

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال هفتم، شماره سی و دوم، مهر و آبان ۱۴۰۰

شماره شاپا: ۵۸۸۸-۲۵۸۸



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

هر دنباله غیر صعودی از اعداد نامنفی می‌تواند منحنی همگرایی روش DGMRES باشد

ملیحه صفرزاده^۱، حسین صادقی گوغری^{۲*}

^(۱و۲) گروه ریاضی، واحد کرمان، دانشگاه آزاد اسلامی، کرمان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۱۱/۱۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۶/۰۲

چکیده

بررسی همگرایی روش‌های زیر فضای کرابلف یکی از موضوعات مورد علاقه در زمینه جبر خطی عددی است. با توجه به اینکه روش $DGMRES$ یک روش زیر فضای کرابلف بوده و در زمینه همگرایی آن کارهای زیادی انجام نشده است. در این مقاله به این موضوع پرداخته خواهد شد. ما نشان می‌دهیم که برای هر دنباله غیر صعودی از اعداد نامنفی $f(0) \geq f(1) \geq \dots \geq f(m-1) > f(m) = \dots = f(n) = 0$ مجموعه $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m, 0, \dots, 0\}$ از اعداد مختلط و همین‌طور عدد دلخواه $\alpha \leq n - m$ می‌توان دستگاه معادلات خطی منفرد $n \times n$ $Ax = b$ با اندیس α و مجموعه $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m, 0, \dots, 0\}$ به عنوان طیف ماتریس A را طوری ساخت که اگر از روش $DGMRES$ برای حل این دستگاه استفاده شود، با فرض $\|A^\alpha r_0\|_2 = f(0)$ برای $k = 1, \dots, m-1$ نرم بردار مانده مرحله k -ام، $\|A^\alpha r_k\|_2 = f(k)$ شود، که در آن $r_0 = b - Ax_0$ بردار مانده آغازین می‌باشد. سعی ما در این کار ساخت کامل ماتریس ضرایب دستگاه (دستگاه‌های) مورد نظر است.

واژه‌های کلیدی: دستگاه معادلات خطی منفرد، شاخص، معکوس درازین، بردار مانده.

۱. مقدمه

فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. اندیس ماتریس A را با $ind(A)$ نشان می‌دهیم که برابر با اندازه بزرگترین بلوک ژوردان متناظر با مقدار ویژه صفر ماتریس A است. واضح است که اگر ماتریس A نامنفرد باشد آنگاه $ind(A) = 0$ و اگر ماتریس A نرمال و منفرد باشد آنگاه $ind(A) = 1$.

فرض کنید $b \in \mathbb{C}^n$ ، دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ را منفرد گوئیم هرگاه ماتریس ضرایب A منفرد باشد به عبارت دیگر $ind(A) > 0$.

فرض کنید $ind(A) = \alpha$ در این صورت \mathbb{C}^n را می‌توان به صورت جمع مستقیم فضای برد ماتریس A^α و فضای پوچ ماتریس A^α نوشت [1].

ماتریس A^D را معکوس درازین ماتریس A گوئیم هرگاه شرایط زیر را دارا باشد [2].
 $A^{\alpha+1}A^D = A^\alpha$, $A^D A A^D = A^D$, $A A^D = A^D A$

در صورتی که ماتریس A نامنفرد باشد $A^D = A^{-1}$. ماتریس A^D را می‌توان به صورت یک چند جمله‌ای بر حسب ماتریس A بیان کرد [2].

فرض کنید $k, n \in \mathbb{Z}^+$ و $v \in \mathbb{C}^n$ ، $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$
 $\mathcal{K}_k(B, v) = span\{v, Bv, \dots, B^{k-1}v\}$

را زیر فضای کرایلف k -ام تولید شده توسط B و v می‌نامیم.

اولین بار سعد^۲ در مقاله‌ای که در سال ۱۹۸۱ به چاپ رساند از زیر فضای کرایلف برای حل دستگاه معادلات خطی در حالت خاص استفاده کرد [2]. از مهمترین روش‌های زیر فضای کرایلف، روش GMRES است که اولین بار توسط سعد و شولتز^۳ در سال ۱۹۸۶ ارائه شد [3].

این روش، در صورتی که ماتریس ضرایب دستگاه نامنفرد باشد خوش تعریف خواهد بود.

سیدی^۴ در سال ۲۰۰۱ یک پیاده‌سازی شبیه روش GMRES برای حل دستگاه معادلات خطی منفرد ارائه داده است [4]. این روش از نظر پایداری عددی و اقتصادی بودن از دیدگاه محاسباتی و میزان حافظه مصرفی شبیه روش GMRES است و چون دنباله ساخته شده در این روش به جوی از دستگاه خطی منفرد که بر حسب معکوس درازین ماتریس ضرایب دستگاه بیان می‌شود همگراست سیدی این روش را DGMRES نامید.

هرگاه اندیس ماتریس ضرایب دستگاه معادلات خطی صفر باشد روش DGMRES همان روش GMRES است.

روش‌های زیر فضای کرایلف یکی از قدرتمندترین روش‌های تصویری برای حل دستگاه معادلات خطی می‌باشند. ویژگی‌های شاخص این روش‌ها از قبیل حجم ذخیره‌سازی پایین و جواب تقریبی خوب باعث شده که این روش‌ها از مقبولیت گسترده‌ای در میان گرایش‌های مختلف علوم و مهندسی برخوردار شوند.

یکی از مهمترین مباحث مربوط به روش‌های زیر فضای کرایلف، آنالیز همگرایی این روش‌هاست. روش‌های زیر فضای کرایلف به صورت یک روش تکراری در نظر گرفته شده و زمانی همگرا می‌شوند که نرم بردار مانده به اندازه کافی کوچک باشد.

روش GMRES بعد از حداکثر n تکرار که n ابعاد ماتریس ضرایب دستگاه است به جواب دقیق دستگاه همگراست. در زمینه همگرایی GMRES کارهای زیادی شده است که می‌توان به مقالات زیر اشاره کرد. در سال ۲۰۰۴ لیسن و استراکوس^۵ همگرایی روش GMRES را برای ماتریس‌های سه قطری تپلیتز بررسی کردند [5]. در سال ۲۰۰۴ لیسن و تیچی^۶ با معرفی کرانه‌های $worse -$

⁴ Sidi

⁵ Liesen and Strakos

⁶ Tichy

² Saad

³ Schultz

این دستگاه همان دنباله اعداد نامنفی شود.

۲. روش GMRES برای ماتریس‌های منفرد (DGMRES)

روش‌های تصویری برای حل دستگاه‌های معادلات خطی منفرد، با بردار دلخواه x_0 به عنوان بردار آغازین، دنباله‌ای از بردارهای x_1, x_2, x_3, \dots را به صورت زیر تولید می‌کنند:

$x_k = x_0 + q_{k-1}(A)r_0$ که $r_0 = b - Ax_0$ و $q_{k-1}(\lambda)$ یک چند جمله‌ای از درجه $k-1$ به صورت زیر است:

$$q_{k-1}(\lambda) = \sum_{i=1}^{k-\alpha} c_i \lambda^{\alpha+i-1}, \quad \alpha = \text{ind}(A).$$

فرض کنید

$$p_k(\lambda) = 1 - \lambda q_{k-1}(\lambda) = 1 - \sum_{i=1}^{k-\alpha} c_i \lambda^{\alpha+i}$$

در این صورت داریم:

$$r_{k-\alpha} = b - Ax_{k-\alpha} = [I - Aq_{k-1}(A)]r_0 = p_k(A)r_0$$

که $p_k(0) = 1$ و برای هر $i = 1, 2, \dots, \alpha$ داریم $p_k^{(i)}(0) = 0$. با توجه به مطالب فوق، دو خانواده از چندجمله‌ای‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P_k^\alpha = \{p \in P_k : p^{(i)}(0) = 0, i = 1, \dots, \alpha\},$$

که P_k چند جمله‌ای‌های از درجه کوچکتر یا مساوی k می‌باشد و

$$P_k^\alpha(0) = \{p \in P_k^\alpha : p(0) = 1\},$$

به آسانی می‌توان نشان داد که $A^D = A^\alpha p(A)^{\alpha+1}$ پس $A^D b = A^\alpha p(A)^{\alpha+1} b \in R(A^\alpha)$. فرض کنید $b = \hat{b} + \tilde{b}$ که $\hat{b} \in R(A^\alpha)$ و $\tilde{b} \in N(A^\alpha)$ چون $\hat{b} \in R(A^\alpha)$ می‌توان نشان

GMRES و Ideal - GMRES، آنها را در مورد ماتریس‌های نرمال مورد بررسی قرار دادند [6]. بعلاوه آنها در سال ۲۰۰۵ با تمرکز بر مدل خاص انتقال - انتشار، شرایط مرزی دیریکله و با استفاده از تبدیلات متعامد به یک ماتریس بلوکی قطری با بلوک‌های نامتقارن سه قطری تپلیتز به بیان همگرایی GMRES پرداخته‌اند [7]. در سال ۲۰۰۹ لی و ژانگ^۷ نرخ همگرایی روش GMRES را برای دستگاه‌های سه قطری تپلیتز محاسبه کردند و نشان دادند که وقتی بردار سمت راست، ستون اول یا آخر ماتریس همانی باشد فرمول بدست آمده بسیار ساده‌تر از نمونه‌های موجود آن است [8]. در مورد همگرایی روش DGMRES کارهای زیادی انجام نشده است و ما به دو موردی که در این زمینه کار شده است اشاره می‌کنیم. گرین بام^۸ و همکاران در سال ۲۰۱۸ کران بالای نرم بردارهای مانده در روش DGMRES را مورد بررسی قرار داده و آنرا با نرم بردار مانده روش GMRES بکار برده شده برای بخش نامنفرد ماتریس ضرایب دستگاه مقایسه کرده‌اند [9].

صفرزاده و سالمی در همان سال ۲۰۱۸ ضمن معرفی *index numerical range* رابطه این مفهوم جدید را با همگرایی DGMRES بررسی کردند [10].

ما در این مقاله، کاری که گرین بام برای روش GMRES انجام داده است را به روش DGMRES تعمیم می‌دهیم. گرین بام در [11]، نشان داد که هر دنباله غیر صعودی از اعداد نامنفی را می‌توان نرم بردارهای مانده برای الگوریتم GMRES در حل بعضی از دستگاه‌های معادلات خطی در نظر گرفت، او در این مقاله سعی کرده ماتریس ضرایب دستگاه معادلات خطی نامنفرد $Ax = b$ را به شکلی تعیین کند که نرم بردارهای مانده روش GMRES برای

⁷ Li and Zhang

⁸ Greenbuam

$$\hat{r} = \hat{b} - A\hat{x} = -A(\hat{x} - A^D b) = -A\hat{e} \quad \text{داد که } A^D b \in R(A^\alpha) \text{ جواب دستگاه } Ax = \hat{b} \text{ است [2].}$$

$$\hat{r}_{k-\alpha}^0 = p_{k-\alpha}(A)\hat{r} = -A p_{k-\alpha}(A)\hat{e} = -A\hat{e}_{k-\alpha}^0$$

حال این سوال پیش می‌آید که آیا با کوچک کردن بردار $\hat{r}_{k-\alpha}$ بردار $\hat{e}_{k-\alpha}$ نیز کوچک می‌شود؟ چون A منفرد است به این سوال به راحتی نمی‌توان پاسخ داد. برای پاسخ به این سوال چون $\hat{r}_{k-\alpha} \in R(A^\alpha)$ تمام محاسبات را در $R(A^\alpha)$ انجام می‌دهیم. فرض کنید \hat{A} تحدید A به روی $R(A^\alpha)$ باشد بنابراین \hat{A} نامنفرد است.

فرض کنید $m = \dim R(A^\alpha)$ و \hat{A} مقادیر منفرد ماتریس $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m > 0$ باشند. بنابر قضیه تجزیه SVD ، ماتریس‌های یکانی U و V وجود دارد به طوری که $\hat{A} = U\Sigma V^*$ و $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ بنابراین

$$\|\hat{A}\hat{e}_{k-\alpha}\|_2^2 = \|U\Sigma V^*\hat{e}_{k-\alpha}\|_2^2 = \sum_{j=1}^m (\sigma_j(V^*\hat{e}_{k-\alpha})_j)^2 \geq \sigma_m^2 \|\hat{e}_{k-\alpha}\|_2^2$$

که $(V^*\hat{e}_{k-\alpha})_j$ مولفه j -ام بردار $V^*\hat{e}_{k-\alpha}$ است. در نتیجه

$$\|r_{k-\alpha}\|_2 = \|A\hat{e}_{k-\alpha}\|_2 = \|\hat{A}\hat{e}_{k-\alpha}\|_2 \geq \sigma_m \|\hat{e}_{k-\alpha}\|_2.$$

بنابر رابطه بالا، هرگاه $\hat{r}_{k-\alpha}$ به صفر میل کند آنگاه بردار $\hat{e}_{k-\alpha}$ نیز به صفر میل خواهد کرد. بطور مشابه می‌توان نشان داد که:

$$\|\hat{r}_{k-\alpha}\|_2 \geq \sigma_m \|\hat{e}_{k-\alpha}\|_2.$$

و همچنین به ازای $k = \alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, \dots$ داریم:

$$\|\hat{A}^{k-\alpha}\hat{r}_{k-\alpha}\|_2 \geq \sigma_m^{(k-\alpha)} \|\hat{r}_{k-\alpha}\|_2,$$

که $\sigma_m^{(k-\alpha)}$ کوچکترین مقدار منفرد ماتریس $\hat{A}^{k-\alpha}$ است. از طرفی چون $\hat{r}_{k-\alpha} \in R(A^\alpha)$ داریم:

قضیه ۱: [12]، فرض کنید $x_0 = \hat{x}_0 + \tilde{x}_0$ بطوری که $\tilde{x}_0 \in N(A^\alpha)$ و $\hat{x}_0 \in R(A^\alpha)$ آنگاه $x_{k-\alpha} = A^D b + p_k(A)(\hat{x}_0 - A^D b) + \tilde{x}_0 = \hat{x}_{k-\alpha} + \tilde{x}_{k-\alpha}$

با توجه به قضیه بالا اگر $x_0 = 0$ یا $x_0 \in R(A^\alpha)$ آنگاه $\tilde{x}_{k-\alpha} = \tilde{x}_0 = 0$ تعریف می‌کنیم:

$$\hat{e}_{k-\alpha} = \hat{x}_{k-\alpha} - A^D b, k = \alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, \dots$$

بنابر قضیه قبل، داریم:

$$x_{k-\alpha} = A^D b + p_k(A)(\hat{x}_0 - A^D b) + \tilde{x}_0 = A^D b + p_k(A)\hat{e}_0$$

بنابراین

$$\hat{e}_{k-\alpha} = \hat{x}_{k-\alpha} - A^D b = p_k(A)\hat{e}_0.$$

در صورتی که با افزایش مقدار k ، $\hat{e}_{k-\alpha}$ کوچک شود $A^D b$ تقریب مناسبی برای $\hat{x}_{k-\alpha}$ خواهد بود. از طرفی چون

$$\hat{e}_0 = \hat{x}_0 - A^D b \in R(A^\alpha)$$

برای بررسی رفتار $\hat{e}_{k-\alpha}$ ، کفایت اثر $p_k(A)$ روی $R(A^\alpha)$ را بررسی کنیم. در نتیجه کفایت نشان دهیم وقتی که k افزایش می‌یابد اثر $p_k(A)$ روی $R(A^\alpha)$ کوچک می‌شود.

همچنین چون $r_{k-\alpha} = p_k(A)r_0$ بنابراین $\hat{r}_{k-\alpha} = p_k(A)\hat{r}_0$

در نتیجه $\hat{r}_{k-\alpha}$ مشابه $\hat{e}_{k-\alpha}$ به وسیله اثر $p_k(A)$ روی $R(A^\alpha)$ مشخص می‌شود. بنابراین اگر اثر $p_k(A)$ روی $R(A^\alpha)$ کوچک شود بردارهای $\hat{r}_{k-\alpha}$ و $\hat{e}_{k-\alpha}$ نیز کوچک خواهند شد.

از طرفی چون

بنابراین

$$x_{k-\alpha} = x_0 + Vc = x_0 + V(W^*A^{\alpha+1}V)^{-1}W^*A^\alpha r_0$$

حال به بررسی شرایطی که تحت آن $\det(W^*A^{\alpha+1}V) \neq 0$ می پردازیم.

تعریف ۲: [13]، فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ و $b \in \mathbb{C}^n$. چند جمله ای $p \in P_k$ را چند جمله ای مینیمال ماتریس A نسبت به بردار b گوئیم اگر k کوچکترین عددی باشد که $p(A)b=0$. در ادامه، مفهوم چندجمله ای مینیمال یک ماتریس با توجه به یک بردار، تعمیم داده می شود.

تعریف ۴: [14]، فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ و $\text{ind}(A) = \alpha$. در این صورت چند جمله ای $p \in P_k^\alpha$ را چند جمله ای مینیمال α - ناقص ماتریس A نسبت به بردار $\hat{u} \in R(A^\alpha)$ گوئیم اگر k کوچکترین عددی باشد که $p(A)\hat{u} = 0$ قضیه زیر، وجود و منحصر بفردی چندجمله ای مینیمال α - ناقص ماتریس A را نشان می دهد.

قضیه ۵: [14]، فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ و $\text{ind}(A) = \alpha$. آنگاه چند جمله ای مینیمال α - ناقص ماتریس A نسبت به بردار $\hat{u} \in R(A^\alpha)$ موجود و منحصر به فرد است. همچنین اگر p این چند جمله ای باشد به طوری که $\text{deg}(p) = k$ ، در این صورت $q \leq k \leq q + \alpha$ که q درجه چند جمله ای مینیمال A نسبت به \hat{u} است. قضیه بعدی بیان می کند که جواب معکوس درازین $A^D b$ را می توان بر حسب x_0 و ترکیب خطی بردارهای $A^\alpha r_0, \dots, A^{k-1} r_0$ نوشت.

قضیه ۶: [14]، فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ و $\text{ind}(A) = \alpha$. هرگاه p چند جمله ای مینیمال -

$$\|A^\alpha r_{k-\alpha}\|_2 = \|\hat{A}^\alpha \hat{r}_{k-\alpha}\|_2 \geq \sigma_m^{(\alpha)} \|\hat{r}_{k-\alpha}\|_2.$$

بنابراین کفایت وقتی که k بزرگ می شود $A^\alpha r_{k-\alpha} \rightarrow 0$ در نتیجه اگر $\hat{r}_{k-\alpha} \rightarrow 0$ آنگاه $\hat{r}_{k-\alpha} \rightarrow 0$. به طور خلاصه داریم:

$$A^\alpha r_{k-\alpha} \rightarrow 0 \Rightarrow \hat{r}_{k-\alpha} \rightarrow 0 \Rightarrow \hat{e}_{k-\alpha} \rightarrow 0.$$

مشابه روش های تصویری برای دستگاه های نامنفرد، زیر فضای قیود W را با بعد مناسب طوری انتخاب می کنیم تا بردار $A^\alpha r_{k-\alpha}$ بر هر بردار در W عمود باشد. چون چند جمله ای

$$p_k(\lambda) = 1 - \sum_{i=1}^{k-\alpha} c_i \lambda^{\alpha+i},$$

$k - \alpha$ مجهول c_i دارد، بنابراین $\dim(W) = k - \alpha$. فرض کنید V ماتریسی با ستون های $A^\alpha r_0, \dots, A^{k-1} r_0$ باشد یعنی

$$V = [A^\alpha r_0 \dots A^{k-1} r_0]$$

و $c = (c_1, \dots, c_{k-\alpha})^T$ در نتیجه

$$\begin{aligned} x_{k-\alpha} &= x_0 + q_{k-1}(A) = x_0 + \sum_{i=1}^{k-\alpha} c_i A^{\alpha+i-1} r_0 = x_0 + Vc \\ r_{k-\alpha} &= p_k(A)r_0 = r_0 + \sum_{i=1}^{k-\alpha} c_i A^{\alpha+i} r_0 = r_0 - AVc \end{aligned}$$

اگر ماتریسی که ستون های آن همان پایه فضای W است را دوباره با W نشان دهیم در این صورت چون $A^\alpha r_{k-\alpha}$ بر W عمود است، داریم $W^* A^\alpha (r_0 - Vc) = 0$. بنابراین $W^* A^\alpha r_{k-\alpha} = 0$ و در نتیجه

$$W^* A^\alpha r_0 = W^* A^{\alpha+1} Vc.$$

در صورتی که $\det(W^* A^{\alpha+1} V) \neq 0$ خواهیم داشت

$$c = (W^* A^{\alpha+1} V)^{-1} W^* A^\alpha r_0$$

فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ با $ind(A) = \alpha$ و $b \in \mathbb{C}^n$ در بخش قبل دیدیم چون ماتریس A^D یک چند جمله‌ای بر حسب A است روش $DGMRES$ با استفاده از روش‌های زیر فضای کرایلف جواب $A^D b$ ، دستگاه منفرد $Ax = b$ را تقریب می‌زند.

فرض کنید x_0 حدس اولیه و $r_0 = b - Ax_0$ بردار مانده متناظر با آن باشد. قرار می‌دهیم $v_1 = \beta^{-1} A^\alpha r_0$ که $\beta = \|A^\alpha r_0\|_2$ ، روش $DGMRES$ برای $k = \alpha + 1, \dots$ جواب‌های تقریبی $x_{k-\alpha} \in x_0 + span\{v_1, Av_1, \dots, A^{k-\alpha-1}v_1\}$

به شرط این که $\|A^\alpha(b - Ax_{k-\alpha})\|_2$ کمترین مقدار باشد، را پیدا می‌کند.

برای انجام این کار، ابتدا به کمک الگوریتم آرنولدی یک پایه‌ی متعامد یکه برای زیر فضای کرایلف $span\{v_1, Av_1, \dots, A^{k-1}v_1\}$

می‌سازیم. پایه متعامد یکه‌ی حاصل را ستون‌های ماتریس زیر در نظر می‌گیریم:

$$V_k = [v_1, \dots, v_k]$$

با توجه به الگوریتم آرنولدی برای ماتریس V_k و ماتریس بالا هسنبرگی $H_{k+1,k}$ با ابعاد $(k+1) \times k$ ، رابطه زیر برقرار است:

$$AV_k = V_{k+1}H_{k+1,k} \quad (۱)$$

چون جواب تقریبی $x_{k-\alpha}$ متعلق به فضای آفین $x_{k-\alpha} \in x_0 + span\{v_1, Av_1, \dots, A^{k-\alpha-1}v_1\}$

می‌باشد پس $x_{k-\alpha} = x_0 + V_{k-\alpha} \xi_{k-\alpha}$ ، که با تعیین $\xi_{k-\alpha}$ این جواب تقریبی مشخص می‌شود. با توجه به مطالب بخش قبل داریم:

$$r_{k-\alpha} = b - Ax_{k-\alpha} = r_0 - AV_{k-\alpha} \xi_{k-\alpha},$$

و

α ناقص ماتریس A نسبت به بردار \hat{e}_0 از درجه k باشد، آنگاه $p(\lambda) = 1 - \sum_{i=1}^{k-\alpha} \hat{c}_i \lambda^{\alpha+i}$ ، که \hat{c}_i منحصر بفرند و

$$A^D b + \hat{x}_0 = x_0 + \sum_{i=1}^{k-\alpha} \hat{c}_i A^{\alpha+i-1} r_0.$$

قضیه ۷: [14]، فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ با $ind(A) = \alpha$ ، چند جمله‌ای مینیمال p ناقص A نسبت به بردار \hat{e}_0 از درجه k و $x_k = x_0 + \sum_{i=1}^{k-\alpha} \hat{c}_i A^{\alpha+i-1} r_0$ اگر دترمینان ماتریس $W^* A^{\alpha+1} V$ مخالف صفر باشد، آنگاه $x_{k-\alpha} = A^D b + \hat{x}_0$

قضیه ۸: [4]، در حالتی که $W = A^{\alpha+1} V$ ، بردار $x_{k-\alpha}$ برای تمام $k \leq k_0$ که درجه چند جمله‌ای مینیمال α -ناقص A نسبت به بردار \hat{e}_0 است، موجود و منحصر به فرد است.

در حالتی که W را $A^{\alpha+1} V$ انتخاب کنیم چون $W^* A^{\alpha+1} V c = W^* A^\alpha r_0$

$$(A^{\alpha+1} V)^* A^{\alpha+1} V c = (A^{\alpha+1} V)^* A^\alpha r_0,$$

و به کمک معادلات نرمال مسئله کمترین مربعات داریم:

$$\min_{c_1, \dots, c_{k-\alpha}} \|A^\alpha (AVc - r_0)\|_2 = \min_{x_{k-\alpha} \in x_0 + \mathcal{K}_{k-\alpha}(A, A^\alpha r_0)} \|A^\alpha r_{k-\alpha}\|_2$$

بنابراین به طور خلاصه:

$$DGMRES \quad find \quad x_{k-\alpha} \in x_0 + \mathcal{K}_{k-\alpha}(A, A^\alpha r_0)$$

$$s.t \quad \|A^\alpha r_{k-\alpha}\|_2 = \min_{x \in x_0 + \mathcal{K}_{k-\alpha}(A, A^\alpha r_0)} \|A^\alpha (b - Ax)\|_2 = \min_{p \in P_k^\alpha(0)} \|p(A)A^\alpha b\|_2$$

۳. الگوریتم $DGMRES$

الگوریتم $DGMRES$ اولین بار توسط سیدی در [4] ارائه شده است. اما نسخه کامل‌تر آن برای پیاده‌سازی مثال‌ها از منبع [9] آورده شده است.

حل $H_k^{\alpha-l+1} \hat{H}_{k,k-l}$ با ماتریس ضرایب $k \times (k-l)$ شود.

این الگوریتم بسیار شبیه $GMRES$ برای حل دستگاه معادلات خطی نامنفرد است که در جدول (۱) آورده شده است. با توجه به رابطه (۲) شخص می تواند رابطه

$$\|A^\alpha r_{k-\alpha}\|_2 = \|\beta e_1 - \hat{H}_{k+1,k-\alpha} \xi\|_2$$

را بدون محاسبه واقعی $x_{k-\alpha}$ زیر نظر داشته باشد. بنابراین تنها محاسبه $x_{k-\alpha}$ تازمانی که این نرم تا زیر یک تلورانس مطلوب کاهش یابد، لازم است. توجه کنید که اگر α الگوریتم جدول (۱) بزرگتر از اندیس A باشد، پس الگوریتم، جواب $A^{\alpha+1}x = A^\alpha b$ را پیدا می کند، در حالیکه اگر α کوچکتر از اندیس A باشد الگوریتم سعی دارد دستگاه خطی $A^{\alpha+1}x = A^\alpha b$ را حل کند که ممکن است سازگار نباشد.

۴. ساخت مسئله ایی با منحنی همگرایی

معلوم و همین طور مقادیر ویژه مقرر شده ما در این مقاله به همگرایی روش $DGMRES$ می پردازیم و به این سوال که آیا برای هر دنباله غیر صعودی از اعداد نامنفی می توان ماتریس ضرایب دستگاه (دستگاه های) معادلات خطی منفردی یافت که این دنباله، نرم های بردارهای مانده آنها تولید شده توسط روش $DGMRES$ باشد؟ پاسخ می دهیم.

قضیه ۹: فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ با $\alpha = ind(A)$ و $b \in \mathbb{C}^n$. در این صورت هرگاه دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ با الگوریتم $DGMRES$ حل شود، آنگاه

$$A^\alpha r_{\alpha+m} = A^\alpha r_{\alpha+m+1} = \dots = A^\alpha r_n = 0$$

که $m = dimR(A^\alpha)$

برهان: چون $\alpha = ind(A)$ بنابر تجزیه ژوردان

$$A^\alpha r_{k-\alpha} = A^\alpha r_0 - A^{\alpha+1} V_{k-\alpha} \xi.$$

بنا به رابطه (۱) داریم:

$$\begin{aligned} A^\alpha r_{k-\alpha} &= A^\alpha r_0 - A^\alpha V_{k-\alpha+1} H_{k-\alpha+1,k-\alpha} \xi \\ &= A^\alpha r_0 - A^{\alpha-1} V_{k-\alpha+2} H_{k-\alpha+2,k-\alpha+1} H_{k-\alpha+1,k-\alpha} \xi \\ &\quad \vdots \\ &= A^\alpha r_0 - V_{k+1} \hat{H}_{k+1,k-\alpha} \xi \end{aligned}$$

که

$$\hat{H}_{k+1,k-\alpha} = H_{k+1,k} H_{k,k-1} \dots H_{k-\alpha+1,k-\alpha}$$

چون $A^\alpha r_0 = V_{k+1}(\beta e_1)$ که $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ پس

$$A^\alpha r_{k-\alpha} = V_{k+1}(\beta e_1 - \hat{H}_{k+1,k-\alpha} \xi) \quad (2)$$

بنابراین بردار ξ باید به گونه ای انتخاب شود که $\|A^\alpha r_{k-\alpha}\|_2$ مینیمم شود که با حل مسئله کمترین مربعات

$$\min_\xi \|\beta e_1 - \hat{H}_{k+1,k-\alpha} \xi\|_2$$

می توان بردار ξ را بدست آورد. چون $x_{k-\alpha} - x_0$ ترکیب خطی $k-\alpha$ بردار اول در الگوریتم آرنولدی است برای تعیین این ترکیب خطی به $k+1$ بردار اول در الگوریتم آرنولدی و ماتریس های بالا هسنبیگی متناظر $H_{k+1,k}, H_{k,k-1}, \dots$ نیاز داریم. به محض اینکه مجموعه ای از بردارهای مستقل خطی فضای کرایلف ساخته شود به طوری که $h_{k+1,k} = 0$ داریم:

$$AV_k = V_k H_k$$

بنابراین برای $0 \leq l \leq \min\{k-1, \alpha\}$ به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} A^\alpha r_{k-l} &= A^\alpha r_0 - A^{\alpha-l+1} V_k \hat{H}_{k,k-l} \xi \\ &= A^\alpha r_0 - V_k H_{k,k}^{\alpha-l+1} \hat{H}_{k,k-l} \xi \\ &= V_k (\beta e_1 - H_{k,k}^{\alpha-l+1} \hat{H}_{k,k-l} \xi) \end{aligned}$$

که برای تعیین ξ باید مسئله کمترین مربعات

است. فرض کنید W ماتریسی باشد که ستون‌های آن $\{w_1, \dots, w_m\}$ باشد. بنابراین

$$W^* A^\alpha r_0 = \begin{bmatrix} w_1^* \\ \vdots \\ w_m^* \end{bmatrix} A^\alpha r_0 = \begin{bmatrix} \langle A^\alpha r_0, w_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle A^\alpha r_0, w_m \rangle \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} 0 &= \|A^\alpha r_{\alpha+m-1}\|_2^2 - \langle A^\alpha r_0, w_m \rangle - \|A^\alpha r_{\alpha+m}\|_2^2 \\ &= \|A^\alpha r_{\alpha+m-1}\|_2^2 - \langle A^\alpha r_0, w_m \rangle - \langle A^\alpha r_0, w_m \rangle - \|A^\alpha r_{\alpha+m}\|_2^2 \\ &\quad \vdots \\ &= \|A^\alpha r_{\alpha+m-1}\|_2^2 - \langle A^\alpha r_0, w_m \rangle - \dots - \langle A^\alpha r_0, w_1 \rangle - \|A^\alpha r_{\alpha+m}\|_2^2 \end{aligned}$$

چون $m = \dim R(A^\alpha)$ بنابراین $\{w_1, \dots, w_m\}$ یک پایه متعامد یکه برای فضای $R(A^\alpha)$ است. از طرفی چون $A^\alpha r_0 \in R(A^\alpha)$ پس

$$A^\alpha r_0 = \sum_{i=1}^m \langle A^\alpha r_0, w_i \rangle w_i \quad (۴)$$

اگر نرم ۲ بردار معادله (۴) را حساب کنیم خواهیم داشت

$$\|A^\alpha r_0\|_2^2 = \sum_{i=1}^m \langle A^\alpha r_0, w_i \rangle^2 > 2$$

در نتیجه $A^\alpha r_{\alpha+m} = 0$ چون برای $\langle A^\alpha r_0, w_j \rangle = 0 \quad j = m+1, \dots, n$ بنابراین برای هر $j = m+1, \dots, n$ داریم $A^\alpha r_{\alpha+j} = 0$ که این اثبات را کامل می‌کند. در اینجا قصد داریم در قالب قضیه زیر به سوال طرح شده در ابتدای بخش پاسخ دهیم.

قضیه ۱۰: فرض کنید دنباله نزولی

$$f(0) \geq f(1) \geq \dots \geq f(m-1) > f(m) = \dots = f(n) = 0,$$

مجموعه $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m, 0, \dots, 0\}$ از اعداد مختلط و

$$A = S \begin{bmatrix} B & \\ & N \end{bmatrix} S^{-1}$$

که ماتریس $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$ نامنفرد و ماتریس N پوچ توان با $\alpha = \text{ind}(N)$ است. بنابراین

$$A^\alpha = S \begin{bmatrix} B^\alpha & \\ & 0 \end{bmatrix} S^{-1}$$

در نتیجه $m = \dim R(A^\alpha) \leq n - \alpha$

بنابر الگوریتم DGMRES تقریب $x_{k-\alpha}$ از جواب دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ در مرحله k -ام متعلق به فضای آفین $x_0 + \mathcal{K}_{k-\alpha}(A, A^\alpha r_0)$ که $\mathcal{K}_{k-\alpha}(A, A^\alpha r_0) = \text{span}\{A^\alpha r_0, \dots, A^{k-1} r_0\}$

و $r_0 = b - Ax_0$ بنابراین $x_{k-\alpha} = x_0 + v$ که $v \in \mathcal{K}_{k-\alpha}(A, A^\alpha r_0)$

و بردار مانده مرحله k -ام

$$\begin{aligned} A^\alpha r_{k-\alpha} &= A^\alpha (b - Ax_{k-\alpha}) \\ &= A^\alpha r_0 - A^{\alpha+1} v = A^\alpha r_0 - u \end{aligned}$$

که $u = A^{\alpha+1} v \in \mathcal{K}_{k-\alpha}(A, A^\alpha r_0)$

فرض کنید $\{w_1, \dots, w_{k-\alpha}\}$ پایه متعامد یکه برای زیر فضای کرالیف $\mathcal{K}_{k-\alpha}(A, A^\alpha r_0)$ باشد. چون $m \leq n - \alpha$ داریم:

$$A^{\alpha+1} \mathcal{K}_m(A, A^\alpha r_0) = \text{span}\{w_1, \dots, w_m\}$$

در این صورت نرم بردار مانده $A^\alpha r_{k-\alpha}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\|A^\alpha r_{k-\alpha}\|_2 = \min_{u \in A^{\alpha+1} \mathcal{K}_{k-\alpha}(A, A^\alpha r_0)} \|A^\alpha r_0 - u\|_2$$

بنابر خاصیت مینیمم بالا، می‌توان نشان داد که:

$$\begin{aligned} &\langle A^\alpha r_0, w_j \rangle^2 = \|A^\alpha r_{\alpha+j-1}\|_2^2 - \|A^\alpha r_{\alpha+j}\|_2^2, \\ &j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (۳)$$

که در رابطه (۳)، $r_\alpha = r_0$ در نظر گرفته شده

در این صورت ماتریس نمایش B در پایه W ماتریس همراه زیر با چند جمله ای مشخصه $p(z)$ است.

$$[B]_W = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \cdots & 0 & a_1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & 1 & a_{m-1} \end{bmatrix}$$

اگر قرار دهیم $B = W[B]_W W^{-1}$ در این صورت $\lambda_m, \dots, \lambda_1$ مقادیر ویژه ماتریس B هستند. از طرفی چون $b' \neq 0$ و ماتریس B^α نامنفرد است، بردار ناصفر \hat{b} وجود دارد به طوری که $b' = B^\alpha \hat{b}$ تعریف می کنیم:

$$b = \begin{bmatrix} \hat{b} \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n, A = \begin{bmatrix} B & \\ & N \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

که $N \in \mathbb{C}^{(n-m) \times (n-m)}$ هر ماتریس پوچ توان با $ind(N) = \alpha$ در این صورت

$$A^\alpha b = \begin{bmatrix} B^\alpha & \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b' \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

بنابراین $\|A^\alpha b\|_2 = f(0)$.

همچنین تعریف می کنیم $V_n = \begin{bmatrix} V_m \\ 0 \end{bmatrix}$ که با ضرب ترانهاده مزدوج آن در رابطه بالا خواهیم داشت:

$$V_n^* A^\alpha b = V_m^* b' = \begin{bmatrix} \langle b', v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle b', v_m \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(1) \\ \vdots \\ g(m) \end{bmatrix}$$

حال اگر دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ را با روش DGMRES با بردار آغازین $x_0 = 0$ حل کنیم برای $k = \alpha + 1, \dots, \alpha + m - 1$ داریم $\|A^\alpha r_{k-\alpha}\|_2 = f(k - \alpha + 1)$.

فرض کنید $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_m$ دنباله ای از زیر فضاهای \mathbb{C}^m ، با شرط

$$\dim(E_j) = j, j = 1, \dots, m$$

پایه متعامد $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ و $\hat{b} \in \mathbb{C}^m$ یکه ای برای E_m باشد به طوری که

عدد دلخواه $\alpha \leq n - m$ داده شده است. در این صورت ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ با $\alpha = ind(A)$ و مقادیر ویژه غیر صفر $\lambda_m, \dots, \lambda_1$ وجود دارد به طوری که اگر الگوریتم DGMRES برای دستگاه خطی $Ax = b$ با بردار مانده اولیه $A^\alpha r_0$ که $\|A^\alpha r_0\|_2 = f(0)$ بکار برده شود آنگاه برای $k = \alpha + 1, \alpha + 2, \dots, \alpha + m - 1$ خواهیم داشت:

$$\|A^\alpha r_{k+\alpha}\|_2 = f(k).$$

برهان. چون $\lambda_m, \dots, \lambda_1$ مقادیر غیر صفری هستند در این صورت مقدار a_0 در چند جمله ای

$$p(z) = (z - \lambda_1) \dots (z - \lambda_m) = z^m - \sum_{j=0}^{m-1} a_j z^j$$

غیر صفر است. تعریف می کنیم:

$$g(k) = \sqrt{(f(k-1))^2 - (f(k))^2};$$

$$k = 1, \dots, m-1$$

فرض کنید $V = \{v_1, \dots, v_m\}$ پایه متعامد یکه دلخواهی برای \mathbb{C}^m و $V_m = [v_1 \dots v_m]$ ماتریسی باشد که ستون های آن عناصر V هستند. چون ماتریس V_m نامنفرد و $g(m) = f(m-1)$ پس دستگاه معادلات خطی $V_m^* y = (g(1), \dots, g(m))^t$ دارای جواب منحصر بفرود $y = b' \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ است. همچنین می توان ماتریس V_m را به گونه ای انتخاب کرد که $\|b'\|_2 = f(0)$ چون $b' \neq 0$. بنابراین بردارهای $W = \{b', v_1, \dots, v_{m-1}\}$ مستقل خطی اند در نتیجه W پایه ای برای \mathbb{C}^m است. فرض کنید ماتریسی باشد که ستونهای آن عناصر W هستند. عملگر B را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$B: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$$

$$b' \rightarrow v_1$$

$$v_1 \rightarrow v_2$$

$$\vdots$$

$$v_{m-2} \rightarrow v_{m-1}$$

$$v_{m-1} \rightarrow a_0 b' + a_1 v_1 + \dots + a_{m-1} v_{m-1}$$

قضیه ۱۰: دنباله نامنفی و غیر نزولی از اعداد
 $f(0) \geq f(1) \geq \dots \geq f(m-1) > f(m)$
 $= \dots = f(n) = 0$

و عدد دلخواه $\alpha \leq n - m$ مفروض است. در این صورت بردار مانده $A^\alpha r_{k+\alpha}$ در هر مرحله از روش $DGMRES$ برای حل دستگاه $Ax = b$ با $ind(A) = \alpha$ در شرط $\|A^\alpha r_{k+\alpha}\|_2 = f(k); k = 1, \dots, m$

صدق می‌کند اگر و تنها اگر

$$A = B \oplus N$$

که

$$B = WR\hat{H}W^*$$

هر ماتریس پوچ توان با اندیس N و α باشد و بردار

$$g(1) \text{ و } W^* \hat{b} = \begin{pmatrix} g(1) \\ \vdots \\ g(m) \end{pmatrix} \text{ که } b = \begin{pmatrix} \hat{b} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

... و $g(m)$ در قضیه قبل تعریف شده‌اند.

$$span\{w_1, \dots, w_j\} = E_j, j = 1, \dots, m$$

و همین طور W را ماتریس بردارهای \mathcal{W} در نظر می‌گیریم یعنی $W = [w_1 \dots w_m] \in \mathbb{C}^{m \times m}$. فرض کنید B هر عملگر خطی نامنفرد روی E_m و ماتریس B ماتریس نمایش B در پایه استاندارد باشد. بنا به قضیه ۳-۱ [11] $\langle \hat{b}, w_m \rangle \neq 0$ ، اگر و تنها اگر $BK_j(B, \hat{b}) = E_j; j = 1, \dots, m$ عملگر B در پایه \mathcal{W} به صورت $R\hat{H}$ است که R ماتریس بالا مثلثی نامنفرد و

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\langle \hat{b}, w_m \rangle} \\ 1 & \ddots & \vdots & \frac{\langle \hat{b}, w_1 \rangle}{\langle \hat{b}, w_m \rangle} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 & \frac{\langle \hat{b}, w_{m-1} \rangle}{\langle \hat{b}, w_m \rangle} \end{bmatrix}$$

با توجه به تعاریف بالا و قضیه ۳-۲ [11] قضیه زیر نتیجه می‌شود.

DGMRES for the Drazin inverse solution of $Ax = b$, index of A is α

Given an initial $\beta = \|A^\alpha r_0\|_2$ guess x_0 , compute $r_0 = b - Ax_0$ and $A^\alpha r_0$.

Set and $v_1 = \beta^{-1} A^\alpha r_0$.

For $k = 1, 2, \dots$

Construct the next Arnoldi vector:

Set $v_{k+1} = Av_k$.

For $j = 1, \dots, k$

Compute $h_{jk} = v_j^* v_{k+1}$.

Replace $v_{k+1} \leftarrow v_{k+1} - h_{jk} v_j$.

Compute $h_{k+1,k} = \|v_{k+1}\|_2$.

If $h_{k+1,k} = 0$, set a flag;

Otherwise set $v_{k+1} = v_{k+1} / h_{k+1,k}$.

If $k > \alpha$ and flag not set,

Form $\hat{H}_{k+1,k-\alpha} = \prod_{j=0}^{\alpha} H_{k+1-j,k-j}$.

Solve the least squares problem

$\hat{H}_{k+1,k-\alpha} \xi = \beta e_1$ for ξ .

Set $x_{k-\alpha} = x_0 + V_{k-\alpha} \xi$.

Compute $r_{k-\alpha} = b - Ax_{k-\alpha}$ and $A^\alpha r_{k-\alpha}$.

If $\|A^\alpha r_{k-\alpha}\|_2$ sufficiently small, then terminate;

Otherwise, continue.

If flag is set, form the final iterates and terminate:

Let $\tilde{k} = \min\{\alpha, k-1\}$.

For $l = \tilde{k}, \tilde{k}-1, \dots, 0$

Form $\hat{H}_{k,k-l} = H_k^{\alpha-l+1} \prod_{j=0}^{l-1} H_{k-j,k-j-1}$.

Solve the least squares problem $\hat{H}_{k,k-l} \xi \approx \beta e_1$ for ξ .

Set $x_{k-l} = x_0 + V_{k-l} \xi$.

Compute $r_{k-l} = b - Ax_{k-l}$ and $A^\alpha r_{k-l}$.

جدول ۱: الگوریتم روش DGMRES

- DGMRES," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 552, pp. 219-238, 2018.
- [10] M. Safarzadeh and A. Salemi, "DGMRES and index numerical range of matrices," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 335, pp. 349-360, 2018.
- [11] A. Greenbaum, V. Pták and Z. Strakoš, "Any Nonincreasing Convergence Curve is Possible for GMRES," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 17, no. 3, p. 465–469, 1996.
- [12] Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, Philadelphia: SIAM, 2003.
- [13] J. J. Climent, M. Neumann and A. Sidi, "A semi-iterative method for singular linear systems with arbitrary index," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 87, no. 1, pp. 21-38, 1997.
- [1] S. Campbell and C. J. Meyer, *Generalized Inverses of Linear Transformations*, Pitman, London, San Francisco, Melbourne, 1979.
- [2] Y. Saad, "Krylov subspace methods for solving large unsymmetric linear systems," *Mathematics of Computation*, vol. 37, pp. 105-126, 1981.
- [3] Y. Saad and M. H. Schultz, "GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems," *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, vol. 7, p. 856–869, 1986.
- [4] A. Sidi, "DGMRES: A GMRES-type algorithm for Drazin-inverse solution of singular nonsymmetric linear systems," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 335, p. 189–204, 2001.
- [5] J. Liesen and Z. Strakos, "Convergence of GMRES for Tridiagonal Toeplitz Matrices," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 26, no. 1, p. 233–251, 2004.
- [6] J. Liesen and P. Tichý, "The worst-case GMRES for normal matrices," *BIT Numerical mathematics*, vol. 44, no. 1, pp. 79-98, 2004.
- [7] J. Liesen and Z. Strakos, "GMRES Convergence Analysis for a Convection-Diffusion Model Problem," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 26, no. 6, pp. 1989-2009, 2005.
- [8] R. C. Li and W. Zhang, "The rate of convergence of GMRES on a tridiagonal toeplitz linear system. II," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 431, no. 12, pp. 2425-2436, 2009.
- [9] A. Greenbaum, F. Kyanfar and A. Salemi, "On the convergence rate of