کاربرد تئوری اندازه در ردیابی مقاوم

آصف زارع، علی خاکی‌صدیق و علی وحیدیان کامیاد

چکیده: دراین مقاله به کمک تئوری اندازه دو روش برای ردیابی مقاوم ورودیهای پله‌ای در سیستم‌های غیرخطی همراه با نامعینی ساختاری ارائه می‌شود. در ابتدا مسأله فوق به مسأله کنترل بهینه غیرخطی با افق زمانی بینهایت تبدیل شده و نحوه عملکرد مقاوم با دو دیدگاه مختلف تعریف می‌شود. سپس با یک تغییر متغیر مناسب، بازه زمانی را به بازه متناهی $[0,1)$ تبدیل می‌کنیم. با این تغییر متغیر، یک مسأله متغیر با زمان حاصل می‌شود. با انتقال مسأله کنترل بهینه بدست آمده به فضای اندازه نشان می‌دهیم که باید یک اندازه بهینه که متناظر یک مسأله برنامه‌ریزی خطی با بعد بینهایت است، تعیین شود. سپس در مرحله بعد با تقریب مسأله برنامه‌ریزی خطی با بعد بینهایت با یک مسأله برنامه‌ریزی خطی با بعد متناهی تابع کنترل بهینه را که بصورت قطعه‌ای ثابت است، بدست می‌آوریم و با استفاده از آن تابع تبدیل کنترل‌کننده با حل مسأله بهینه‌سازی دیگر تعیین می‌شوند. نکته مهم دیگر در آزاد بودن حالتهای نهایی است، که باتغییرات مناسبی که در مسأله برنامه‌ریزی خطی منظور می‌گردد، آنها را بدست می‌آوریم.

***کلید واژه:* تئوری اندازه، کنترل بهینه، برنامه‌ریزی خطی، کنترل مقاوم، عملکرد مقاوم.**

۱- مقدمه

تئوری اندازه ابزاری کارآمد و جدید است که به کمک آن طیف وسیعی از مسائل کنترل بهینه (خطی و غیر خطی) رامی‌توان بصورت تقریبی حل کرد، از جمله کاربردهای آن: کنترل بهینه معادله انتقال حرارت یک‌بعدی [۱]، کنترل بهینه معادله انتقال حرارت چندبعدی [۲] و [۳]، کنترل بهینه معادله موج [۴] و کنترل بهینه معادلات بیضوی [۵] می‌باشد. در بحث کلاسیک کنترل بهینه معمولاً از برنامه‌ریزی پویا [۶] تا [۸] و یا اصل حداقل‌یابی پونترياگن[۶]، [۷] و [۹] استفاده می‌شود، که روش اول با مشکل ابعاد مواجه است و باید تابع هدف محدب باشد، روش دوم در مسائل غیر خطی مشکلات زیادی دارد. آنچه دراین مقاله بررسی می‌شود، کاربرد تئوری اندازه در طراحی کنترل‌کننده مقاوم جهت ردیابی ورودی پله‌ای، برای سیستم‌های غیر خطی می‌باشد. دیگر، اینکه از این ابزار در حل مسائل کنترل بهینه حلقه‌بسته استفاده می‌شود خود کاربردی جدید می‌باشد.

مسأله کنترل بهینه غیر خطی در حالت زمان پیوسته و با افق زمانی محدود حل و کارایی تئوری اندازه در بعضی حالات مشخص شده [۲] و [۱۰]، دراین مقاله ابتدا بگونه‌ای کاربرد تئوری اندازه را به حالت افق بینهایت تعمیم داده و از آن در جهت ردیابی مقاوم ورودی‌های پله‌ای استفاده می‌شود. در این روش ابتدا افق نامتناهی را به افق متناهی تبدیل می‌کنیم سپس مسأله حاصل یک مسأله کنترل بهینه با تابع هدف غیر محدب و با شرط اولیه مشخص وشرط نهایی آزاد است. حال چون مسأله کلاسیک بدست آمده را نمی‌توان با روشهای مرسوم حل کرد، لذا آن را به صورت یک به یک به مسأله‌ای در فضای اندازه‌های رادن متناظر می‌کنیم. سپس برای حل تقریبی مسأله جدید، که یک مسأله برنامه‌ریزی خطی با بعد نامتناهی است، آنرا به یک مسأله برنامه‌ریزی خطی با بعد متناهی تبدیل می‌کنیم و با کمک نرم‌افزار مسأله اخیر را حل کرده و با استفاده از جوابهای مسأله، کنترل‌های تقریبی را بصورت توابع قطعه‌ای ثابت بدست می‌آوریم و به کمک معادلات حالت مسیرهای بهینه تقریبی که در حقیقت تقریبی برای مسأله با افق نامتناهی اولیه است، بدست می‌آیند.

یک مزیت اساسی این روش آنست که مسأله در فضای اندازه معمولاً دارای جواب تقریبی است و این جواب را به فضای اولیه برمی‌گردانیم که در حقیقت پیدا کردن جوابی برای مسأله در فضایی وسیع (فضای‌اندازه) انجام گرفته است. در واقع این روش بجای محاسبه زوج مسیر-کنترل به دنبال عناصر دیگری بوده (درواقع به دنبال تعیین یک تابعی است). اهمیت این روش در تبدیل مسأله کنترل مقاوم به صورت تقریبی به یک مسأله برنامه‌ریزی خطی و عدم وابستگی آن به محدب بودن تابع معیار می‌باشد.

کنترل مقاوم روشی است که درآن دو مشخصه مهم عملکرد مقاوم و پایداری مقاوم برای سیستم‌هایی که درتابع تبدیل آنها نامعینی وجود دارد مورد بررسی قرار گرفته وکنترل‌کننده‌ای جهت رسیدن به دو هدف فوق طراحی می‌شود. در این مقاله می‌خواهیم با استفاده از توانمندی تئوری اندازه در حل مسائل کنترل بهینه واستقلال آن از خطی بودن سیستم و محدب بودن تابع معیار، در سیستم‌های غیر خطی که دارای نامعینی از نوع پارامتری باشند، پاسخ پله برای همه مقادیر پارامترها وضعیتی مطلوب داشته باشد و در محدوده‌هایی که مشخص خواهیم کرد قرار گیرد(عملکرد مقاوم باشد). محدوده مطلوب را بر اساس پاسخ به دو نوع سیستم تعیین می‌کنیم. در واقع یک کران (y_2) را برای سرعت مطلوب ولی احیاناً جهش نامطلوب و کران دیگر را بوسیله (y_1) که دارای سرعت کم ولی بدون جهش است تعیین خواهیم کرد.

۲- بیان مسأله کنترل مقاوم

فرض کنید معادله دیفرانسیل حاکم بر یک سیستم غیر خطی بصورت زیر باشد:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= g(x(t),u(t),a) \\ y(t) &= h(x(t),u(t),a) \end{aligned} \tag{۱}$$

که در آن a پارامتر (برداری از پارامترها) است که در یک محدوده مشخص مثل D قرار دارد ($a \in D$) می‌خواهیم برای سیستم فوق کنترل‌کننده‌ای طراحی کنیم که به ازاء همه مقادیر a پاسخ پله در یک محدوده قابل قبول باشد. ضمناً برای همه مقادیر پارامتر حد توابع حالت و کنترل موجود هستند.

با استفاده از سیستم‌های مرتبه دوم می‌توان دو پاسخ را برای خروجی سیستم بصورت زیر بدست آورد:

این مقاله در تاریخ ۲۸ مرداد ماه ۱۳۸۰ دریافت و در تاریخ ۲۱ آبان ماه ۱۳۸۱ بازنگری شد.

آصف زارع، گروه برق، دانشگاه آزاد اسلامی واحد گناباد، گناباد، صندوق پستی ۲۹.
علی خاکی‌صدیق، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی.
علی وحیدیان کامیاد، دانشکده علوم، دانشگاه فردوسی مشهد.

$$
\begin{aligned}
&y_1(t)=1-\frac{1}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left[\frac{e^{-(\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t}}{\xi-\sqrt{\xi^2-1}}-\frac{e^{-(\xi+\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t}}{\xi+\sqrt{\xi^2-1}}\right] \qquad \xi\ge 1\\
&y_2(t)=1-\frac{\omega_d}{\omega_n}e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d+\theta) \qquad\qquad \cos\theta=\xi
\end{aligned} \tag{۲}
$$

که در آن y_2 دارای سرعت مطلوب و جهش نامطلوب بوده و y_1 دارای سرعت کم و عدم جهش می‌باشد. اگر y_2^p پوش y_2 باشد می‌توان آنرا بصورت زیر تعریف کرد:

$$
y_2^p=\begin{cases} y_2(t) & t\le \dfrac{\pi}{\omega_d}\\ 1+\dfrac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} & t\ge \dfrac{\pi}{\omega_d}\end{cases} \tag{۳}
$$

در واقع می‌خواهیم خروجی سیستم $y(t)$ همواره بین y_2^p و y_1 قرار گیرد، اگر تعریف کنیم:

$$
y^*(t)=\frac{1}{2}(y_2^p(t)+y_1(t)) \tag{۴}
$$

یعنی $y^*(t)$ وسط y_2^p و y_1 می‌باشد. با توجه به تعریف y_2^p و y_1 داریم:

$$
\lim_{t\to\infty} y_2^p(t)=\lim_{t\to\infty} y_2(t)=1 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} y^*(t)=1
$$

حال معیار قرارگیری خروجی سیستم بین y_2^p و y_1 را می‌توان به یکی از دو صورت زیر بیان کرد:

روش اول: با توجه به قضیه زیر شرط لازم و کافی بدست می‌آید:

قضیه۱) شرط لازم و کافی برای آنکه $y(t)$ بین y_2^p و y_1 قرار گیرد آن است که:

$$
\begin{aligned}
&\forall t\in J:\ y_1(t)\le y(t)\le y_2^p(t) \ \Rightarrow\\
&\int_J [1-\operatorname{sgn}(y(t)-y_1(t))]\,dt=0\\
&\int_J [1-\operatorname{sgn}(y_2^p(t)-y(t))]\,dt=0
\end{aligned}
$$

اثبات: شرط لازم که به سادگی بدست می‌آید. زیرا روی فاصله J تابع علامت همواره یک است.

شرط کافی: اگر تعریف کنیم $M=\{t: y(t)-y_1(t)<0\}$، آنگاه داریم:

$$
\int_J [1-\operatorname{sgn}(y(t)-y_1(t))]dt=2m(M)=0
$$

که در آن $m(M)$ اندازه مجموعه M می‌باشد که با توجه به قضیه داریم: $m(M)=0$، یعنی حداکثر فقط در یک شمارا شرط $y(t)-y_1(t)\ge 0$ نقض می‌شود. از طرف دیگر چون $y(t)$ پیوسته است لذا M تهی می‌شود. به همین ترتیب برای کران دیگر نیز می‌توان ثابت کرد. لذا معیار قرارگیری خروجی سیستم بین y_2^p و y_1 را می‌توان به صورت فوق بیان کرد.

اگر مجموعه D را به یک سری زیر مجموعه تقریباً چگال در آن افراز کنیم و از هر افراز یک نمونه a_i برداریم آنگاه:

$$
\forall a_i: J(a_i)\le\sigma \qquad a_i\in d_i\ ,\ \bigcup_{i=1}^{n} d_i=D, i=1,2,3,\ldots
$$

بنابراین مسئله کنترل مقاوم را می‌توان بصورت زیر به یک مسئله بهینه‌سازی تبدیل کرد:

$$
\begin{aligned}
\min_{s.t}(I)&=\sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty \left\| y(t)-y^*(t)\right\|^2 dt\\
&=\sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty \left\| h(x,u,a_i)-y^*(t)\right\|^2 dt\\
&\dot{x}(t)=g(x(t),u(t),a)\\
&y(t)=h(x(t),u(t),a)\\
&\int_J [1-\operatorname{sgn}(y(t)-y_1(t))]\,dt=0\\
&\int_J [1-\operatorname{sgn}(y_2^p(t)-y(t))]\,dt=0
\end{aligned} \tag{۵}
$$

در واقع سعی شده برای یک سری زیر مجموعه تقریباً چگال از D، اولاً جواب تا حد امکان به جواب بهینه نزدیک باشد و ثانیاً در محدوده مجاز قرار گیرد.

روش دوم: معیار قرارگیری خروجی سیستم بین y_2^p و y_1 را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$
J(a,y(t))=\int_0^\infty \left\| y(t)-y^*(t)\right\|^2 dt\le\sigma
$$

برای تعیین σ باید $y(t)$ در یکی از دو کران y_2^p یا y_1 قرار گیرد. بنابراین:

$$
\sigma=\int_0^\infty \left\| y(t)-y^*(t)\right\|^2 dt=\frac{1}{4}\int_0^\infty \left\| y_2^p(t)-y_1(t)\right\|^2 dt
$$

با توجه به معیار تعریف شده در واقع یک مسأله کنترل بهینه با افق زمانی بی‌نهایت خواهیم داشت که قبلاً حل شده، بنابراین حل مسأله کنترل مقاوم بصورت زیر خلاصه می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}(t)=g(x(t),u(t),a)\\
&y(t)=h(x(t),u(t),a)\\
&\forall a\in D: J(a)\le\sigma
\end{aligned} \tag{۶}
$$

بنابراین مسأله کنترل مقاوم را می‌توان بصورت زیر به یک مسئله بهینه‌سازی تبدیل کرد:

$$
\begin{aligned}
&\max_{s.t}(\min(\gamma_i))\\
&\dot{x}(t)=g(x(t),u(t),a)\\
&y(t)=h(x(t),u(t),a)\\
&J(a_i)+\gamma_i=\sigma \qquad i=1,2,3,\ldots
\end{aligned} \tag{۷}
$$

در واقع در مسأله فوق سعی شده که بدترین حالت بهبود یابد.

نکته دیگر شایان توجه آن است که $u(t)$ تابعی از a خواهد بود یعنی بسته به اینکه a چه مقداری باشد $u(t)$ حاصله جهت کنترل سیستم فرق خواهد کرد. به این خاطر اگر d بقدر کافی ظریف باشند و توابع $g(x,u,a)$ و $h(x,u,a)$ هم در شرایط لیپ-شیتس صدق کنند آنگاه اگر $a_i\in d_i$ باشد با توجه به شرایط بالا $a=a_i$ منظور شود در این صورت $u(t)$ و $x(t)$ را به ترتیب با $u_i(t)$ و $x_i(t)$ نمایش دهیم، آنگاه مسأله به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$
\begin{aligned}
\min_{s.t}(I)&=\sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty \left\| y(t)-y^*(t)\right\|^2 dt\\
&=\sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty \left\| h(x,u,a_i)-y^*(t)\right\|^2 dt
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_i(t) = g(x_i(t), u_i(t), a_i)\\
&y_i(t) = h(x_i(t), u_i(t), a_i)\\
&\int_J [1-\operatorname{sgn}(y_i(t)-y_1(t))]\,dt = 0\\
&\int_J [1-\operatorname{sgn}(y_2^p(t)-y_i(t))]\,dt = 0
\end{aligned} \qquad (۸)$$

و یا با استفاده از روش دوم مسأله کنترل مقاوم بصورت زیر به یک مسئله بهینه‌سازی تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\max_{s.t}(\min(\gamma_i))\\
&\dot{x}_i(t) = g(x_i(t),u_i(t),a_i)\\
&y_i(t) = h(x_i(t),u_i(t),a_i)\\
&J(a_i)+\gamma_i = \sigma \qquad i=۱,۲,۳,...
\end{aligned} \qquad (۹)$$

اگر تعریف کنیم $\min(\gamma_i)=\alpha$ آنگاه مسأله کنترل مقاوم بصورت زیر به یک مسأله کنترل بهینه تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\max_{s.t}(\min(\alpha))\\
&\dot{x}_i(t) = g(x_i(t),u_i(t),a_i)\\
&y_i(t) = h(x_i(t),u_i(t),a_i)\\
&J(a_i)+\gamma_i = \sigma \qquad i=۱,۲,۳,...\\
&\gamma_i \ge \alpha
\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

باید درمسأله (۱۰) تابع هدف و قیدها بصورت انتگرالی باشند تا بتوان از خواص نظریه اندازه استفاده نمود.

۳- انتقال مسأله به فضای اندازه

اگر یک تبدیل بصورت زیر در نظر بگیریم:

$$\Lambda(F) = \int_J F(x(t),u(t),t)\,dt \qquad (۱۱)$$

که در آن F تابعی پیوسته ($F \in C(A,U,J)$) بوده و در آن A مجموعه‌ای فشرده از R^n است که باید تقریباً همه جا تابع حالت در آن قرار گیرد ($\forall t: x(t) \in A$)، U مجموعه‌ای فشرده از R^m و اندازه‌پذیر لبگ [۱۱] و [۱۲] است که باید تابع کنترل در آن قرار گیرد($\forall t: u(t) \in U$) و J مجموعه‌ای بصورت $J=[t_a,t_b]$ است.
تبدیل فوق: خطی، پیوسته، کراندار و مثبت می‌باشد، بنابراین تبدیل فوق را می‌توان به صورت یک تابعی در نظر گرفت که معادل یک اندازه روی فضای اندازه‌های رادن است [۲] و [۱۲].
به این ترتیب بااستفاده از خواص تبدیل (۱۱) که ذیلاً بیان می‌شوند، می‌توان مسأله را از فضای کنترل کلاسیک به فضای اندازه انتقال داد و سپس با روشی که ارائه می‌شود حل نمود.
تبدیل خطی فوق خواص زیر را نیز دارد:
۱) اگر $\phi_j(x,t) \in C'(B)$ باشد (فضای توابعی که خود ومشتق اولشان روی B پیوسته یکنواخت باشند که در آن B یک گوی بازشامل $A\times J$ است) و $\Delta\phi_j$ رابصورت زیرتعریف کنیم:

$$\phi^g(x,u,t) = \phi_x(x,t)g(x,u,t) + \phi_t(x,t)$$

که در واقع $\phi^g(x,u,t) = \dfrac{d}{dt}\phi(x,t)$، پس باتوجه به تعریف فوق داریم:

$$\int_J \phi^g(x,u,t)\,dt = \phi(x(t_b),t_b) - \phi_t(x(t_a),t_a) \equiv \Delta\phi \qquad (۱۲)$$

۲) اگر $\psi(t)$ تابعی از $D(J^\circ)$ باشد که در آن $D(J^\circ)$ فضای توابع بینهایت بار مشتق‌پذیر با تکیه‌گاه فشرده روی $J=(t_a,t_b)$ است، و $\psi_j(x,u,t)$ را بصورت زیرتعریف کنیم:

$$\psi_j(x,u,t) = x_j\psi'(t) + g_j(x,u,t)\psi(t)$$

که درآن x_j، j امین مولفه x و u_j، j امین مولفه g می‌باشند. آنگاه برای تابع $\psi_j(x,u,t)$ داریم: [۲]

$$\int_J \psi_j(x,u,t)\,dt = ۰ \qquad (۱۳)$$

۳) اگر توابع $\theta(t)$ که پیوسته بوده و فقط شامل زمان هستند، را در نظر بگیریم، آنگاه داریم:

$$\int_J \theta(t)\,dt = a_\theta \qquad (۱۴)$$

بنابراین با توجه به تعریف $\Lambda(F)$ و باتوجه به روابط (۱۲)، (۱۳) و (۱۴) تبدیل $\Lambda(F)$ دارای خواص زیراست :

$$\begin{aligned}
&\Lambda(\phi^g) = \int_J \phi^g(x,u,t)\,dt = \Delta\phi\\
&\Lambda(\psi_j) = \int_J \psi_j(x,u,t)\,dt = ۰\\
&\Lambda(\theta(t)) = \int_J \theta(t)\,dt = a_\theta
\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

چنانچه توابع حالت و کنترل در مجموعه‌های فشرده A و U باشند و زمان در مجموعه فشرده J باشد، بطوری که مجموعه $\Omega = A\times U\times J$ فشرده باشد و فضای همه اندازه‌های رادن مثبت روی Ω را با $M^+(\Omega)$ نمایش دهیم. با به کارگیری این مفهوم و با استفاده از قضیه ریس [۲] می‌توان به مسئله کنترل بهینه تئوری اندازه شکل قطعی زیر را داد:
توابع خطی مثبت بالا، که با معادلات (۱۵) داده شده‌اند را با اندازه‌های نمایشگرشان جایگزین می‌کنیم، بنابراین می‌توان مسئله کنترل بهینه با تئوری اندازه را به صورت زیر مطرح کرد :
به دنبال اندازه مثبتی $M^+(\Omega)$ در هستیم و آن را با μ^* نمایش می‌دهیم که تابع:

$$\mu \in M^+(\Omega) \to \mu(f) \qquad (۱۶)$$

را می‌نیمم کرده و در محدودیتهای زیر صدق نماید:

$$\begin{aligned}
&\mu(\phi^g) = \Delta\phi, && \phi \in C'(B)\\
&\mu(\psi_j) = ۰, && j = ۱,۲,۳,...,n, \qquad \psi \in D(J^\circ)\\
&\mu(\theta_s) = a_s, && \theta_s \in C_۱(\Omega)
\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

زیر فضایی $M^+(\Omega)$ از که در معادلات (۱۷) صدق می‌کنند را با Q نمایش می‌دهیم. فرض کنید که اندازه بهینه μ^* چنان موجود است که تابع معیار (۱۶) را روی Q می‌نیمم سازد. این اندازه را بصورت زیر می‌توان تقریب زد:
با افراز مجموعه $A\times U$ به قسمتهای کوچک (S قسمت) و همچنین تقسیم J به d (افراز Ω به $N=s.d$) قسمت با این شرط که تابع F در شرط لیپ شیتس [۲] صدق کند و افراز Ω بقدر کافی ظریف باشد، آنگاه باتوجه به قضیه نمایشی ریس-فیشر، اندازه $\mu(F)=\Lambda(F)$ را با تقریب مناسبی بصورت زیر می‌توان بیان کرد [۲]، [۱۱] و [۱۲]:

$$\mu(F) = \sum_{j=۱}^{N} \alpha_j F(z_j) \qquad (۱۸)$$

که در آن $z_j=(x_j,u_j,t_j)$ نماینده افراز j ام می‌باشد، و $\alpha_j \geq 0$ بستگی به تابع F دارد.

چنانچه شرایط فوق برای مسأله کنترل بهینه برقرار باشد، می‌توان آن را به فضای اندازه انتقال داد. به این ترتیب حل مسأله کنترل بهینه با تقریب بسیار خوبی به حل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی و با متغیرهای محدود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\min_{s.t}(I)=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j f(z_j)$$

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\phi_i^g(z_j)=\Delta\phi_i \quad , i=1,2,3,\dots,M_1\\&\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\psi_i(z_j)=0 \quad , \quad i=1,2,3,\dots,M_2\\&\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\theta_s(z_j)=a_\theta \quad , \quad s=1,2,3,\dots,L\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

چون یک مسأله کنترل بهینه با افق زمانی بی‌نهایت داریم، ابتدا روشی جهت حل آن ارائه کرده سپس از آن در حل مسأله کنترل مقاوم استفاده می‌کنیم. مسأله کنترل بهینه غیر خطی با افق بینهایت درحالت کلی بصورت‌زیر است[۶] و [۱۳]:

$$\min . I=\int_{t_a}^{\infty} f(x(t),u(t),t)\,dt$$

$$\dot{x}(t)=g(x(t),u(t),t), x(t_a)=x_.$$

هدف انتقال حالت از $x_.$ به x_f که آزاد می‌باشد، بوده، ضمن اینکه تابع معیار I کمینه شود.

اگر تغییر متغیری بصورت $\tau=\frac{t-t_a}{t+1}$ در نظر بگیریم و توابع $f_1(x(\tau),u(\tau),\tau)$ و $g_1(x(\tau),u(\tau),\tau)$ را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$f_1(x(\tau),u(\tau),\tau)=\frac{f(x(\frac{\tau+t_a}{1-\tau}),u(\frac{\tau+t_a}{1-\tau}),\frac{\tau+t_a}{1-\tau})}{(1-\tau)^2}$$

$$g_1(x(\tau),u(\tau),\tau)=\frac{g(x(\frac{\tau+t_a}{1-\tau}),u(\frac{\tau+t_a}{1-\tau}),\frac{\tau+t_a}{1-\tau})}{(1-\tau)^2}$$

آنگاه مسأله کنترل بهینه با افق بینهایت بصورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\min_{s.t}\ I=\int_{0}^{1} f_1(x(\tau),u(\tau),\tau)\,d\tau$$

$$\frac{dx}{d\tau}=g_1(x(\tau),u(\tau),\tau) \ , \ x(0)=x_. \qquad (۲۰)$$

قضیه۲) اگر f تابعی نامنفی و روی مجموعه E انتگرال‌پذیر باشد ($\int_E f<\infty$)، آنگاه:

$$\forall\delta>0\ \exists\varepsilon>0 : \forall A\subset E, m(A)<\varepsilon \Rightarrow \int_A f<\delta$$

که در آن $m(A)$ اندازه لبگ مجموعه A بوده و انتگرال به مفهوم لبگ [۱۱] محاسبه شده است.

اثبات: اگر تعریف کنیم:

$$f_n=\begin{cases}f(x) & f(x)\leq n\\ n & f(x)>n\end{cases}$$

در واقع $f_n=\min(f(x),n)$، بنابراین یک دنباله صعودی و نامنفی است، در نتیجه بنابر قضیه همگرایی یکنواخت [۱۲] داریم

$$\int f_n\to\int f$$

بنابراین

$$\forall\delta>0 \quad \exists N \ ,\forall n\geq N: 0\leq\int_A f-\int_A f_n<\frac{\delta}{2}$$

اگر تعریف کنیم: $m(A)<\varepsilon=\frac{\delta}{2N}$ و با توجه به $f_N\leq N$، آنگاه داریم:

$$\int_A f=\int_A f-f_N+\int_A f_N\leq\int_E f-f_N+\int_A f_N\leq \frac{\delta}{2}+Nm(A)<\frac{\delta}{2}+N\frac{\delta}{2N}=\delta$$

در نتیجه قضیه اثبات می شود.

که در آن $m(A)$ اندازه لبگ مجموعه A بوده و انتگرال به مفهوم لبگ [۱۱] محاسبه شده است.

قضیه۳) اگر تعریف کنیم: $I(\mu)=\int_\Omega f_1\,d\mu$ و $I_n(\mu)=\int_{\Omega_{\frac{1}{n}}} f_1\,d\mu$

آنگاه: $\lim_{n\to\infty}\inf_{Q_n} I_n(\mu)=\inf_{Q_n} I(\mu)$

که در آن $\Omega_{\frac{1}{n}}=[0,1-\frac{1}{n}]\times A\times U$ و $Q_n=\{\mu\in M^+(\Omega_{\frac{1}{n}})\}$ و μ در روابط (۱۷) صدق می‌کند.

اثبات :مرجع [۱۴].

با توجه به قضایای فوق در واقع فاصله انتگرال‌گیری را می‌توان بصورت $[0,1-\varepsilon]$ منظور کرد، که در آن ε یک عدد مثبت بسیار کوچک است. به این ترتیب حل مسأله کنترل بهینه با افق بینهایت با تقریب بسیار خوبی به حل یک مسأله کنترل بهینه با افق زمانی محدود ولی با حالت نهایی آزاد تبدیل می‌شود، که جهت رفع آن راه حل مناسبی ارائه‌خواهد شد. بنابراین با توجه به روابط حاصله اگر مسأله کنترل بهینه با افق بینهایت را نیز به فضای اندازه انتقال‌دهیم آنگاه مسأله کنترل بهینه با افق نامحدود با تقریب خوبی به حل مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر تبدیل می‌شود :

$$\min_{s.t}\mu(f)$$

$$\begin{aligned}&\mu(\phi^g)=\Delta\phi && \phi\in C'(B)\\&\mu(\psi_j)=0 && j=1,2,3,\dots,n,\psi\in D(J^{\cdot})\\&\mu(\theta_s)=a_s && \theta_s\in C_1(\Omega)\end{aligned} \qquad (۲۱)$$

با توجه به اینکه x_f آزاد می‌باشد، پس سمت راست معادله $\mu(\phi^g)=\Delta\phi$ نامعلوم بوده که جهت حل آن به صورت زیر عمل می‌شود.

روش حل: در این روش ابتدا حالت بهینه نهایی را بدست می‌آوریم، به این ترتیب چون حالت نهایی تعیین‌شده، مسأله تبدیل به مسأله کنترل

بهینه با افق زمانی محدود و حالت نهایی معلوم می‌شود، که قبلاً حل شده است[۲]. چون مسأله کنترل بهینه با افق زمانی بینهایت دارای جواب است، پس مقدار I در مسأله کنترل بهینه محدود بوده، و بنابراین انتگرال $\int_{t_a}^{\infty} f(x(t),u(t),t)\,dt$ همگرا است. پس لازم است که تابع داخل انتگرال۰ فوق در حد به سمت صفر میل کند:

$$\lim_{t\to\infty} f(x(t),u(t),t)=0$$

اگر $\lim_{t\to\infty} x(t)=x_f$ و $\lim_{t\to\infty} u(t)=u_f$ چون فرض شده حد توابع حالت و کنترل وجود دارند، و t_b یک عدد حقیقی بزرگ باشد. بنابراین:

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=x_f \Rightarrow \forall\delta>0\,\exists t_b:\forall t\ge t_b\ \left|x(t)-x_f\right|<\delta$$

بنابراین در حالت ماندگار تابع حالت مقداری ثابت است، لذا:

$$\lim_{t\to\infty}\dot{x}(t)=\lim_{t\to\infty} g(x,u,t)=0$$

پس در حالت حدی دستگاه غیرخطی زیر را داریم:

$$\begin{cases} f(x_f,u_f,t_b)=0 \\ g(x_f,u_f,t_b)=0 \end{cases}$$

با حل دستگاه فوق حالت بهینه نهایی تعیین می‌شود. چنانچه جواب دستگاه فوق یکتا نباشد، به ازاء هریک ازجوابها مسأله راحل کرده وحالتی که تابع معیار فوق کوچکترین باشد را انتخاب می‌کنیم و یا اینکه سعی شود تا حالت نهایی بگونه‌ای تعیین شود، که میزان انرژی مصرفی در حالت ماندگار که بیشترین مصرف انرژی در آن فاصله زمانی است، حداقل شود که در مسأله زیر منظور شده است:

$$\min_{s.t}\ u_f^2$$

$$f(x_f,u_f,t_b)=0$$

$$g(x_f,u_f,t_b)=0$$

البته توجه داریم که در مساله کنترل مقاوم ساختار سیستم ثابت با زمان است (t_b وجود ندارد) و برای هریک از مقادیر پارامتر باید مسأله فوق را حل کرد، یعنی

$$\min_{s.t}\ u_{f,i}^2$$

$$h(x_{f,i},u_{f,i},a_i)=1$$

$$g(x_{f,i},u_{f,i},a_i)=0$$

که در آن: $\lim_{t\to\infty} x_i(t)=x_{f,i}$ و $\lim_{t\to\infty} u_i(t)=u_{f,i}$ و چون فرض شده حد توابع حالت و کنترل برای همه مقادیر پارامتر وجود دارند باحل مسأله برنامه‌ریزی فوق وتعیین α_n می‌توان تابع قطعه‌ای ثابت کنترل را بدست آورد. جهت افزایش دقت، می‌توان تعداد توابع منتخب در قیدهای مسأله (۱۹) را افزایش داد واز طرف دیگر افرازهای U، A و J را ظریف‌تر انتخاب کرد. اگر $B_{i,j}$ فاصله زمانی باشد که x و u در افراز j ام و زمان در فاصله $t_{i-1}\le t\le t_i$ باشد، در حالت زمان پیوسته داریم [۲]:

$$B_{i,j}=[t_{i-1}+\sum_{l<j}k_{i,j}\qquad t_{i-1}+\sum_{l\le j}k_{i,j}]$$

که در آن:

$$\alpha_n=k_{i,j}\quad n=(i-1)s+j\ ,\ i=1,2,3,...,d\ ,\quad j=1,2,3,...,s$$

چنانچه شرایط فوق برای مسأله کنترل مقاوم برقرار باشد، می‌توان آنرا به فضای اندازه انتقال داد. به این ترتیب حل مسأله کنترل مقاوم با تقریب بسیار خوبی به حل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی و با متغیرهای محدود ولی بسیار زیاد نسبت به سایر مسائل، بصورت زیر تبدیل می‌شود :

$$\min_{s.t}\ I=\sum_{i=1}^{n}\mu(\left\| h(x,u,a_i)-y^*(t)\right\|^2)$$

$$\mu(\phi^g)=\Delta\phi\qquad \phi\in C'(B)$$

$$\mu(\psi_j)=0\quad j=1,2,3,...,n,\psi\in D(J^\circ)$$

$$\mu(\theta_s)=a_s\qquad \theta_s\in C_1(\Omega)\qquad(۲۳)$$

$$\mu(1-sign(y(t)-y_1(t)))=0$$

$$\mu(1-sign(y_2^p(t)-y(t)))=0$$

و یا با استفاده از روش دوم مسأله کنترل مقاوم بصورت زیر به یک مسئله بهینه‌سازی تبدیل می‌شود:

$$\max_{s.t}\ \alpha$$

$$\mu(\phi^g)=\Delta\phi\qquad \phi\in C'(B)$$

$$\mu(\psi_j)=0\qquad j=1,2,3,...,n,\psi\in D(J^\circ)\qquad(۲۴)$$

$$\mu(\theta_s)=a_s\qquad \theta_s\in C_1(\Omega)$$

$$\mu(J(a_i)+\gamma_i-\sigma)=\int_0^{\infty}\left|J(a_i)+\gamma_i-\sigma\right|dt=0$$

$$\mu(\gamma_i-\alpha-\beta_i)=\int_0^{\infty}\left|\gamma_i-\alpha-\beta_i\right|dt=0$$

اگر برای معادله دیفرانسیل iام اندازه بهینه را بصورت $\alpha_{i,k}$ در نظر بگیریم آنگاه:

$$\max\ \alpha=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\alpha.\alpha_{i,k}$$

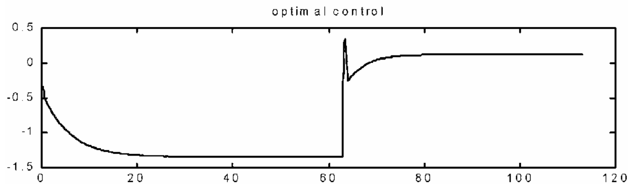
با توجه به تعریف معیار فوق مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی است و دو راه حل زیر را می‌توان پیشنهاد داد.

۱) α را مقداری کوچک گرفته ومسأله را حل کنیم با افزایش تدریجی آن می‌توان به جواب واقعی نزدیک شد.

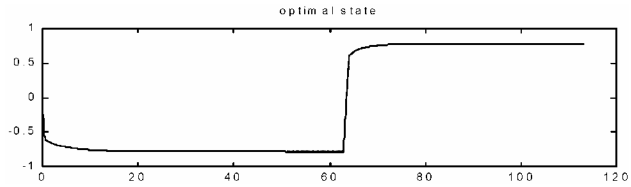
۲) با توجه به تعریفی که برای هدف داریم باید رابطه $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\alpha_{i,k}=n$ برقرار باشد، بنابراین می‌توان این رابطه را اعمال کرد یعنی هدف را فقط بصورت $\max\alpha$ در نظر بگیریم که در آن صورت مسأله برنامه‌ریزی خطی خواهیم داشت.

با حل مسأله فوق توابع $u_i(t)$ بدست که با استفاده از آنها با حل مسأله فوق توابع $u_i(t)$ بدست می‌آیند که با استفاده از آنها می‌توان توابع $x_i(t)$ و همچنین $y_i(t)$ و درنهایت توابع $e_i(t)=r(t)-y_i(t)$ را بدست آورد.

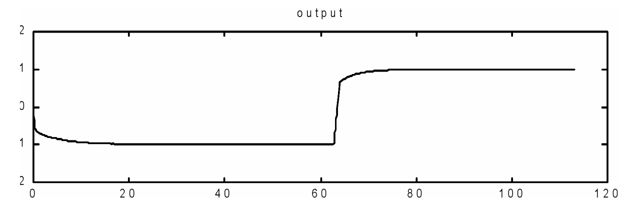
حال تعیین ضرائب تابع تبدیل مربوط به کنترل‌کننده می‌باشد که یک معادله دیفرانسیل خطی است. و باتوجه به اینکه ورودی و خروجی



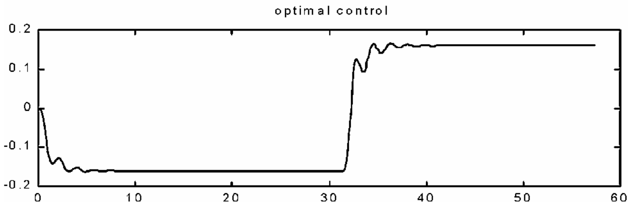
شکل ۱: تابع کنترل_مثال ۱.



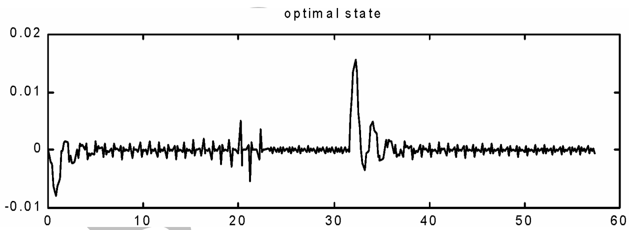
شکل ۲: تابع حالت_مثال ۱.



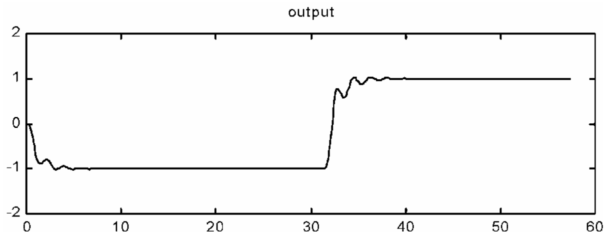
شکل ۳: پاسخ پله سیستم ـ مثال ۱.



شکل ۴: تابع کنترل ـ مثال ۲.



شکل ۵: تابع حالت ـ مثال ۲.



شکل ۶: پاسخ پله سیستم ـ مثال۲.

کنترل‌کننده مشخص‌اند به این ترتیب می‌توان کنترل‌کننده را با ضرائب و مرتبه بالا اعمال و با استفاده از شناسایی سیستمهای زمان پیوسته تابع تبدیل کنترل‌کننده را بدست آورد.

۴- مثالهای شبیه‌سازی

جهت تعیین کارایی الگوریتم‌های مورد بحث دو سیستم غیرخطی را در نظر گرفته و با طراحی کنترل‌کننده عملکرد مطلوب آن را خواهیم دید. ردیابی نسبتاً سریع، پاسخ حالت گذرای خوب و عدم وجود خطا در حالت ماندگار عملکرد قابل قبول الگوریتم رادر این حالت بیان می‌کند.

مثال۱) در این مثال سیستم دینامیکی غیرخطی به همراه پارامتر a در نظر گرفته و یک کنترل‌کننده PID را بااستفاده از روش اول بگونه‌ای تنظیم می‌شود که برای تمام مقادیر پارامتر ردیابی سیگنال ورودی که بصورت پله‌ای است، بشکل مطلوب انجام شود:

$$\dot{x}(t) = x(t)^{۲} - (۱+a)x(t)^{۳} + \sin(x(t)+u(t)), \quad ۰ \le a \le ۱$$

$$y(t) = x(t)^{۵} + \sin(x(t))$$

تابع تبدیل کنترل‌کننده پس از طراحی بصورت زیر است:

$$G_c(s) = ۱/۲۰۵۱ + \frac{۰/۱۳۰۲}{s} + ۰/۰۰۵۴\, s$$

مثال۲) در این مثال سیستم دینامیکی غیرخطی به همراه پارامتر a در نظر گرفته و یک کنترل‌کننده با استفاده از روش دوم به‌گونه‌ای طراحی می‌شود که برای تمام مقادیر پارامتر ردیابی سیگنال ورودی که بصورت پله‌ای است، بشکل مطلوب انجام شود:

$$\dot{x}(t) = x(t)^{۲} - (۱+a)x(t)^{۳} + \sin(۱۰x(t)) + u(t), \; ۴ \le a \le ۷$$

$$y(t) = (x(t)+u(t))^{۵} + \sin(x(t)+u(t))$$

تابع تبدیل کنترل‌کننده پس از طراحی بصورت زیر است:

$$G_c(s) = \frac{s+۰/۶۲}{s(s+۱/۱۴)(s+۰/۵۲۵)}$$

۵- نتیجه‌گیری

دراین مقاله از دو نگرش مختلف با استفاده از تئوری اندازه جهت طراحی کنترل‌کننده برای ردیابی مقاوم ورودی پله در سیستمهای غیر خطی و جهت تنظیم ضرایب کنترل‌کننده PID برای ردیابی مقاوم ورودی‌های پله‌ای در سیستمهای غیرخطی استفاده شد. در ابتدا مفهوم ردیابی مقاوم از دو دیدگاه کاملاً متفاوت به مسائل‌کنترل بهینه کنترل بهینه غیر خطی با افق بینهایت تبدیل شده و فاصله زمانی که در ابتدا یک مجموعه غیر فشرده می‌باشد، با تغییر متغیر مناسب به فاصله نگاشته می‌شود. سپس با بیان قضایای مربوطه مشکل فشرده نبودن فاصله زمانی رفع شد. آزاد بودن حالت نهایی نیز نکته دیگری است، که برای رفع آن قبل از حل مسأله برنامه‌ریزی خطی فو باید یک سری محاسبات جهت تعیین حالت بهینه نهایی انجام شود. سرانجام، با ارائه نتایج شبیه‌سازی توانمندی روش جهت ردیابی بهینه پله در سیستمهای غیرخطی، نشان داده شد.

مراجع

[1] D. A. Wilson and J. E. Rubio, "Existence of optimal control for the diffusion equation," *J. of Optimization Theory and Its Applications*, vol. 22, pp. 91-100, 1977.

[2] J. E. Robio, *Control and Optimization the Linear Treatment of Nonlinear Problems*, Manchester University Press, 1986.

[3] A. V. Kamyad, J. E. Rubio, and D. A. Wilson, "Optimal control of multidimensional diffusion," *J. of Optimization Theory and Applications*, vol. 70, pp. 191-209, 1991.

[4] M. H. Farahi, J. E. Rubio, and D. A. Wilson, "The optimal control of the linear wave equation," Int. J. Control, vol. 63, no. 5, pp. 833-848, 1995.

[5] J. E. Rubio, "The global control of nonlinear elliptic equations," *J. of Franklin Institute*, 330, pp. 29-35, 1993.

[6] A. P. Sage and C. White, *Optimum Systems Control*, Prentice-Hall, pp. 33-48, 1977.

[7] S. Effati, A. V. kamyad, and M. H. Farahi, "A new method for solving the nonlinear second order boundary value differential equations," *Korean J. Comput. & Appl. Math.*, vol. 7, no. 1, pp. 183-193, 2000.

[۸] آصف زارع، علی خاکی‌صدیق و علی وحیدیان کامیاد، "کاربرد تئوری اندازه در حل مسائل کنترل بهینه غیر خطی با افق بینهایت،" *مجموعه مقالات هشتمین کنفرانس مهندسی برق ایران*، دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۷۹.

[9] L. S. Pontryagin and V. G. Boltyanski, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Wiley Inter-science, New York, 1962

[۱۰] محمدرضا شاطریان، *کاربرد تئوری اندازه در کنترل بهینه سیستم‌های فشرده و پارامتر توزیعی*، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه فردوسی، ۱۳۷۳.

[11] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Mathematic University of Wisconsin, Madison, 1966.

[12] H. L. Royden, *Real Analysis*, Macmillan Company, New York, 1963.

[13] J. G. Ziegler and N. B. Nichols, "Optimum setting for automatic controllers," *Trans. ASME*, vol. 15, 1942.

[14] S. Effati, A. V. Kamyad, and R. A. Kamyabi-Gol, "The infinite-horizon optimal control problems," *Journal for Analysis and Its App.*, vol. 19, no. 1, pp. 269-278, 2000.

آصف زارع در سال ۱۳۷۰ دوره کارشناسی مهندسی برق گرایش الکترونیک را در دانشگاه صنعتی شریف به اتمام رساند و در سال ۱۳۷۳ مدرک کارشناسی ارشد خود را در گرایش کنترل از دانشگاه تهران اخذ نمود. ایشان دانشنامه دکتری خود را در سال ۱۳۸۰ در رشته مهندسی برق از دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات دریافت کرد. نامبرده مقاله‌های متعددی را در کنفرانسها و نشریات مختلف انتشار داده است.

او از سال ۱۳۷۹ تا ۱۳۸۱ به عنوان مدیر گروه مهندسی برق در دانشگاه آزاد اسلامی واحد گناباد مشغول به فعالیت بوده و از مهر ماه سال ۱۳۷۹ به عنوان معاون پژوهشی در واحد دانشگاهی مذکور مشغول به کار می‌باشد.

علی خاکی‌صدیق دانشنامه کارشناسی را در سال ۱۳۶۲ از دانشگاه نیوکاسل و دانشنامه‌های کارشناسی ارشد و دکتری را در رشته کنترل به ترتیب در سالهای ۱۳۶۴ و ۱۳۶۷ از دانشگاه‌های یومیست و سالفورد انگلستان اخذ کرد.

درحال حاضر ایشان به عنوان استاد و رئیس دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی به خدمت اشتغال دارد. فعالیت آموزشی ایشان شامل تدریس دروس مختلف مهندسی شامل سیستمهای کنترل خطی، سیستمهای کنترل مدرن و ریاضیات مهندسی در مقطع کارشناسی، و دروس سیستمهای کنترل دیجیتال، کنترل چند متغیره، کنترل بهینه، کنترل وفقی، کنترل مقاوم و ریاضیات مهندسی پیشرفته در مقاطع کارشناسی ارشد و دکتری کنترل است .

فعالیت پژوهشی نامبرده شامل هدایت پروژه‌های متعدد در دانشگاه و صنعت بوده است. زمینه‌های پژوهشی مورد علاقه ایشان در حال حاضر در عرصه نظریه کنترل مقاوم چند متغیره، کنترل وفقی، کنترل هوشمند (ژنتیک و شبکه‌های عصبی)، کاربردهای صنعتی کنترل، پیشیابی رفتار سیستم‌ها و تاریخ کنترل است. دکتر خاکی صدیق تاکنون شش کتاب تخصصی را به زبان فارسی به رشته تحریر درآورده است و بیش از یکصد مقاله علمی او در مجلات و مجموعه مقالات کنفرانسهای ملی و بین‌المللی انتشار یافته است. در تابستان ۱۳۸۱ ایشان مدت دو ماه را به عنوان استاد مدعو در دانشگاه برمن آلمان گذراند.

علی وحیدیان کامیاد شرح حال ایشان در زمان انتشار نشریه در دسترس نبود.