}{30}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ نشان می‌دهد.

جدول ۵ حداکثر خطای مطلق روش توابع پایه شعاعی مکان- زمان و انتگرال‌گیری عددی سینک SE را در مثال ۴-۲ برای $M=20$ ، $\varepsilon = 1$ ، $\gamma = 0.1, 0.4, 0.65, 0.95$ و $\beta = \frac{1}{30}$ نشان می‌دهد و بنابراین داریم

$$-\frac{\sqrt{30}}{2} < X, Y < \frac{\sqrt{30}}{2}.$$

جدول ۶ حداکثر خطای مطلق روش توابع پایه شعاعی مکان- زمان و انتگرال‌گیری عددی سینک SE را در مثال ۴-۲ نشان می‌دهد که در آن

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \\ &= {}_0D_t^{1-\gamma} \left[\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right] \\ &+ \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \\ &+ \exp\left(-\frac{(x-0.5)^2}{\beta} - \frac{(y-0.5)^2}{\beta}\right) \times \\ & \left[(1+\gamma)t^\gamma + \frac{\Gamma(2+\gamma)}{\Gamma(1+2\gamma)} t^{2\gamma} + t^{1+\gamma} \right] \times \\ & \left(\frac{4}{\beta} - \frac{4(x-0.5)^2}{\beta^2} - \frac{4(y-0.5)^2}{\beta^2} \right), \\ & (x, y) \in (0, 1), \quad t \in (0, 1], \end{aligned}$$

را با جواب دقیق

$$u(x, y, t) = \exp\left(-\frac{(x-0.5)^2}{\beta} - \frac{(y-0.5)^2}{\beta}\right) t^{\gamma+1},$$

در نظر بگیرید. با تغییر متغیر

$$(x-0.5) = \sqrt{\beta}X, \quad (y-0.5) = \sqrt{\beta}Y,$$

بازه متغیرهای X, Y به شکل $\left(-\frac{1}{2\sqrt{\beta}}, \frac{1}{2\sqrt{\beta}}\right)$ می‌باشد. اگر β کاهش یابد، آن‌گاه طول بازه بزرگ‌تر می‌شود. با متغیرهای جدید، مسأله به صورت زیر نوشته بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u(X, Y, t)}{\partial t} \\ &= \frac{1}{\beta} {}_0D_t^{1-\gamma} \left[\frac{\partial^2 u(X, Y, t)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u(X, Y, t)}{\partial Y^2} \right] \\ &+ \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 u(X, Y, t)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u(X, Y, t)}{\partial Y^2} \\ &+ \exp(-X^2 - Y^2) [(1+\gamma)t^\gamma \\ &+ \frac{\Gamma(2+\gamma)}{\Gamma(1+2\gamma)} t^{2\gamma} + t^{1+\gamma}] \times \\ & \left(\frac{4}{\beta} - \frac{4X^2}{\beta} - \frac{4Y^2}{\beta} \right), \\ & (X, Y) \in \left(-\frac{1}{2\sqrt{\beta}}, \frac{1}{2\sqrt{\beta}}\right), \quad t \in (0, 1], \end{aligned}$$

شعاعی مکان- زمان و انتگرال‌گیری عددی سینک SE برای مثال ۲-۴ در شکل ۵ برای $t=1$ با $\gamma=0.3$ ، $n=5$ ، $\varepsilon=1$ و $\beta=\frac{1}{100}$ در شکل ۶ برای $t=1$ با $\gamma=0.5$ ، $n=7$ ، $\varepsilon=1$ و $\beta=\frac{1}{1000}$ ارائه می‌شود. شکل ۷ نمودار خطای مطلق حاصل از استفاده از روش توابع پایه شعاعی مکان- زمان و انتگرال‌گیری عددی سینک SE را برای مثال ۲-۴ در $t=1$ با $\gamma=0.75$ ، $n=7$ ، $\varepsilon=1$ و $\beta=\frac{1}{1000}$ نشان می‌دهد.

$M=20$ ، $\varepsilon=1$ ، $\gamma=0.34, 0.5, 0.75$ و $\beta=\frac{1}{1000}$ و بنابراین داریم

$$-\frac{\sqrt{1000}}{2} < X, Y < \frac{\sqrt{1000}}{2}.$$

شکل ۴ نمودارهای جواب تقریبی و خطای مطلق حاصل از استفاده از روش توابع پایه شعاعی مکان- زمان و انتگرال‌گیری عددی سینک SE را برای مثال ۲-۴ در $t=1$ با $\gamma=0.25$ ، $n=7$ ، $\varepsilon=1$ و $\beta=\frac{1}{30}$ نشان می‌دهد. نمودارهای جواب تقریبی و خطای مطلق حاصل از استفاده از روش توابع پایه

جدول ۳: خطای روش توابع پایه شعاعی مکان- زمان و انتگرال‌گیری عددی سینک SE برای مثال ۲-۴ با $M=20$ ، $\gamma=0.25$ و $\varepsilon=1$

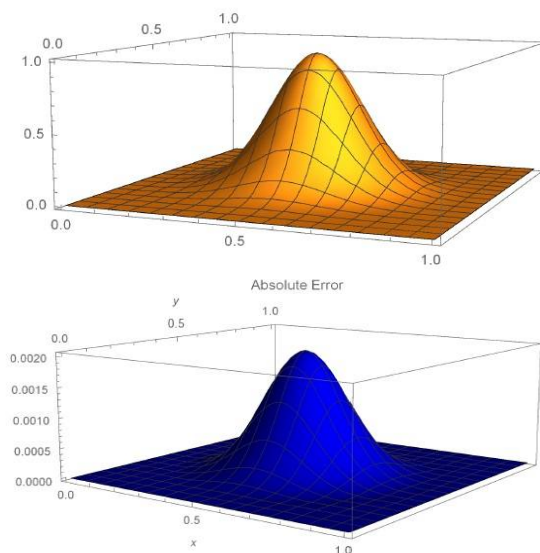
β	n=3	n=5	n=7
$\frac{1}{10}$	2.5091×10^{-2}	4.7791×10^{-3}	4.2279×10^{-3}
$\frac{1}{30}$	2.7384×10^{-2}	5.1334×10^{-3}	4.5821×10^{-3}
$\frac{1}{100}$	2.7614×10^{-2}	5.2308×10^{-3}	4.6302×10^{-3}
$\frac{1}{1000}$	2.7703×10^{-3}	5.2417×10^{-3}	4.6380×10^{-3}

جدول ۴: خطای روش توابع پایه شعاعی مکان- زمان و انتگرال‌گیری عددی سینک SE برای مثال ۲-۴ با $M=20$ ، $\beta=\frac{1}{30}$ و $\varepsilon=1$

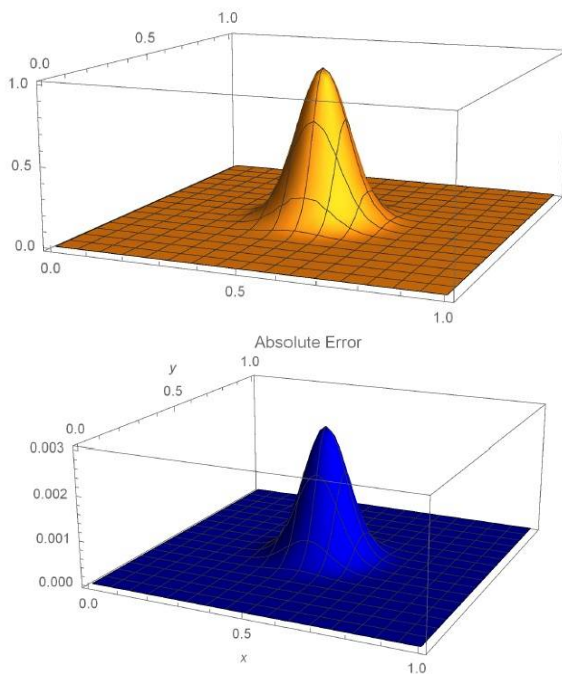
γ	n=3	n=5	n=7
0.1	2.8130×10^{-2}	2.7646×10^{-2}	8.6550×10^{-3}
0.4	4.1592×10^{-2}	6.1179×10^{-3}	1.1522×10^{-3}
0.65	6.1530×10^{-2}	1.0502×10^{-3}	7.0829×10^{-4}
0.95	9.2637×10^{-2}	4.8294×10^{-3}	4.7258×10^{-5}

جدول ۵: خطای روش توابع پایه شعاعی مکان- زمان و انتگرال‌گیری عددی سینک SE برای مثال ۲-۴ با $M=20$ ، $\beta=\frac{1}{1000}$ و $\varepsilon=1$

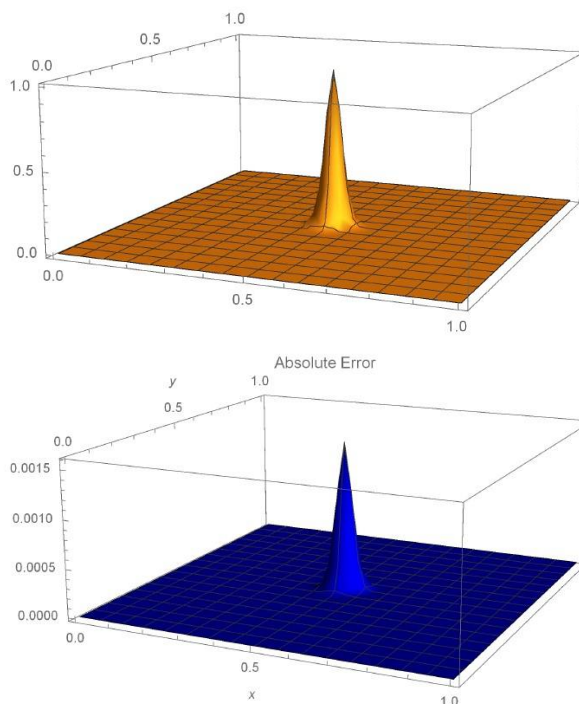
γ	n=3	n=5	n=7
0.35	3.7883×10^{-2}	4.6380×10^{-3}	2.6679×10^{-3}
0.5	4.9958×10^{-2}	1.5803×10^{-3}	1.1864×10^{-3}
0.75	7.1836×10^{-2}	1.4694×10^{-3}	8.6192×10^{-4}



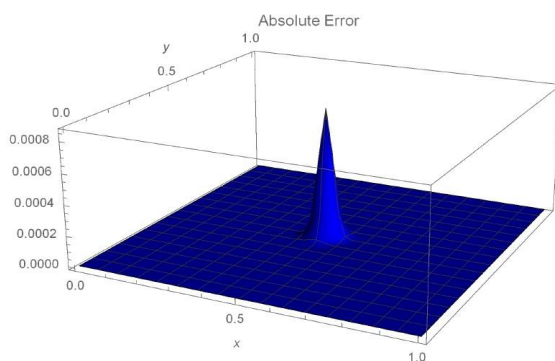
شکل ۴: نمودارهای جواب تقریبی (شکل بالا) و خطای مطلق حاصل (شکل پایین) با استفاده از روش توابع پایه شعاعی مکان- زمان و انتگرال گیری عددی سینک برای مثال ۲-۴ در $t = 1$ با $\gamma = 0.25$, $n = 7$, $\varepsilon = 1$ و $\beta = \frac{1}{30}$



شکل ۵: نمودارهای جواب تقریبی (شکل بالا) و خطای مطلق حاصل (شکل پایین) با استفاده از روش توابع پایه شعاعی مکان- زمان و انتگرال گیری عددی سینک برای مثال ۲-۴ در $t = 1$ با $\gamma = 0.3$, $n = 5$, $\varepsilon = 1$ و $\beta = \frac{1}{100}$



شکل ۶: نمودارهای جواب تقریبی (شکل بالا) و خطای مطلق حاصل (شکل پایین) با استفاده از روش توابع پایه شعاعی مکان-زمان و انتگرال گیری عددی سینک برای مثال ۴-۲ در $t = 1$ با $\gamma = 0.5$, $n = 7$, $\varepsilon = 1$ و $\beta = \frac{1}{1000}$



شکل ۷: نمودار خطای مطلق حاصل با استفاده از روش توابع پایه شعاعی مکان-زمان و انتگرال گیری عددی سینک برای مثال ۴-۲ در $t = 1$ با $\gamma = 0.75$, $n = 7$, $\varepsilon = 1$ و $\beta = \frac{1}{1000}$

نمایی روش توابع پایه شعاعی و روش سینک، نتایج خوب و قابل توجهی با خطای کم به دست می‌آید. مثال‌های ارائه شده، کارایی و دقت روش را تأیید می‌کند و نشان می‌دهد که با استفاده از تعداد کمی از نقاط هم‌محلی برای تابع پایه شعاعی می‌توان نتایج دقیقی بدست آورد.

نتیجه‌گیری

روش ارائه شده در این مقاله با استفاده از ترکیبی از دو روش توابع پایه شعاعی مکان-زمان و سینک SE، جواب مسأله دو بعدی ریلی-استوکس برای یک جریان گرمایی درجه دوم تعمیم یافته با مشتق کسری را تقریب می‌زند. با توجه به ماهیت همگرایی

Stokes problem for a heated generalized second grade fluid with fractional derivatives. *Applied Mathematics and Computation* 204: 340–351 (2008)

[11] P. h. Zhuang, Q. Liu. Numerical method of Rayleigh-Stokes problem for heated generalized second grade fluid with fractional derivative. *Applied Mathematics and Mechanics* -Engl. Ed. 30(12): 1533–1546 (2009)

[12] C. Fetecau, J. Zierep. The Rayleigh-Stokes problem for a Maxwell fluid. *Z. angew. Math. Phys.* 54(6): 1086–1093 (2003)

[13] C. Wu. Numerical solution for Stokes' first problem for a heated generalized second grade fluid with fractional derivative. *Applied Numerical Mathematics* 59: 2571–2583 (2009)

[14] C. M Chen, F. Liu, V. Anh. A Fourier method and an extrapolation technique for Stokes' first problem for a heated generalized second grade fluid with fractional derivative. *Computational and Applied Mathematics*. 223: 777–789 (2009)

[15] C. Xue, J. Nie. Exact solutions of the Rayleigh–Stokes problem for a heated generalized second grade fluid in a porous half-space. *Applied Mathematical Modelling*. 33: 524–531 (2009)

[16] A. Mohebbi, M. Abbaszadeh, M. Dehghan. Compact finite difference scheme and RBF meshless approach for solving 2D Rayleigh-Stokes problem for a heated generalized second grade fluid with fractional derivatives. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 264: 163–177 (2013)

[17] G. E. Fasshouer. Mesh free approximation methods with MATLAB. USA. World Scientific (2007)

فهرست منابع

[1] K. B. Oldham, J. Spanie. *The Fractional Calculus*. Academic Press. New York (1974)

[2] K. S. Miller, B. Ross. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. Wiley. New York (1993)

[3] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier. Amsterdam (2006)

[4] R. Hilfer. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. World Scientific. Singapore (2000)

[5] A. Carpinteri, F. Mainardi. *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*. Springer-Verlag. Wien (1997)

[6] K. Diethelm. *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*. Springer. Heidelberg (2010)

[7] F. Mainardi. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models*. Imperial College Press. London. Hackensack NJ (2010)

[8] C. Fetecau. The Rayleigh-Stokes problem for heated second grade fluids. *International Non-Linear Mechanics* 37: 1011–1015 (2002)

[9] J. Zierep, C. Fetecau. Energetic balance for the Rayleigh-Stokes problem of a second grade fluid. *International Engineering Science* 45: 155–162 (2007)

[10] Chang-Ming Chen a, F. Liu, V. Anh. Numerical analysis of the Rayleigh-

- [26] F. Stenger. Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions. Springer-Verlag. New York (1993)
- [27] F. Stenger. Handbook of Sinc Numerical Methods. CRC Press. Boca Raton (2011)
- [28] J. Lund, K. L. Bowers. Sinc method for quadrature and differential equations. SIAM. (1992)
- [29] K. Tanaka, M. Sugihara, K. Murota. Function Classes for Successful DE-Sinc Approximations. Mathematics of Computation 78: 1553–1571 (2009)
- [30] K. Tanaka, M. Sugihara, K. Murota, M. Mori. Function classes for double exponential integration formulas. Numerische Mathematik 111: 631–655 (2009)
- [31] M. Sugihara, T. Matsuo. Recent developments of the Sinc numerical methods. Computational and Applied Mathematics 164–165: 673–689 (2004)
- [32] M. Mori, M. Sugihara. The double-exponential transformation in numerical analysis. Computational and Applied Mathematics 127: 287–296 (2001)
- [18] H. Wendland. Scattered Data Approximation. Cambridge University Press. New York (2005)
- [19] A. Fedoseyev, M. J. Friedman, E. J. Kansa. Improved multiquadrics method for elliptic partial differential equations via PDE collocation on the boundary. Computers and Mathematics with Applications 43: 439–455 (2002)
- [20] B. Fornberg, G. Wright, E. Larsson. Some observation regarding interpolants in the limit of flat radial basis functions. Computers and Mathematics with Applications 47: 37–55 (2004)
- [21] T. Okayama, T. Matsuo, M. Sugihara. Approximate Formulae for Fractional Derivatives by Means of Sinc Methods. Concrete and Applicable Mathematics 8: 470–488 (2010)
- [22] T. Okayama, T. Matsuo, M. Sugihara. Sinc-collocation methods for weakly singular Fredholm integral equations of the second kind. Computational and Applied Mathematics 234: 1211–1227 (2010)
- [23] G. A. Zakeri, M. Navab. Sinc collocation approximation of non-smooth solution of a nonlinear weakly singular Volterra integral equation. Computational Physics 229: 6548–6557 (2010)
- [24] B. V. Riley. The numerical solution of Volterra integral equations with nonsmooth solutions based on sinc approximation. Applied Numerical Mathematics 9: 249–257 (1992)
- [25] G. Baumann, F. Stenger. Fractional calculus and Sinc methods. Fractional Calculus and Applied Analysis 14: 568–622 (2011)