

# ارائه یک روش تحلیلی برای بررسی عملکرد دیکدینگ تکراری کدهای LDPC منظم در کانال‌های AWGN

حسین صمیمی، پائیز عزمی و محمد حکاک

پیاده‌سازی کرد، و با استفاده از کدهای LDPC می‌توان روی کانال‌های مختلف به حد شانون بسیار نزدیک شد [۴] و [۵]. یک ابزار مناسب برای توصیف کد استفاده از گراف می‌باشد. برای دیکدینگ کدهایی که با استفاده از گراف توصیف شده‌اند می‌توان از خانواده الگوریتم‌های انتقال پیام استفاده نمود. برای توصیف کدهای LDPC معمولاً از فاکتورگراف‌ها استفاده شده و دیکدر آنها با بکارگیری الگوریتم جمع-ضرب<sup>۳</sup> (SP) که عضوی از خانواده الگوریتم‌های انتقال پیام است، پیاده‌سازی می‌شود [۶].

ماهیت پیام‌های مبادله‌شده در الگوریتم‌های مبتنی بر انتقال پیام نقش مؤثری در عملکرد دیکدینگ تکراری دارد. در [۷] روشی با عنوان "رشد تدریجی چگالی" (DE)<sup>۴</sup> ارائه شده است که امکان بررسی و دنبال کردن توابع چگالی احتمال<sup>۵</sup> (PDF) پیام‌های رد و بدل شده در هر مرحله از دیکدینگ تکراری را فراهم می‌کند. در کدهای LDPC و هنگام استفاده از الگوریتم SP، پیام‌های مبادله‌شده دارای فرم بسته‌ای می‌باشند که این امر انجام محاسبات مربوط به روش DE را مقدور می‌سازد. با داشتن تابع چگالی احتمال پیام اولیه که از کانال دریافت می‌شود و بکارگیری روش DE می‌توان PDF پیام‌های رد و بدل شده در هر مرحله از دیکدینگ تکراری را برای حالتی که طول کلمات کد بسیار بزرگ باشد، تعیین کرد و با استفاده از آن، احتمال خطا را در هر مرحله از دیکدینگ محاسبه نمود. از روش DE می‌توان به عنوان ابزار تست همگرایی دیکدر استفاده کرد، به عبارتی می‌توان به ازای یک سری شرایط مفروض برای کانال (مثلاً سطح نویز مشخصی در کانال AWGN) و به ازای پارامترهای مشخصی برای کد، همگراشدن دیکدر به احتمال خطای صفر را بررسی نموده و پارامتر آستانه نویز را برای آن کد تعیین کرد. حد آستانه نویز در کانال AWGN عبارتست از بیشترین مقدار سطح نویز کانال ( $\sigma_n^*$ ) که به ازای آن نرخ خطا با افزایش نامحدود تعداد تکرارهای فرآیند دیکدینگ، به سمت صفر میل نماید [۷]. استفاده از روش DE برای تحلیل کدهای LDPC نیاز به محاسبات بسیار پیچیده و مفصل دارد. برای گریز از حجم محاسباتی روش‌های تحلیلی مذکور، می‌توان از مدل‌های تقریبی برای توزیع چگالی احتمال پیام‌های مبادله‌شده در الگوریتم SP استفاده کرد. در [۸] با استفاده از تقریب گوسی برای مدل کردن پیام‌های مبادله‌شده در الگوریتم SP، روشی برای بررسی کارایی دیکدینگ تکراری کدهای LDPC ارائه و به کمک آن سطح آستانه نویز محاسبه شده است. مقایسه نتایج حاصل از تقریب گوسی با نتایج تحلیلی موجود در [۷]، دقت خوب و کافی مدل گوسی را نشان می‌دهد.

در این مقاله روش تقریبی جدیدی برای محاسبه پارامترهای آماری مدل گوسی ارائه شده که ضمن برخورداری از دقت کافی، بسیار ساده بوده

چکیده: هدف از نگارش این مقاله ارائه یک روش تحلیلی برای بررسی عملکرد فرآیند دیکدینگ تکراری کدهای LDPC هنگام استفاده از الگوریتم انتقال پیام می‌باشد. پیام‌های مبادله‌شده در الگوریتم انتقال پیام را می‌توان به صورت متغیرهای تصادفی با توزیع گوسی مدل نمود. در این مقاله روش تقریبی جدیدی برای محاسبه پارامترهای آماری این متغیرهای گوسی پیشنهاد شده است. بر مبنای روش پیشنهادی، روابط تحلیلی مناسبی به فرم بسته توسعه یافته‌اند و به کمک آنها یک مدل تحلیلی برای بررسی فرآیند دیکدینگ تکراری کدهای LDPC پیام ارائه شده است. مدل پیشنهادی ابزار مناسبی برای تحلیل فرآیند دیکدینگ کدهای LDPC است و می‌توان از آن جهت تعیین پارامتر آستانه نویز، بررسی نحوه انتشار خطا و نیز بررسی همگرایی دیکدینگ تکراری استفاده نمود. مقایسه نتایج حاصل از بکارگیری مدل تحلیلی پیشنهادی با نتایج حاصل از روش‌های موجود، نشان‌دهنده آن است که روش پیشنهادی با حجم محاسباتی قابل قبول به دقتی بیش از روش‌های موجود دست می‌یابد.

**کلید واژه:** کدهای LDPC، دیکدینگ تکراری، مدل گوسی، الگوریتم جمع-ضرب، آستانه نویز.

## ۱- مقدمه

ظرفیت کانال یکی از مفاهیم اساسی در مخابرات است و یک حد بالا برای نرخ ارسال اطلاعات با احتمال خطای به میزان دلخواه کوچک تعیین می‌نماید. یکی از مسائل اصلی در تئوری کدینگ نحوه نزدیک شدن به ظرفیت کانال است. شانون<sup>۱</sup> نشان داده است که با استفاده از روش کدینگ تصادفی می‌توان به ظرفیت کانال دست یافت [۱]. تئوری شانون عرصه تحقیقاتی وسیعی را برای یافتن شماهای کدینگ مناسبی که امکان نزدیک شدن به ظرفیت کانال را فراهم نمایند، ایجاد نموده است. کشف مجدد کدهای LDPC<sup>۲</sup> [۲] - پس از آنکه نخستین بار در [۳] معرفی شدند - و نیز بکارگیری الگوریتم دیکدینگ تکراری برای آنها یکی از بارزترین نتایج حاصل از این تحقیقات می‌باشد. کدهای LDPC خواص منحصر به فردی دارند: ساختار آنها را می‌توان به طور ساده‌ای توصیف نمود، الگوریتم دیکدینگ آنها را می‌توان به صورت موازی

این مقاله در تاریخ ۸ بهمن ماه ۱۳۸۴ دریافت و در تاریخ ۶ خرداد ماه ۱۳۸۵ بازنگری شد.

حسین صمیمی، مرکز تحقیقات مخابرات ایران، خیابان کارگر شمالی، تهران، ایران، صندوق پستی ۱۴۱۵۵-۳۹۶۱ ۱۶۸۴۶ (email: samimi@itrc.ac.ir).  
پائیز عزمی، گروه مخابرات، دانشکده فنی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران، کدپستی ۱۶۸۴۴ (email: Pazmi@modares.ac.ir).  
محمد حکاک، گروه مخابرات، دانشکده فنی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران، کدپستی ۱۶۸۴۴ (email: m\_Hakak@modares.ac.ir).

3. Sum-Product  
4. Density Evolution  
5. Probability Distribution Function

1. Shannon  
2. Low Density Parity Check

و از حجم محاسباتی بسیار کمی برخوردار می‌باشد. مزیت روش پیشنهادی در مقایسه با روش مورد استفاده در [۸]، فرم مناسب و بسته روابط تقریبی حاصل از آن است. با استفاده از این مزیت، در این مقاله یک مدل تحلیلی به فرم بسته برای بررسی نحوه انتشار خطا در دیکدر LDPC ارائه شده است. از مدل پیشنهادی می‌توان برای بررسی کارایی دیکدینگ تکراری و نیز تعیین حد آستانه نویز کدهای LDPC روی کانال AWGN استفاده نمود. همچنین مدل پیشنهادی در این مقاله می‌تواند به عنوان یک ابزار مناسب برای تست همگرایی دیکدر تکراری در کانال‌های AWGN مورد استفاده قرار گیرد. مقایسه نتایج حاصل از بکارگیری مدل پیشنهادی با نتایج دقیق ارائه شده در [۷]، نشان‌دهنده دقت خوب و کافی مدل ارائه شده می‌باشد.

۲- توصیف کدهای LDPC با استفاده از فاکتورگراف

کدهای LDPC را می‌توان با استفاده از فاکتورگراف توصیف نمود [۶]. فاکتورگراف شامل دو مجموعه گره به نام گره‌های بیت (BN) و گره‌های چک (CN) بوده و گره‌های موجود در هر مجموعه صرفاً می‌توانند توسط لینک‌هایی به گره‌هایی از مجموعه دیگر متصل گردند. اگر ماتریس پرتی-چک  $(H)$  کد دارای  $M$  سطر و  $N$  ستون باشد، فاکتورگراف متناظر دارای  $N$  گره از نوع BN و  $M$  گره از نوع CN خواهد بود. هر BN متناظر با یک بیت از کلمه کد و هر CN متناظر با یک معادله پرتی-چک از کد می‌باشد. اگر در ماتریس  $H$  مؤلفه  $h_{i,j} = 1$  باشد،  $BN_j$  توسط لینکی به  $CN_i$  متصل شده و اصطلاحاً  $BN_j$  و  $CN_i$  را همسایه یکدیگر می‌گویند. تعداد لینک‌های متصل به هر گره، درجه آن گره نامیده می‌شود. در کدهای LDPC منظم درجه تمام گره‌های موجود در یک مجموعه با هم برابر است؛ در غیر اینصورت کد نامنظم نامیده می‌شود. اگر درجه تمام BNها برابر  $j$  و درجه تمام CNها برابر  $k$  باشد، کد LDPC منظم با نماد  $(j, k)$  نمایش داده می‌شود.

$$q_i = \log \frac{p(z|x=+1)}{p(z|x=-1)} = \frac{2}{\sigma_n^2} z \quad (1)$$

با توجه به رابطه فوق، پیام دریافتی از کانال یک متغیر تصادفی گوسی با متوسط  $\mu_q = 2/\sigma_n^2$  و واریانس  $\sigma_q^2 = 4/\sigma_n^2$  می‌باشد. نتایج فوق نشان می‌دهند که برابری  $\sigma_q^2 = 2\mu_q$  برقرار است و تحت این شرایط توزیع گوسی متقارن نامیده می‌شود [۷]. یک توزیع گوسی متقارن را می‌توان صرفاً با یک متغیر (مثلاً میانگین) مشخص نمود.

۳- دیکدینگ کدهای LDPC منظم با استفاده از الگوریتم SP

الگوریتم SP یک راه‌حل مناسب برای حل مسأله دیکدینگ با معیار MAP روی فاکتورگراف کد است [۶]. در صورتیکه فاکتورگراف کد بدون حلقه باشد، دیکدر پیاده‌سازی شده با استفاده از الگوریتم SP بهینه است؛ در غیر این صورت و تحت شرایطی که فاکتورگراف کد دارای حلقه باشد، دیکدر پیاده‌سازی شده زیر بهینه خواهد بود. الگوریتم SP روی گراف‌های حلقه‌دار نیز دارای عملکرد بسیار مناسبی می‌باشد؛ در نتیجه در اکثر تحلیل‌های ارائه شده برای بررسی عملکرد دیکدرهای LDPC با استفاده از الگوریتم SP، از اثر حلقه‌ها صرف‌نظر شده است [۴]، [۵]، [۷] و [۸]. تحت این شرایط پیام‌های دریافتی در هر گره از فاکتورگراف، مستقل از یکدیگر خواهند بود. پیام‌های مبادله شده در دیکدر LDPC از نوع LLR<sup>f</sup> بوده و می‌توان آنها را به سه دسته تقسیم کرد:

الف: پیام اولیه که توسط هر BN از کانال دریافت می‌شود  $(q_i)$ : با فرض وجود شرایط تقارن در دیکدر و کانال [۸]، عملکرد دیکدر مستقل از کلمه کد ارسالی است؛ لذا می‌توان با فرض استفاده از مدولاسیون BPSK

ج: پیام ارسالی از هر CN به BNهای همسایه  $(r)$ : هر CN از  $k$  همسایه خود پیام‌هایی را دریافت کرده، آنها را طبق یک قاعده خاص پردازش نموده و نتیجه حاصل را به شکل یک پیام  $r$  به صورت لینک‌های ارتباطی موجود برای آنها ارسال می‌کند. پیام  $r$  به صورت  $r = \log\{p(x=0|t)/p(x=1|t)\}$  توصیف می‌شود که در آن  $x$  مشخص‌کننده مقدار بیت متناظر با BN بوده و  $t$  معرف تمام پیام‌های دریافتی از طریق لینک‌های متصل به BN به استثنای لینکی که قرار است پیام  $q$  روی آن ارسال شود، می‌باشد.

د: پیام ارسالی از هر CN به BNهای همسایه  $(r)$ : هر CN از  $k$  همسایه خود پیام‌هایی را دریافت کرده، آنها را طبق یک قاعده خاص پردازش نموده و نتیجه حاصل را به شکل یک پیام روی لینک‌های ارتباطی موجود برای آنها ارسال می‌کند. پیام  $r$  به صورت  $r = \log\{p(x=0|v)/p(x=1|v)\}$  توصیف می‌شود که در آن  $v$  معرف تمام پیام‌های دریافتی از طریق لینک‌های متصل به CN موردنظر به استثنای لینکی که قرار است پیام  $r$  روی آن ارسال شود، می‌باشد. پیامی که از هر گره برای یک گره همسایه روی لینک ارتباطی ارسال می‌شود تابعی از پیام‌های دریافتی از سایر گره‌های همسایه است. در الگوریتم SP قواعدی که در BNها و CNها برای پردازش پیام‌های ورودی و تولید پیام خروجی استفاده می‌شود به شرح زیر می‌باشند [۸]:

الف: اگر  $q$  پیام ارسالی از BN باشد آنگاه

$$q = q_i + \sum_{i=1}^{j-1} r_i \quad (2)$$

که در آن  $q_i$  پیام دریافتی از کانال بوده و  $r_i$  ها  $(i=1, 2, \dots, j-1)$  پیام‌های LLR دریافتی از CNهای همسایه به استثنای CNای که پیام  $q$  برای آن ارسال می‌شود، می‌باشند.

ب: اگر  $r$  پیام ارسالی از CN باشد، آنگاه می‌توان ملاحظه نمود [۸]

$$\tanh\left(\frac{r}{\gamma}\right) = \prod_{i=1}^{j-1} \tanh\left(\frac{q_i}{\gamma}\right) \quad (3)$$

که در آن  $q_i$  ها پیام‌های LLR دریافتی از BNهای همسایه به استثنای آن BN که پیام  $r$  برای آن ارسال می‌شود، می‌باشند. مقادیر  $r$  هنگام شروع الگوریتم به مقدار صفر تنظیم می‌شوند؛ بنابراین در مرحله اول الگوریتم و با توجه به (۲)، پیام‌های ارسالی از BNها به سمت CNها تنها شامل پیام‌های دریافتی از کانال می‌باشند. تصمیم‌گیری با معیار MAP برای هر BN (یعنی برای هر بیت از دنباله کد) بر مبنای همه اطلاعات دریافتی از گره‌های همسایه و طبق قاعده زیر صورت می‌گیرد

## ۲- توصیف کدهای LDPC با استفاده از فاکتورگراف

کدهای LDPC را می‌توان با استفاده از فاکتورگراف توصیف نمود [۶]. فاکتورگراف شامل دو مجموعه گره به نام گره‌های بیت (BN) و گره‌های چک (CN) بوده و گره‌های موجود در هر مجموعه صرفاً می‌توانند توسط لینک‌هایی به گره‌هایی از مجموعه دیگر متصل گردند. اگر ماتریس پرتی-چک  $(H)$  کد دارای  $M$  سطر و  $N$  ستون باشد، فاکتورگراف متناظر دارای  $N$  گره از نوع BN و  $M$  گره از نوع CN خواهد بود. هر BN متناظر با یک بیت از کلمه کد و هر CN متناظر با یک معادله پرتی-چک از کد می‌باشد. اگر در ماتریس  $H$  مؤلفه  $h_{i,j} = 1$  باشد،  $BN_j$  توسط لینکی به  $CN_i$  متصل شده و اصطلاحاً  $BN_j$  و  $CN_i$  را همسایه یکدیگر می‌گویند. تعداد لینک‌های متصل به هر گره، درجه آن گره نامیده می‌شود. در کدهای LDPC منظم درجه تمام گره‌های موجود در یک مجموعه با هم برابر است؛ در غیر اینصورت کد نامنظم نامیده می‌شود. اگر درجه تمام BNها برابر  $j$  و درجه تمام CNها برابر  $k$  باشد، کد LDPC منظم با نماد  $(j, k)$  نمایش داده می‌شود.

## ۳- دیکدینگ کدهای LDPC منظم با استفاده از الگوریتم SP

الگوریتم SP یک راه‌حل مناسب برای حل مسأله دیکدینگ با معیار MAP روی فاکتورگراف کد است [۶]. در صورتیکه فاکتورگراف کد بدون حلقه باشد، دیکدر پیاده‌سازی شده با استفاده از الگوریتم SP بهینه است؛ در غیر این صورت و تحت شرایطی که فاکتورگراف کد دارای حلقه باشد، دیکدر پیاده‌سازی شده زیر بهینه خواهد بود. الگوریتم SP روی گراف‌های حلقه‌دار نیز دارای عملکرد بسیار مناسبی می‌باشد؛ در نتیجه در اکثر تحلیل‌های ارائه شده برای بررسی عملکرد دیکدرهای LDPC با استفاده از الگوریتم SP، از اثر حلقه‌ها صرف‌نظر شده است [۴]، [۵]، [۷] و [۸]. تحت این شرایط پیام‌های دریافتی در هر گره از فاکتورگراف، مستقل از یکدیگر خواهند بود. پیام‌های مبادله شده در دیکدر LDPC از نوع LLR<sup>f</sup> بوده و می‌توان آنها را به سه دسته تقسیم کرد:

الف: پیام اولیه که توسط هر BN از کانال دریافت می‌شود  $(q_i)$ : با فرض وجود شرایط تقارن در دیکدر و کانال [۸]، عملکرد دیکدر مستقل از کلمه کد ارسالی است؛ لذا می‌توان با فرض استفاده از مدولاسیون BPSK

1. Bit Nodes
2. Check Nodes
3. Parity-Check
4. Log Likelihood Ratio

است؛ لذا در توزیع پیام  $r$  کشیدگی به سمت مبدأ وجود دارد که باعث دورشدن توزیع از فرم گوسی خصوصاً در مراحل اولیه اجرای الگوریتم دیکدینگ می‌شود [۹].

یکی از ویژگی‌های الگوریتم SP حفظ خاصیت تقارن در حین مراحل اجرای الگوریتم می‌باشد؛ به عبارت دیگر اگر توزیع پیام‌های اولیه متقارن باشند (مانند پیام  $q$  در کانال AWGN)، توزیع کلیه پیام‌های مبادله‌شده در الگوریتم (یعنی توزیع پیام‌های  $q$  و  $r$ ) نیز متقارن خواهند بود [۷]. در نتیجه هنگام استفاده از تقریب گوسی، پیام‌های  $q$  و  $r$  نیز دارای توزیع گوسی متقارن با شرایط  $\sigma_q^2 = 2\mu_q$  و  $\sigma_r^2 = 2\mu_r$  خواهند بود و لذا می‌توان آنها را با یک پارامتر (مثلاً میانگین) مشخص نمود. این واقعیت یکی از مزایای بکارگیری تقریب گوسی در بررسی عملکرد دیکدر LDPC است، چرا که کافی است فقط نحوه تغییرات یک پارامتر در مراحل اجرای الگوریتم دنبال شود. با توجه به توضیحات فوق و هنگام استفاده از تقریب گوسی، پیام‌های  $q$  متغیرهای تصادفی iid با توزیع  $N(\mu_q, 2\mu_q)$  و پیام‌های  $r$  نیز متغیرهای تصادفی iid با توزیع  $N(\mu_r, 2\mu_r)$  خواهند بود. با استفاده از (۲) می‌توان میانگین پیام  $q$  را در مرحله  $l$  از اجرای الگوریتم به صورت  $\mu_q^{(l)} = \mu_q + (j-1)\mu_r^{(l-1)}$  محاسبه نمود که در آن اندیس  $l$  نشان‌دهنده مرحله  $l$ م اجرای الگوریتم می‌باشد. برای محاسبه میانگین پیام  $r$  می‌توان از طرفین (۳) متوسط‌گیری نمود. در اینصورت خواهیم داشت

$$E[\tanh(\frac{r}{\gamma})] = E[\tanh(\frac{q_i}{\gamma})]^{k-1} \quad (7)$$

با توجه به اینکه  $r$  دارای توزیع است،  $N(\mu_r, 2\mu_r)$  می‌توان نوشت

$$E[\tanh(\frac{r}{\gamma})] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_r}} \int_{-\infty}^{\infty} \tanh(\frac{r}{\gamma}) e^{-\frac{(r-\mu_r)^2}{2\mu_r}} dr \quad (8)$$

در [۸] با کران‌های بالا و پائین برای عبارت موجود در سمت راست (۸)، روشی برای محاسبه  $E[\tanh(r/\gamma)]$  و تعیین میانگین پیام  $r$  ارائه شده است.

#### ۵- ارائه یک روش تقریبی جدید برای محاسبه پارامترهای مدل گوسی

در این مقاله روش تقریبی جدیدی برای محاسبه  $E[\tanh(r/\gamma)]$  پیشنهاد شده است که دارای حجم محاسباتی بسیار کمی بوده و منجر به روابط بسته مناسبی می‌گردد. این روش بر مبنای لم زیر استوار است:

لم [۱۰]: اگر  $f(x)$  تابع پیوسته و حقیقی از متغیر تصادفی  $x$  (با میانگین  $\mu$  و واریانس  $\sigma^2$ ) باشد، آنگاه

$$E[f(x)] \approx \frac{2}{3} f(\mu) + \frac{1}{6} f(\mu + \sqrt{3}\sigma) + \frac{1}{6} f(\mu - \sqrt{3}\sigma) \quad (9)$$

با استفاده از (۹) برای محاسبه  $E[\tanh(r/\gamma)]$  و با توجه به اینکه میانگین و واریانس متغیر تصادفی  $r/\gamma$  به ترتیب برابر  $\mu_r/2$  و  $\sigma_r^2/4 = \mu_r/2$  می‌باشند، می‌توان نوشت

$$E[\tanh(\frac{r}{\gamma})] \approx \frac{2}{3} \tanh(\frac{\mu_r}{\gamma}) + \frac{1}{6} \tanh(\frac{\mu_r}{\gamma} + \sqrt{\frac{3\mu_r}{\gamma}}) + \frac{1}{6} \tanh(\frac{\mu_r}{\gamma} - \sqrt{\frac{3\mu_r}{\gamma}}) = H(\mu_r) \quad (10)$$

رابطه (۱۰) نشان می‌دهد که با استفاده از روش پیشنهادی، یک عبارت تحلیلی به فرم بسته برای محاسبه  $E[\tanh(r/\gamma)]$  حاصل می‌گردد که

$$\hat{x} = \begin{cases} 1 & \text{if } \sum_{CN_i \in n(BN)} r_i \geq 0 \\ 0 & \text{if } \sum_{CN_i \in n(BN)} r_i \leq 0 \end{cases} \quad (4)$$

که در آن  $n(BN)$  مجموعه تمام همسایه‌های گره BN می‌باشد.

اگر فاکتورگراف کد بدون حلقه باشد؛ با استفاده از قواعد فوق و بعد از چند بار تکرار الگوریتم SP، مقادیر دقیق LLR مربوط به بیت‌های کلمه کد در BN‌ها تولید شده و با تکرار الگوریتم تغییری نخواهند نمود و الگوریتم پایان خواهد یافت. در صورتیکه فاکتورگراف کد دارای حلقه باشد، یک فرآیند دیکدینگ تکراری با تعداد مراحل نامحدود به وجود خواهد آمد و برای پایان‌دادن به کار دیکدر باید معیارهایی چون بیشترین تعداد تکرار یا رسیدن به احتمال خطای دلخواه را در نظر گرفت. برای مقایسه عملکرد دیکدرهای مبتنی بر الگوریتم SP از معیار احتمال خطای پیام استفاده می‌شود. با توجه به فرض ارسال کلمه کد تمام یک، پیام‌های LLR منفی ارسالی از BN معرف خطا بوده و پیام‌های LLR مثبت نشان‌دهنده عدم وقوع خطا می‌باشند. برای محاسبه احتمال خطای پیام می‌توان از تابع چگالی احتمال پیام‌های  $q$  استفاده نمود. چون  $q$  و  $r_i$ ‌ها در (۳) متغیرهای تصادفی مستقل هستند، تابع چگالی احتمال  $q$  از کانولوشن توابع چگالی مؤلفه‌های موجود در (۳) به دست می‌آید. برای سادگی می‌توان محاسبات را در حوزه فوریه انجام داد. اگر  $p$  معرف تابع چگالی پیام بوده و  $p_i$ ،  $q$ ، و  $r_i$  به ترتیب مشخص‌کننده توابع چگالی پیام‌های  $q$  و  $r$  پس از  $l$  مرتبه تکرار الگوریتم باشند، می‌توان نوشت

$$p_l = F^{-1}(F(p))(F(r_{l-1}))^{j-1} \quad (5)$$

که در آن  $F$  نشان‌دهنده اپراتور تبدیل فوریه است. مقدار  $r_l(l)$  در شروع الگوریتم به مقدار یک تنظیم می‌شود. با استفاده از  $p_l$  که از (۵) و با بکارگیری روش DE محاسبه می‌شود، می‌توان احتمال ارسال پیام‌های ناصحیح ( $p_l'$ ) را در مرحله  $l$ م از دیکدینگ تکراری از رابطه زیر حساب کرد [۷]

$$P_e^l = \int_{-\infty}^{\infty} p_l(z) dz \quad (6)$$

#### ۴- استفاده از تقریب گوسی برای بررسی عملکرد دیکدر LDPC بر مبنای الگوریتم SP

محاسبات مربوط به روش DE برای تعیین احتمال خطای پیام ( $p_e'$ ) بسیار مفصل می‌باشد. برای گریز از این حجم محاسباتی بالا می‌توان پیام‌های مبادله‌شده در الگوریتم SP را به صورت متغیرهای تصادفی گوسی مدل نمود. اگرچه پیام‌های اولیه دریافتی از کانال دارای توزیع گوسی می‌باشند، ولی پس از دریافت این پیام‌ها توسط BN‌ها و مبادله آنها با CN‌ها، توزیع پیام‌ها تغییر خواهد کرد؛ البته نتایج تحلیل‌های ارائه‌شده در [۸] نشان می‌دهند که پیام‌های  $q$  و  $r$  را می‌توان با دقت خوبی به صورت متغیرهای گوسی مدل نمود.

همانگونه که قبلاً اشاره شد، با صرف‌نظر از تأثیر حلقه‌ها در فاکتورگراف کد، پیام‌های دریافتی در گره‌های فاکتورگراف مستقل از یکدیگر می‌باشند؛ لذا با توجه به (۲) و قضیه حد مرکزی، توزیع پیام  $q$  به سمت یک توزیع گوسی میل خواهد نمود. نتایج شبیه‌سازی‌های انجام شده نیز نشان‌دهنده دقت خوب تقریب پیام  $q$  به صورت یک متغیر گوسی می‌باشد. البته استفاده از تقریب گوسی برای مدل‌نمودن پیام  $r$  از چنین دقتی برخوردار نیست. رابطه (۳) نشان می‌دهد که اندازه پیام ارسالی  $r$  از هر CN، کوچکتر از اندازه هر یک از پیام‌های دریافتی در این گره

با توجه به اینکه هنگام شروع الگوریتم پیام  $q$  تنها شامل پیام دریافتی از کانال ( $q$ ) است، لذا مقدار اولیه احتمال خطا مورد نیاز در (۱۶) برابر  $P_e = Q(\sqrt{\mu_q}/\sqrt{2})$  خواهد بود. با تعریف تابع  $f(x)$  به صورت زیر

$$f(x) = Q\left(\sqrt{\frac{\mu_q + (j-1)H^{-1}((H(\nu(Q^{-1}(x)))^{\nu})^{k-1}))}{2}}\right) \quad (17)$$

(۱۶) را می‌توان چنین نوشت

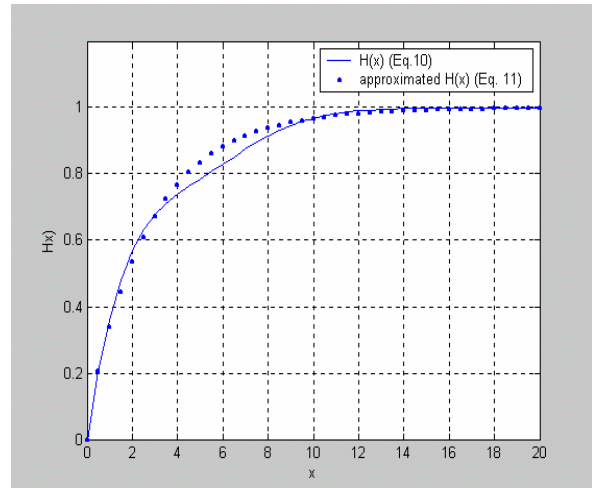
$$\begin{cases} P_e^l = f(P_e^{l-1}) : l \geq 1 \\ P_e^0 = Q\left(\sqrt{\frac{\mu_q}{2}}\right) \end{cases} \quad (18)$$

رابطه (۱۸) در واقع یک مدل تحلیلی به فرم بسته است که نحوه انتشار خطا در دیکدر LDPC را در هر مرحله تکرار الگوریتم SP مشخص می‌کند. با استفاده از این مدل می‌توان ضمن محاسبه حد آستانه نویز، نگرش خوبی از نحوه همگرایی دیکدر تکراری به دست آورد. با استفاده از (۱۸) احتمال خطای مرحله قبل به عنوان ورودی ( $P_{in}^l$ ) به دیکدر وارد شده و دیکدر با استفاده از نگاشت غیرخطی  $P_e^l = f(P_e^{l-1})$  احتمال خطای خروجی ( $P_{out}^l$ ) را تولید می‌نماید. به عبارت دیگر، هر مرحله از دیکدینگ تکراری به مثابه سیستمی با تابع ورودی-خروجی  $P_{out} = f(P_{in})$  عمل می‌نماید.

با توجه به تعریف تابع  $f(x)$  به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که  $x=0$  یک نقطه ثابت این تابع است، یعنی  $f(0)=0$  می‌باشد. در نتیجه مدل تحلیلی ارائه شده در (۱۸) دارای حداقل یک نقطه ثابت در احتمال خطای صفر می‌باشد؛ به عبارت دیگر دیکدر می‌تواند به احتمال خطای صفر همگرا گردد. اگر رابطه برگشتی (۱۸) دارای نقطه ثابت دیگری غیر از صفر باشد، آنگاه دیکدر ممکن است به مقدار بزرگتر از صفر همگرا گردد. با استفاده از این واقعیت می‌توان همگرایی دیکدر تکراری LDPC را بررسی نمود. برای تست همگرایی کافی است تابع  $P_e^l = f(P_e^{l-1})$  همراه با نیمساز ربع اول و سوم ( $P_{out} = P_{in}$ ) در یک دستگاه مختصات رسم شده و وضعیت آنها نسبت به همدیگر سنجیده شود. در صورتی که این دو منحنی فقط در مبدأ همدیگر را قطع نمایند، دیکدر تحت شرایط کانال مورد بررسی، فقط می‌تواند به احتمال خطای صفر همگرا شود؛ در غیر این صورت دیکدر به احتمال خطایی بزرگتر از صفر همگرا خواهد شد. سطح نویزی در کانال AWGN که یا از آن دو منحنی فوق بر هم مماس شوند مشخص کننده حد آستانه نویز در کانال خواهد بود.

## ۷- نتایج

در این بخش به ارائه نمونه‌هایی از کاربرد روش پیشنهادی در بررسی عملکرد دیکدینگ تکراری کدهای LDPC منظم در کانال‌های AWGN پرداخته شده است. در شکل ۲ به عنوان یک نمونه تابع چگالی توزیع پیام‌های  $q$  مربوط به یک کد LDPC (۳,۶) منظم در کانال AWGN با  $\sigma = 0.8$ ، در طی چهار مرحله اولیه از اجرای الگوریتم SP و با استفاده از روابط تحلیلی ارائه شده در این مقاله نشان داده شده است. در هر مرحله می‌توان احتمال خطای حاصل را محاسبه کرد و بدین ترتیب آزمایش کرد که آیا با افزایش تعداد تکرارها احتمال خطا به سمت صفر میل می‌کند و یا به مقدار ثابتی بزرگتر از صفر همگرا می‌شود. با تغییر شرایط کانال و اجرای الگوریتم فوق می‌توان حد آستانه نویز را برای کد موردنظر تعیین نمود. این روش در واقع روش DE بر مبنای تقریب گوسی است. در جدول ۱ نتایج حاصل از تعیین حد آستانه نویز کدهای LDPC (۳,۶) منظم برای  $k = 6, 9, 12, 15$  ارائه شده است. با توجه به مقادیر ارائه شده،



شکل ۱: تابع  $H(x)$  و تقریب آن با استفاده از (۱۱).

این امر مزیت روش پیشنهادی در این مقاله نسبت به روش مورد استفاده در [۸] بوده و ارائه روابط تحلیلی برای بررسی عملکرد دیکدر را تسهیل می‌نماید. در شکل ۱ یک روش تقریب  $H(x)$  با استفاده از رابطه

$$H(x) \approx \tanh\left(\frac{x}{3}\right) \quad (11)$$

نشان داده شده است.

استفاده از (۱۱) امکان ارائه روابط تحلیلی به فرم مناسب و بسته را فراهم می‌کند. با استفاده از  $H(x)$  می‌توان میانگین پیام  $q$  را در مرحله  $l$  از اجرای الگوریتم چنین بیان نمود

$$H(\mu_r^l) = (H(\mu_q^l))^{k-1} \quad (12)$$

و از آنجا میانگین پیام‌های  $r$  در مرحله  $l$  از دیکدینگ تکراری به صورت زیر محاسبه می‌گردد

$$\mu_r^l = H^{-1}\{H(\mu_q^l)^{k-1}\} \quad (13)$$

## ۶- ارائه مدل تحلیلی برای بررسی نحوه انتشار خطا در دیکدر LDPC

مزیت روابط تقریبی ارائه شده در بخش قبل این است که می‌توان با استفاده از آنها مدلی تحلیلی برای بررسی نحوه انتشار خطا در دیکدر LDPC بر مبنای الگوریتم SP ارائه کرد. با معین بودن  $\mu_q^l$  در مرحله  $l$  از دیکدینگ تکراری می‌توان نرخ خطای پیام را با رابطه زیر تقریب نمود

$$p_e^l \approx Q\left(\sqrt{\frac{\mu_q^l}{2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{\mu_q + (j-1)\mu_r^{(l-1)}}{2}}\right) \quad (14)$$

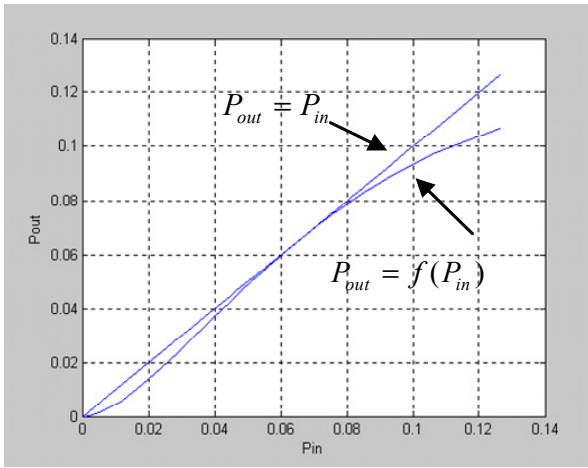
و از آنجا با استفاده از (۱۳) می‌توان نوشت

$$p_e^l = Q\left(\sqrt{\frac{\mu_q + (j-1)H^{-1}\{H(\mu_q^{l-1})^{k-1}\}}{2}}\right) \quad (15)$$

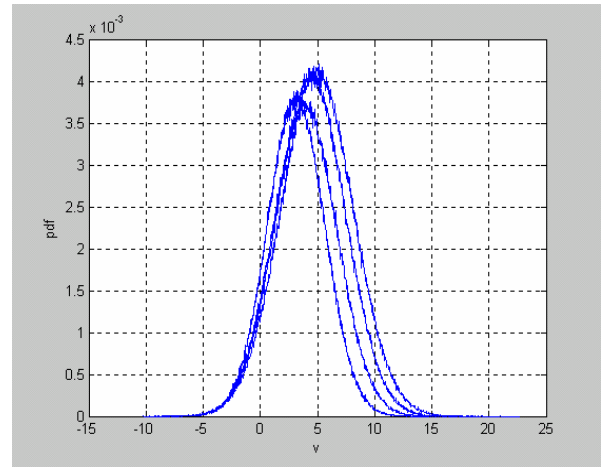
با استفاده از (۱۵) احتمال خطای پیام در مرحله  $l$  از اجرای الگوریتم قابل محاسبه خواهد بود.

با توجه به رابطه  $p_e^{l-1} = Q(\sqrt{\mu_q^{l-1}}/\sqrt{2})$ ، می‌توان ملاحظه نمود که رابطه  $\mu_q^{l-1} = 2\{Q^{-1}(p_e^{l-1})\}^2$  برقرار است و با جایگذاری این رابطه در (۱۵) می‌توان به عبارت زیر دست یافت

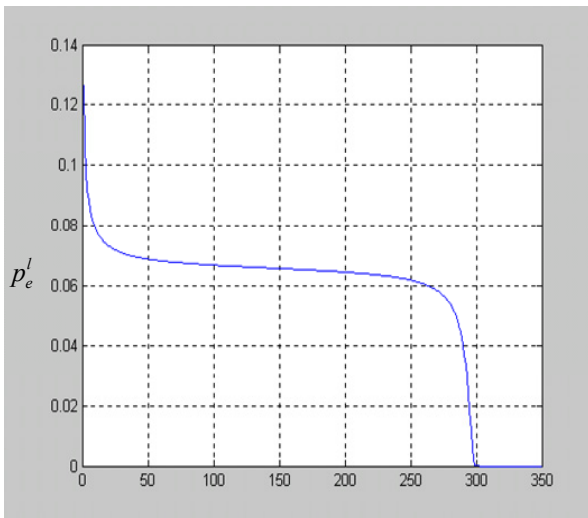
$$p_e^l = Q\left(\sqrt{\frac{\mu_q + (j-1)H^{-1}((H(\nu(Q^{-1}(p_e^{l-1})))^{\nu})^{k-1}))}{2}}\right) \quad (16)$$



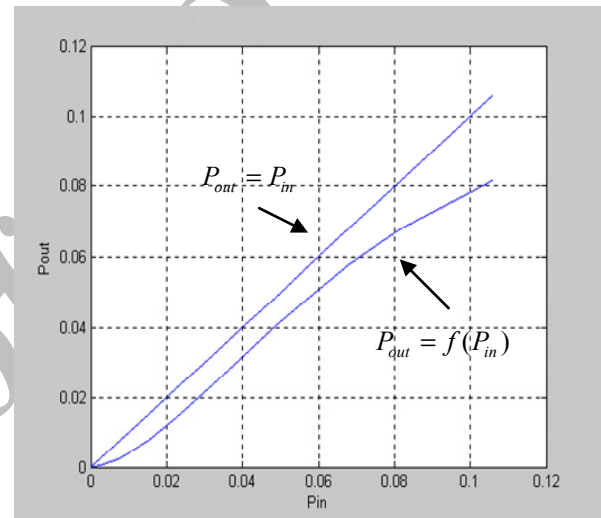
شکل ۵: نمودار انتشار خطا، به ازای  $\sigma = 0.853$  نمودار مماس بر نیمساز ربع اول و سوم شده است.



شکل ۲: نحوه رشد تابع چگالی احتمال پیام‌های  $q$  در طی چهار مرحله تکرار الگوریتم SP.



شکل ۶: نمودار احتمال خطا بر حسب تکرار، متناظر با شکل ۵.

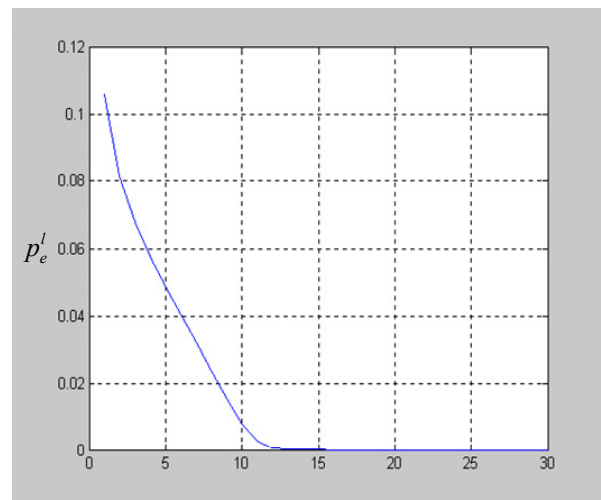


شکل ۳: نمودار انتشار خطا، چون تقاطع با نیمساز ربع اول و سوم رخ نداده احتمال خطا با افزایش تکرارها به سمت صفر میل کرده است.

جدول ۱: مقایسه حد آستانه نویز محاسبه شده با استفاده از روش ارائه شده در این مقاله و روش ارائه شده در [۸] با مقادیر دقیق [۷].

$J$	$k$	$\sigma^*$ مقدار دقیق از [۷]	$\sigma^*$ با استفاده از روش ارائه شده در این مقاله	$\sigma^*$ با استفاده از روش ارائه شده در [۸]
۳	۶	۰.۸۸۰	۰.۸۵۳	۰.۸۷۴
۳	۹	۰.۷۰۸	۰.۷۰۰	۰.۷۰۵
۳	۱۲	۰.۶۳۲	۰.۶۳۰	۰.۶۲۹
۳	۱۵	۰.۵۸۷	۰.۵۸۷	۰.۵۴۴

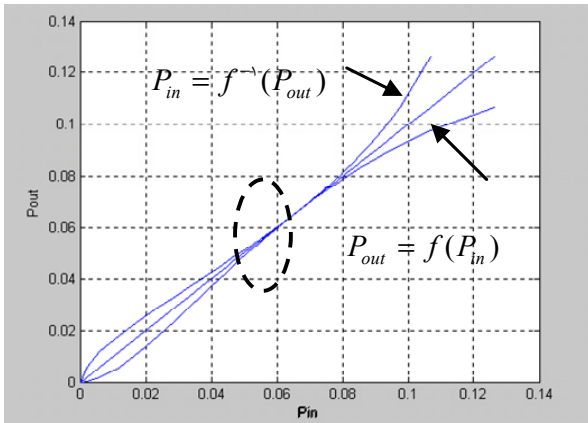
به ازای  $\sigma = 0.8$  نمودارهای  $P_{out} = P_{in}$  و  $P_e^l = f(P_e^{l-1})$  فقط در مبدأ تلاقی دارند، لذا کد موردنظر در شرایط کانال مورد بررسی به احتمال خطای صفر همگرا خواهد شد. شکل ۴ نحوه همگرادن احتمال خطای دیگر تکراری را بر حسب تعداد تکرار نشان می‌دهد. با توجه به شکل، دیگر به سرعت و پس از حدود ۱۲ مرحله تکرار به مقدار احتمال خطای صفر همگرا شده است. در شکل ۵ و تحت شرایط  $\sigma = 0.853$  نمودارهای  $P_{out} = P_{in}$  و  $P_e^l = f(P_e^{l-1})$  بر هم مماس می‌شوند، این وضعیت نشان‌دهنده حد نهایی نویز کانال است که به ازای آن دیگر می‌تواند به احتمال خطای صفر همگرا شود؛ به عبارتی حد آستانه نویز برای این کد برابر  $\sigma_n^* = 0.853$  می‌باشد. شکل ۶ نحوه همگرادن احتمال خطای دیگر تکراری را بر حسب تعداد تکرارها نشان می‌دهد. شکل ۷ وضعیت



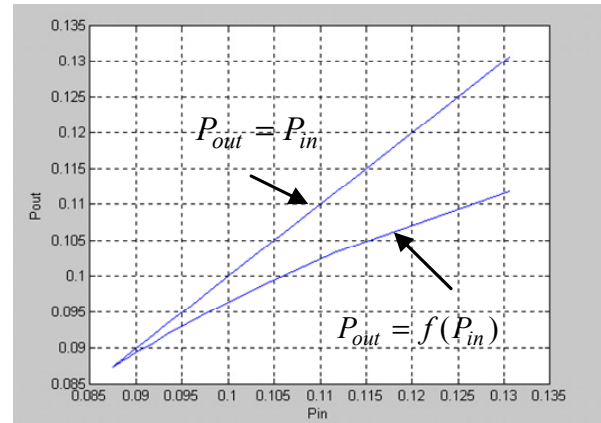
شکل ۴: نمودار احتمال خطا بر حسب تکرار، متناظر با شکل ۳.

روش تحلیلی پیشنهادی در این مقاله ضمن داشتن حجم محاسباتی مناسب، در مقایسه با روش پیشنهادی در [۸]، از دقت مناسبی نیز برخوردار است.

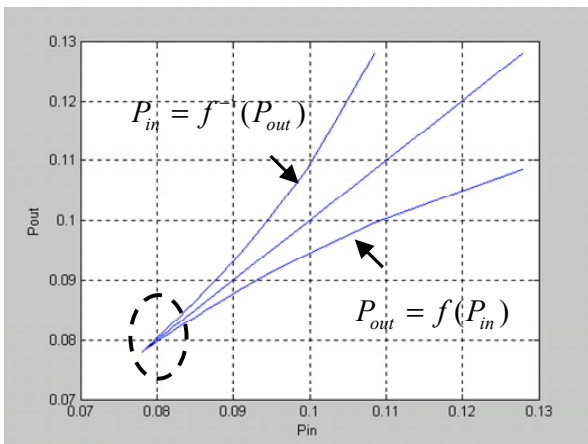
شکل‌های (۳) الی (۸) نحوه استفاده از مدل پیشنهادی در (۱۸) برای بررسی همگرایی دیگر و نیز تعیین سطح آستانه نویز برای کد LDPC (۳,۶) منظم روی کانال AWGN را نشان می‌دهند. در شکل ۳



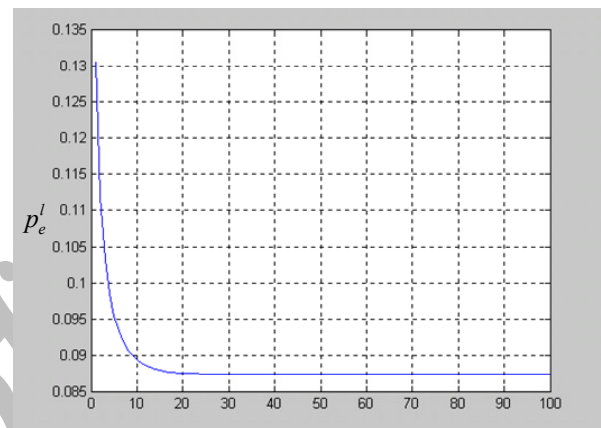
شکل ۱۰: در شرایط  $\sigma = \sigma^*$  مسیر برای بهبود کیفیت دیکدینگ در مرز انسداد است.



شکل ۷: نمودار انتشار خطا، به ازای  $\sigma = 0.88$  نمودار مماس بر نیمساز ربع اول و سوم شده است.



شکل ۱۱: در شرایط  $\sigma > \sigma^*$  مسیر برای بهبود عملکرد دیکدر مسدود است.

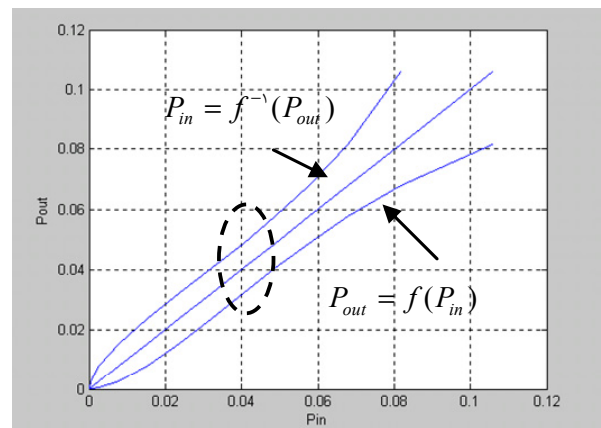


شکل ۸: نمودار احتمال خطا بر حسب تکرار، متناظر با شکل ۷.

(شکل ۱۰) مسیر عبوری فوق در مرز انسداد قرار گرفته و برای  $\sigma_n > \sigma_n^*$  (شکل ۱۱)، مسیر برای بهبود عملکرد دیکدر مسدود خواهد بود و دیکدر در احتمال خطای بزرگتر از صفری ثابت می‌شود.

### ۸- جمع‌بندی

در این مقاله با استفاده از تقریب گوسی و بکارگیری روش تقریبی جدید، یک مدل تحلیلی بر مبنای دنبال نمودن نحوه انتشار خطا در دیکدر LDPC ارائه شد. روش تقریبی پیشنهادی اجازه می‌دهد تا بتوان پارامترهای مورد نیاز جهت مدلسازی پیام‌های مبادله شده در الگوریتم SP را به فرم تحلیلی و بسته توصیف نمود. با استفاده از فرم مناسب روابط حاصل، یک مدل تحلیلی برای بررسی فرآیند دیکدینگ تکراری ارائه شد. بر مبنای مدل پیشنهادی می‌توان دیکدر تکراری را به صورت یک سیستم با رابطه ورودی-خروجی مشخص، مدل نموده و رابطه ورودی-خروجی را به فرم تحلیلی و بسته توصیف کرد. مدل پیشنهادی در این مقاله اجازه می‌دهد تا بتوان نحوه انتشار خطا در دیکدر LDPC را بررسی کرده و به کمک آن رفتار همگرایی دیکدینگ تکراری را در مراحل مختلف تکرار الگوریتم SP به فرمی مناسب و آسان آنالیز نمود. با توجه نتایج عددی ارائه شده، مدل پیشنهادی در این مقاله ضمن دارا بودن فرم بسته و مناسب، از دقت کافی نیز برخوردار است و می‌تواند به عنوان یک ابزار مناسب برای بررسی عملکرد دیکرهای تکراری کدهای LDPC استفاده شود.



شکل ۹: در شرایط  $\sigma < \sigma^*$  مسیر برای بهبود کیفیت دیکدینگ باز است.

را برای حالتی که  $\sigma_n = 0.88$  است (یعنی تحت شرایط  $\sigma_n \geq \sigma_n^*$ ) نشان می‌دهد. با توجه به شکل، دیکدر به مقدار احتمال خطایی بزرگتر از صفر همگرا شده است. شکل ۸ نیز مؤید این واقعیت می‌باشد.

با استفاده از مدل پیشنهادی در (۱۸) و ایده مورد بررسی در مثال‌های فوق، می‌توان به نحو مناسب دیگری نیز همگرانشن دیکدر به احتمال خطای صفر را بررسی نمود. در شکل‌های ۹ تا ۱۱ برای یک کد LDPC (۳,۶) منظم نمودارهای  $P_{out} = f(P_{in})$  و  $P_{in} = f^{-1}(P_{out})$  در سه حالت مختلف کانال و برای  $\sigma_n = 0.8, 0.853, 0.88$  در یک دستگاه رسم شده‌اند. در شکل‌های فوق نمودار دارای یک مسیر عبوری است که تحت شرایط  $\sigma_n < \sigma_n^*$  (شکل ۹)، مسدود نبوده و در نتیجه با افزایش تعداد تکرارها، عملکرد دیکدر به تدریج بهتر شده و در نهایت دیکدر به احتمال خطای صفر همگرا خواهد شد. در حالت  $\sigma_n = \sigma_n^*$

## مراجع

- [1] C. E. Shannon, "A mathematical theory of communication," *Bell System Technical J.*, vol. 27, pt. 1, pp. 379-423, Jul. 1948, pt. 2, pp. 623-656, Oct. 1948.
- [2] J. C. Mackay and R. M. Neal, "Near Shannon limit performance of low density parity check codes," *Electronics Letters*, 32:1645-1646, Aug. 1996.
- [3] R. G. Gallager, *Low-Density Parity-Check Codes*, Cambridge, MA: MIT Press, 1963.
- [4] T. J. Richardson, M. A. Shokrollahi, and R. L. Urbanke, "Design of capacity approaching irregular low-density parity-check codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 47, no. 2, pp. 619-637, Feb. 2001.
- [5] S. Y. Chung, G. D. Forney Jr., T. J. Richardson, and R. L. Urbanke, "On the design of low-density parity-check codes within 0.0045 dB of the Shannon limit," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 5, no. 2, pp. 58-60, Feb. 2001.
- [6] F. R. Kschischang, "Codes defined on graphs," *IEEE Commun. Mag.*, vol. 41, no. 8, pp. 118-125, Aug. 2003.
- [7] T. J. Richardson and R. L. Urbanke, "The capacity of low-density parity-check codes under message-passing decoding," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 47, no. 2, pp. 599-618, Feb. 2001.
- [8] S. Y. Chung, T. J. Richardson, and R. L. Urbanke, "Analysis of sum-product decoding of low-density parity-check codes using a Gaussian approximation," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 47, no. 2, pp. 657-670, Feb. 2001.
- [9] H. Samimi, P. Azmi, and M. Hakkak, "A new Gaussian-based approximate analytical method for convergence analysis of regular LDPC codes," in *Proc. International Symposium on Telecommunications IST2005*, pp. 335-340, Shiraz, Iran, 10-12 Sept. 2005.
- [10] J. M. Holtzman, "A simple, accurate method to calculate spread-spectrum multiple-access error probabilities," *IEEE Trans. on Communications*, vol. 40, no. 3, pp. 461-464, Mar. 1992.

**حسین صمیمی** تحصیلات خود را در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد در رشته مهندسی برق به ترتیب در سال‌های ۱۳۷۲ و ۱۳۷۶ در دانشگاه تهران به پایان رسانده و هم اکنون دانشجوی دکترای مهندسی برق - مخابرات در دانشگاه تربیت مدرس می‌باشد. نامبرده از سال ۱۳۷۴ به عنوان پژوهشگر در مرکز تحقیقات مخابرات ایران مشغول به کار است. زمینه‌های پژوهشی مورد علاقه ایشان شامل تئوری کدینگ، مخابرات سلولی و سیستم‌های فراباند پهن می‌باشد.

**پانیز عزمی** تحصیلات خود را در مقاطع کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکترا در رشته مهندسی برق به ترتیب در سال‌های ۱۳۷۵، ۱۳۷۷ و ۱۳۸۱ در دانشگاه شریف به پایان رسانده است. نامبرده هم‌اکنون دانشیار بخش مهندسی برق دانشگاه تربیت مدرس می‌باشد. زمینه‌های پژوهشی مورد علاقه ایشان سیستم‌های CDMA و سیستم‌های مخابرات نوری و نیز تئوری اطلاعات و کدینگ و پردازش سیگنال‌های دیجیتال و مالتی‌مدیا می‌باشد.

**محمد حکاک** تحصیلات خود در رشته مهندسی برق را در مقطع کارشناسی از دانشگاه بغداد و در مقاطع کارشناسی ارشد و دکترا از دانشگاه ایلینوی آمریکا به ترتیب در سال‌های ۱۳۴۲، ۱۳۴۷ و ۱۳۵۰ به پایان رسانده است. نامبرده هم‌اکنون استاد بخش مهندسی برق دانشگاه تربیت مدرس می‌باشند. زمینه‌های پژوهشی مورد علاقه ایشان تئوری و فناوری آنتن‌های میکروویو، ایستگاه‌های زمینی سیستم‌های ماهواره‌ای، ماهواره‌های کوچک و کاربردهای آنها و نیز روش‌های تحلیلی در آنتن و الکترومغناطیس، مخابرات سیار زمینی و ماهواره‌ای است.

Archive of SID