

# تجزیه و تحلیل عملکرد کد بلوکی DFT در کانال فیدینگ و در حضور نویز کوانتیزاسیون

پائیز عزمی و محمدمهدی سرمدی

به دنبال این مقدمه در بخش بعدی به بیان تئوری نمونه‌برداری و رابطه آن با کدهای DFT می‌پردازیم. در بخش سوم تکنیک کدگذاری و نحوه تصحیح خطاهای تصادفی در این نوع کد را بیان می‌کنیم. در بخش چهارم به نحوه پیاده‌سازی الگوریتم‌های کدگذاری و کدگشایی مورد استفاده در این مقاله می‌پردازیم و در بخش پنجم به ارزیابی عملکرد کد DFT خواهیم پرداخت. در بخش ششم عملکرد کد DFT در میدان حقیقی و کد RS در میدان گالوا را با هم مقایسه خواهیم نمود. در بخش پایانی هم به بیان نتایج ارائه‌شده در این مقاله خواهیم پرداخت.

## ۲- تئوری نمونه‌برداری و رابطه آن با کدهای DFT

این بخش به مرور رابطه بین تئوری نمونه‌برداری غیر یکنواخت و کدهای DFT می‌پردازد و بر این اساس اصول روش‌های مناسب مورد استفاده برای عمل تصحیح خطا ارائه می‌شود. در این راستا نشان داده می‌شود که یک روش برای تشخیص و تصحیح خطا استفاده از تکنیک‌های بازسازی سیگنال از روی نمونه‌های غیر یکنواخت می‌باشد.

از دیدگاه تئوری اطلاعات اگر نرخ اطلاعات منبع کمتر از ظرفیت کانال باشد با ایجاد افزونگی و یا به عبارت دیگر با استفاده از کدینگ کانال می‌توان احتمال خطا بعد از عمل کدگشایی را تا حد دلخواه کاهش داد و یا به عبارت دیگر باعث افزایش نسبت سیگنال به نویز<sup>۴</sup> (SNR) در سیگنال تصحیح‌شده گردید. از سوی دیگر در تئوری نمونه‌برداری غیر یکنواخت اگر نرخ نمونه‌برداری انجام‌شده بالاتر از نرخ نایکوئیست<sup>۵</sup> باشد، سیگنال اصلی بدون خطا قابل بازیابی خواهد بود و در صورت استفاده از نمونه‌برداری با نرخ بالاتر از نرخ نایکوئیست، بیت‌های افزونگی مورد نیاز برای بازیابی نمونه‌های مفقود از روی نمونه‌های آلوده به نویز فراهم می‌گردد [۲].

در سیستم‌های مخابراتی دیجیتال به دلایلی همچون وجود فیدینگ یا سایر سیگنال‌های مزاحم، خطا به وجود می‌آید و می‌توان تصور کرد که نمونه‌های خطا شده در دسترس نیستند و لذا نمونه‌های یکنواخت ارسالی، در گیرنده به صورت نمونه‌های غیر یکنواخت دریافت می‌شوند؛ در نتیجه بنا به تئوری نمونه‌برداری غیر یکنواخت اگر شرط نایکوئیست رعایت گردد نمونه‌های مخدوش‌شده با استفاده از نمونه‌های باقیمانده قابل بازیابی خواهند بود [۳].

در مقوله پردازش سیگنال، برای مفهوم نمونه‌برداری با نرخ بالاتر از نرخ نایکوئیست عبارت فرامونه‌برداری<sup>۶</sup> استفاده می‌شود. در کدهای DFT پیشنهاد شده است که از ایده فرامونه‌برداری در پردازش سیگنال به منظور ایجاد افزودگی لازم برای تصحیح خطا استفاده گردد [۱] و [۲]. در

چکیده: یکی از راه‌های مقابله با فیدینگ و نویزهای موجود در کانال بکارگیری کدهای کنترل خطا یا به عبارت دیگر کدهای کانال می‌باشد. تاکنون بیشتر فعالیت‌های انجام‌شده در زمینه کدینگ کانال مربوط به کدهای تعریف‌شده در میدان‌های با مرتبه محدود گالوا بوده است. در این مقاله تجزیه و تحلیل عملکرد یکی از انواع کدهای کانال یعنی کد DFT، که از خانواده کدهای بلوکی تعریف‌شده در میدان با مرتبه نامحدود حقیقی می‌باشد، در حضور انواع اختلال‌ها همچون فیدینگ و نویز کوانتیزاسیون مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این نوع کد برای انجام عملیات کدگذاری و کدگشایی از تبدیل شناخته‌شده DFT استفاده می‌گردد. در این مقاله عملکرد این نوع کد در حضور نویز کوانتیزاسیون و فیدینگ کانال مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها مؤید قابلیت این نوع کد در حذف اثرات نویز و فیدینگ می‌باشد و همچنین نشان داده می‌شود که این نوع کد در سیگنال به نویزهای پایین نسبت به کدهای Reed Solomon تعریف‌شده در میدان‌های با مرتبه محدود عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهد.

کلید واژه: کدهای کنترل خطا، کد DFT، کد RS، فیدینگ، نویز کوانتیزاسیون.

## ۱- مقدمه

در تئوری اطلاعات تبدیل فوریه به طور معمول در کدهای منبع و برای فشردسازی اطلاعات مورد استفاده قرار می‌گیرد. این تبدیل به راحتی در میدان‌های حقیقی و مختلط با پردازنده‌های استاندارد پردازش سیگنال قابل تحقق می‌باشد و لذا بکارگیری آن در ایجاد کدهای کانال هم مطرح شده است [۱].

کد DFT بر همین اساس و بر مبنای تبدیل گسسته فوریه<sup>۱</sup> شکل گرفته است [۱]. در این نوع کد به علت استفاده از تبدیل فوریه و ساختار تعریف‌شده برای کد، تصحیح خطا به صورت بی‌نیی انجام نمی‌گردد و همچون کدهای RS<sup>۲</sup> تصحیح خطا بر پایه تصحیح سمبل‌های اطلاعات انجام می‌شود. در این مقاله به بررسی نحوه کدگذاری و کدگشایی و عملکرد کد DFT در شرایط مختلف همچون حضور نویز کوانتیزاسیون، نویز کانال و فیدینگ<sup>۳</sup> خواهیم پرداخت. نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که این نوع کد در حضور انواع اختلال‌ها عملکرد مناسبی از خود نشان می‌دهد و در سیگنال به نویزهای پایین بهتر از کد RS عمل می‌کند.

این مقاله در تاریخ ۱ مرداد ماه ۱۳۸۵ دریافت و در تاریخ ۲۵ بهمن ماه ۱۳۸۵ بازنگری شد. بخشی از این مقاله با استفاده از حمایت مرکز تحقیقات مخابرات ایران انجام شده است. همین‌طور بخشی دیگر از مقاله در راستای انجام طرح شماره ۸۴۰۹۴/۲۴ با استفاده از پشتیبانی صندوق حمایت از پژوهشگران کشور انجام شده است. پائیز عزمی، بخش مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، صندوق پستی ۱۴۳-۱۴۱۱۵ (email: pazmi@modares.ac.ir).

محمدمهدی سرمدی، بخش مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تربیت مدرس، تهران.

1. Discrete Fourier Transform
2. Reed Solomon
3. Fading

4. Signal to Noise Ratio
5. Nyquist
6. Jamming
7. Oversampling

تنها محدودیت آن است که باید صفرها مجاور هم قرار گیرند. با اضافه شدن سمبل‌های افزونگی مذکور تعداد نمونه‌های سیگنال پیام به  $N = 2t + k$  می‌رسد. در این مرحله با محاسبه عکس تبدیل فوریه IDFT از نمونه‌های حاصل، سیگنال  $x(n)$  برای ارسال آماده می‌شود. در حقیقت سیگنال حاصل فرم درونیابی شده سیگنال اصلی  $m(n)$  در حوزه زمان می‌باشد.

با فرض اینکه حداکثر  $t$  خطا در هنگام عبور سیگنال از کانال رخ داده باشد، سیگنال  $e(n)$  که سیگنال خطای کانال می‌باشد حداکثر در  $t$  محل غیر صفر خواهد بود. اگر  $U = \{i_1, i_2, \dots, i_t\}$  بیانگر مجموعه محل‌های خطا باشد،  $i_m$  محل خطا و  $e(i_m)$  مقدار خطا را نشان می‌دهند و داریم

$$e(n) = \begin{cases} e(i_m) & n = i_m \in U \\ 0 & n \notin U \end{cases} \quad (1)$$

فرض کنید سیگنال  $y(n) = e(n) + x(n)$  در گیرنده دریافت شده است. حال اگر خطایی رخ نداده باشد، تبدیل فوریه سیگنال دریافتی که با  $Y(k)$  نشان داده می‌شود در  $2t$  محل انتهایی صفر خواهد بود و در غیر این صورت این  $2t$  نمونه به عنوان سیگنال سندرم  $S$  ما را در تشخیص و تصحیح خطاها یاری می‌دهد و از این بابت آنرا با  $S(k)$  نمایش می‌دهیم. در ادامه نشان می‌دهیم که با معین بودن  $2t$  نمونه مجاور از تبدیل فوریه خطا  $E(k)$ ، امکان پیدا کردن همه سمبل‌های طیف  $E(k)$  وجود دارد. در این صورت پس از محاسبه همه سمبل‌های طیف  $E(k)$ ، برای محاسبه سیگنال خطا  $e(n)$  کافی است عکس فوریه خطا را به دست آوریم. در مرحله نهایی با کم کردن سیگنال خطا از سیگنال دریافتی، سیگنال دریافتی تصحیح می‌گردد.

حال در این مرحله به چگونگی محاسبه کامل طیف سیگنال خطا  $E(k)$  می‌پردازیم. از سیگنال خطا تنها  $2t$  المان آن معین است که محل این المان‌ها در انتهای طیف و مقدار آنها همان مقدار سندرم می‌باشد. در این مرحله باید با استفاده از این  $2t$  نمونه معین،  $N - 2t$  المان مجهول آنرا مشخص نمود. فرض کنید  $t$  خطا رخ داده است در این صورت داریم

$$E(k) = \sum_{m=0}^{t-1} e(i_m) \phi^*(i_m, k) \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2)$$

که  $\phi^*(i_m, k)$  تابع پایه تبدیل است و از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\phi^*(i_m, k) = e^{-j \frac{2\pi}{N} i_m k} \quad (3)$$

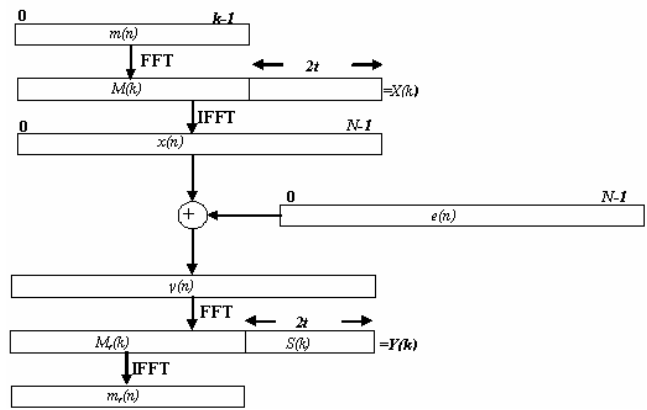
رابطه فوق برای  $2t$  محل در انتهای طیف که در آن مکان‌ها مقدار  $E(k)$  معین است  $2t$  معادله به دست می‌دهد که در آنها  $2t$  مجهول وجود دارد که عبارتند از  $t$  محل خطا و  $t$  مقدار خطا که می‌توان آنها را با حل دستگاه حاصل یافت و بردار  $E(k)$  را به طور کامل تعیین نمود. البته دستگاه معادلات حاصل غیر خطی بوده و حل آن با روشی که در ادامه ذکر می‌گردد انجام می‌شود.

چندجمله‌ای مشخصه زیر را در نظر بگیرید

$$H(s) = s^t + \alpha_1 s^{t-1} + \dots + \alpha_{t-1} s + \alpha_t \quad (4)$$

که در آن

$$s_m = e^{-j \frac{2\pi}{N} i_m} \quad i_m \in U = \{i_1, i_2, \dots, i_t\} \quad (5)$$



شکل ۱: کدگذاری و کدگشایی سیگنال در کد DFT.

این چهارچوب در کدهای DFT برای انجام عمل فرامونه‌برداری، از سیگنال گسسته تبدیل فوریه گسسته گرفته شده و صفرهایی به طیف سیگنال اضافه می‌گردد. سپس با انجام عمل عکس فوریه روی طیف حاصل، یک نسخه فرامونه‌برداری شده از سیگنال اصلی ایجاد شده و در حقیقت نمونه‌هایی جدید از سیگنال اصلی حاصل می‌گردد. در اصطلاح به این عمل درونیابی<sup>۱</sup> بر مبنای Zero padding گفته می‌شود.

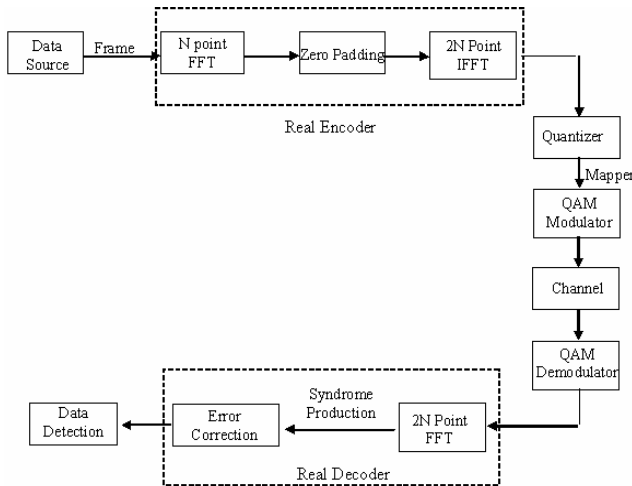
در صورتی که در کد DFT در عملیات Zero padding  $2t$  صفر به سیگنال اضافه گردد، امکان تصحیح حداکثر  $t$  خطا که محل و دامنه آنها نامعین است فراهم می‌گردد. البته در صورتی که محل خطا معلوم باشد، این کد قابلیت تصحیح  $2t$  خطا را خواهد داشت.

در اینجا باید یادآور شویم که سیگنال حاصل از انجام عملیات تبدیل فوریه گسسته در میدان گالوا روی هر یک از کلمه کدهای RS در  $2t$  محل مجاور هم دارای مقدار صفر می‌باشد که در آن  $t$  بیشینه تعداد خطاهای قابل تصحیح است. بنابراین کد DFT از لحاظ ساختاری همانند کد RS می‌باشد و تنها تفاوت آنها این است که کد DFT در میدان حقیقی و مختلط تعریف شده در حالیکه کد RS در میدان‌های با مرتبه محدود گالوا تعریف می‌گردد [۴].

### ۳- روش کدگذاری و تصحیح خطای $RE^2$ در کدهای DFT

در این بخش به مطالعه روش کدگذاری و کدگشایی کد DFT می‌پردازیم. البته در روش دکدینگ فرض می‌کنیم که خطای از نوع RE رخ داده است. همان‌طور که می‌دانیم رخ دادن خطای RE به این معنی است که نمونه‌های دریافتی یا دارای خطا می‌باشند یا کاملاً صحیح دریافت شده‌اند. فرض کنید هدف کد کردن سیگنال  $k$  سمبلی پیام  $m(n)$  با کمک کد DFT می‌باشد. در شکل ۱ نمودار کامل تولید کد و تصحیح خطا و یا عبارت دیگر کدگذاری و کدگشایی کد DFT نشان داده شده است. با هدف ایجاد قابلیت تصحیح  $t$  خطای RE، همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود، سیگنال پیام تولیدی از منبع  $m(n)$  تحت تبدیل فوریه DFT قرار گرفته و سیگنال  $M(k)$  تولید می‌گردد؛ سپس تعداد  $2t$  نمونه صفر مجاور هم به عنوان افزونگی به انتهای طیف اضافه می‌شود. بدون آنکه به عمومیت روش‌های ارائه شده خدشه‌ای وارد شود فرض می‌کنیم که صفرها به انتهای طیف سیگنال اضافه شده است. البته در حالت کلی این صفرها می‌توانند در هر کجای طیف سیگنال افزوده شوند،

1. Interpolation
2. Random Error



شکل ۲: ساختار مورد استفاده در این مقاله برای ارسال و دریافت اطلاعات و تصحیح خطا.

$$E(r) = -\sum_{i=1}^t h_i E(r-t-i) \quad (13)$$

برای تعیین سیگنال ارسالی لازم است که سیگنال خطای  $e(n)$  با محاسبه IFFT از  $E(k)$  تعیین گردد

$$e(n) = IFFT\{E(k)\} \quad (14)$$

و در این صورت تخمین سیگنال ارسالی  $y(n) - e(n)$  خواهد بود و داریم

$$\hat{x}(n) = y(n) - e(n) \quad (15)$$

از آنجا که ممکن است بردار خطای حاصل درست تخمین زده نشده باشد، سیگنال حاصل تخمینی از  $x(n)$  ارسالی است که با  $\hat{x}(n)$  نمایش داده می‌شود. پیام  $m(n)$  با محاسبه تبدیل فوریه سیگنال  $\hat{x}(n)$  و حذف نمونه‌های صفر اضافه شده و سپس با انجام عملیات عکس تبدیل فوریه گسسته روی سیگنال حاصل، به دست می‌آید. علاقمندان به مطالعه بیشتر در مورد این مطالب می‌توانند به مرجع [۲] مراجعه نمایند.

روش تصحیح ارائه شده در این بخش فقط در مورد خطای RE قابل بکارگیری است و همان‌طور که می‌دانیم در حضور نویز کوانتیزاسیون و فیدینگ، خطای حاصل از عبور سیگنال از کانال از نوع RE نخواهد بود. در بخش بعد نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان روش مذکور را در شرایط حضور فیدینگ و نویز کوانتیزاسیون به کار برد.

#### ۴- بکارگیری کد DFT در حضور نویز کوانتیزاسیون و فیدینگ کانال

در این قسمت به نحوه پیاده‌سازی کد DFT برای حالتی که سیگنال تحت تأثیر نویز کانال، نویز کوانتیزاسیون و فیدینگ قرار دارد، می‌پردازیم. در شکل ۲ بلوک دیاگرام استفاده شده برای پیاده‌سازی کدهای بلوکی DFT نشان داده شده است. این بلوک دیاگرام بر مبنای نرخ کد  $1/2$  رسم شده است به این معنی که تعداد سمبل‌های افزونگی برابر با تعداد سمبل‌های بلوک سیگنال فرض شده و در توضیحات مربوط به آن برای سادگی بیان، بلوک‌ها را ۴ سمبلی و مدولاسیون را QAM-۲۵۶ در نظر می‌گیریم. بر مبنای این بلوک دیاگرام ۸ داده حقیقی در منبع تولید و سپس این داده‌ها، به ترتیب تولید در منبع، به عنوان مقادیر حقیقی و موهومی مربوط به ۴ سمبل اطلاعات مختلط مورد استفاده قرار گرفته و به سوی کدکننده کد DFT ارسال می‌گردند. در شبیه‌سازی‌های انجام شده، الگوریتم ارائه شده در بخش قبل برای

یک ریشه آن بوده و  $i_m$  محل خطای  $m$  ام می‌باشد. به عبارت دیگر

$$H(s_m) = 0 \quad (6)$$

در این صورت معادله زیر حاصل می‌شود

$$s_m^t + \alpha_1 s_m^{t-1} + \dots + \alpha_{t-1} s_m + \alpha_t = 0 \quad (7)$$

حال با ضرب عبارت در  $e(i_m)e^{-j\frac{\gamma\pi}{N}i_m r}$  ( $r = 0, 1, \dots, N-1$ ) و جمع روی مقدار  $m$  خواهیم داشت

$$\sum_{m=0}^{t-1} e(i_m)e^{-j\frac{\gamma\pi}{N}i_m(r+t)} + \alpha_1 \sum_{m=0}^{t-1} e(i_m)e^{-j\frac{\gamma\pi}{N}i_m(r+t-1)} + \dots + \alpha_t \sum_{m=0}^{t-1} e(i_m)e^{-j\frac{\gamma\pi}{N}i_m r} = 0 \quad (8)$$

معادله قبلی را می‌توان به فرم زیر نوشت

$$E(r+t) + \alpha_1 E(r+t-1) + \dots + \alpha_t E(r) = 0 \quad (9)$$

$$r = 0, 1, \dots, N-1$$

معادله زیر هم به طور معادل از رابطه فوق به دست می‌آید

$$\alpha_1 E(r+t-1) + \dots + \alpha_t E(r) = -E(r+t) \quad (10)$$

$$r = 0, 1, \dots, N-1$$

همان‌طور که اشاره شد مقادیر  $E(k)$  برای  $k = N, N-1, \dots, N-2t$  معین می‌باشند بر این اساس از مجموعه (۱۰) معادله را انتخاب و به فرم زیر نشان می‌دهیم

$$\begin{bmatrix} E(N-2) & E(N-3) & \dots & E(N-t-1) \\ E(N-3) & E(N-4) & \dots & E(N-t-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E(N-t-1) & E(N-t-2) & \dots & E(N-2t) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_t \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} E(N-1) \\ E(N-2) \\ \vdots \\ E(N-t) \end{bmatrix} \quad (11)$$

حال با تغییر متغیر  $\alpha_k = h_{t-k+1}$  دستگاه معادلات به فرم ماتریسی زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{bmatrix} E(N-t-1) & E(N-t) & \dots & E(N-2) \\ E(N-t-2) & E(N-t-1) & \dots & E(N-3) \\ E(N-t-3) & E(N-t-2) & \dots & E(N-4) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ E(N-2t) & E(N-2t+1) & \dots & E(N-t-1) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_t \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} E(N-1) \\ E(N-2) \\ E(N-3) \\ \vdots \\ E(N-t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

مرتبه ماتریس ضرایب (۱۲) برابر با تعداد خطای اتفاق افتاده در مرحله ارسال می‌باشد [۵]. به عنوان مثال برای  $N_e$  خطای اتفاق افتاده تنها  $N_e$  سطر مستقل خطی در ماتریس مذکور وجود دارد. الگوریتم‌های متعددی برای حل دستگاه فوق وجود دارد که الگوریتم بازگشتی Levinson یکی از آنها می‌باشد. با حل (۱۲) و مشخص شدن مقادیر  $h_i$ ، با کمک رابطه ارائه شده در (۱۳) مقدار نامعلوم  $E(k)$  را محاسبه می‌نماییم

یکی از نقاط Constellation نوشته شده است بدین معنی است که اگر مقدار مورد نظر برای ارسال در کانال برابر با داده‌ای باشد که عدد هجده به آن نسبت داده شده است؛ آنگاه مقادیر متناظر با دو مقدار (۱۳ و -۱۳) به کانال ارسال می‌گردد. حال پس از مدولاسیون، سمبل‌های ارسالی وارد کانال شده و تحت تأثیر اغتشاشات کانال قرار می‌گیرند.

در گیرنده، سمبل‌های دریافتی به کدگشا منتقل می‌شوند. در کدگشا ابتدا از روی زوج‌های دریافتی مقادیر حقیقی و موهومی سمبل‌های مختلط دریافتی تعیین شده، سپس فرم مختلط این سمبل‌ها تولید می‌گردد. با محاسبه تبدیل فوریه از داده‌های مختلط حاصل، بردار سندرم استخراج و با کمک الگوریتم ارائه‌شده در بخش قبل خطا تصحیح می‌گردد.

در الگوریتم مطرح‌شده در بخش قبل تأکید گردید که در صورت بروز خطای RE، تعداد خطاها باید کمتر از نصف صفرهای اضافه‌شده در مرحله Zero padding باشد، که با حضور نویز کوانتیزاسیون به طور مسلم از دیدگاه کدگشا تعداد خطاها بیشتر از این مقدار خواهد بود. برای رفع این مشکل در مرجع [۶] یک روش پیشنهاد شده است که در آن برای حل دستگاه معادلات ماتریسی (۱۲) از رابطه زیر استفاده می‌گردد

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_t \end{bmatrix} = -\mathbf{E}^+ \times \begin{bmatrix} E(N-1) \\ E(N-2) \\ \vdots \\ E(N-t) \end{bmatrix} \quad (16)$$

که در آن

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E(N-t-1) & E(N-t) & \dots & E(N-2) \\ E(N-t-2) & E(N-t-1) & \dots & E(N-3) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ E(N-2t) & E(N-2t+1) & \dots & E(N-t-1) \end{bmatrix} \quad (17)$$

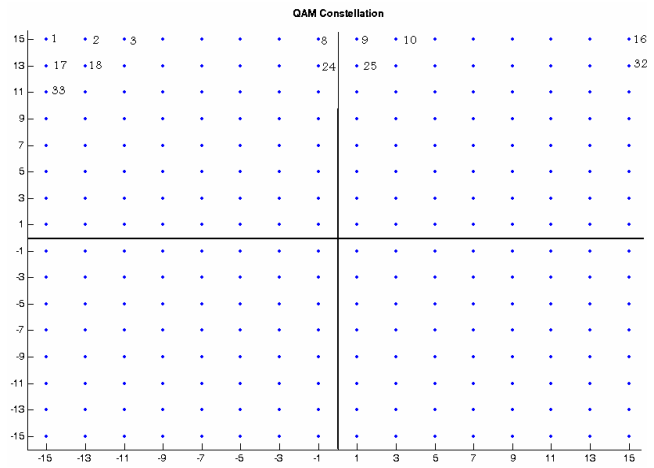
و  $\mathbf{E}^+$  که شبه‌معکوس  $\mathbf{E}$  نامیده می‌شود و با ماتریس  $\mathbf{E}$  دارای رابطه زیر می‌باشد

$$\begin{cases} \mathbf{E}\mathbf{E}^+ = \mathbf{E} \\ \mathbf{E}^+\mathbf{E} = \mathbf{E}^+ \end{cases} \quad (18)$$

در این مقاله از این روش برای کدگشایی در حضور نویز کوانتیزاسیون استفاده شده و نتایج حاصل که در بخش بعد ارائه خواهد شد نشان می‌دهند که کد DFT با کدگشای مذکور کارایی مناسبی در حضور نویز کوانتیزاسیون و فیدینگ از خود نشان می‌دهد. از آنجا که در تمام مراحل عملیات با داده‌های آنالوگ در دامنه روبرو هستیم، برای ارزیابی عملکرد کد DFT از منحنی‌های متوسط مربع خطا (MSE) برحسب سیگنال به نویز استفاده می‌نماییم. در بخش‌های بعد به بررسی شبیه‌سازی‌های انجام‌شده پرداخته و با محاسبه متوسط مربع خطای نرمال‌شده برای حالت گذشته و گذشته به ارزیابی عملکرد کد DFT می‌پردازیم.

## ۵- بررسی کارایی کد DFT

در این بخش به بررسی نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها می‌پردازیم. در بیشتر شبیه‌سازی‌ها مدولاسیون از نوع QAM-۲۵۶ در نظر گرفته شده و در مواردی که نوع مدولاسیون متفاوت فرض شده، این مطلب به صراحت عنوان گردیده است.



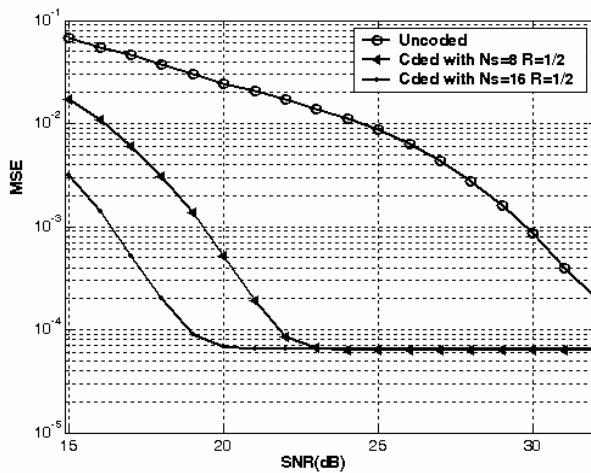
شکل ۳: Constellation منتخب مورد استفاده در شبیه‌سازی‌ها.

کدینگ کانال مبنای کار قرار گرفته است. در کدکننده ابتدا تبدیل فوریه سمبل‌های مختلط ۴تایی محاسبه شده و سپس با اضافه‌نمودن ۴ صفر در انتهای طیف، مرحله Zero padding انجام می‌شود. در ادامه از داده‌های ۸تایی موجود عکس تبدیل فوریه IFFT گرفته می‌شود و ۸ داده مختلط تولید می‌گردد که باید از طریق کانال به سوی گیرنده ارسال گردد. در سیستم‌های مخابرات دیجیتال باید ابتدا داده‌ها را کوانتیزه کرده و سپس ارسال نمود. در بخش کوانتیزه‌کننده از کوانتیزاسیون خطی یکنواخت با ۲۵۶ سطح استفاده شده است. برای این کار در داده‌های مختلط مقادیر بخش حقیقی و مختلط را به طور مجزا کوانتیزه می‌نماییم. با عبور داده‌ها از بخش کوانتیزه‌کننده هر کدام از مؤلفه‌های حقیقی و مختلط خروجی از کدکننده به ۲۵۶ مقدار متفاوت محدود می‌شود. در مرحله بعد سمبل‌ها مدوله می‌گردند. برای این منظور از روش مدولاسیون QAM-۲۵۶ استفاده می‌گردد؛ بدین صورت که بخش‌های حقیقی و موهومی داده‌های کوانتیزه‌شده، پس از خروج از کوانتیزه‌کننده، بطور جداگانه توسط یک نگارنده<sup>۱</sup> به سمبل‌های موجود در Constellation QAM-۲۵۶ نگاشت می‌شوند؛ یعنی به هر کدام از ۲۵۶ مقدار آنالوگ خروجی کوانتیزه‌کننده دو مقدار مربوط به مختصات افقی و عمودی صفحه Constellation اختصاص داده می‌شود.

در ارسال باینری برای آنکه سمبل‌های مجاور به گونه‌ای قرار گیرند که فاصله معادل بیتی آنها تنها یک بیت باشد، در طراحی Constellation مربوط به مدولاسیون از Gray Code استفاده می‌شود. با استفاده از Gray Code در صورت بروز خطا در یک سمبل، تنها در یک بیت اختلاف ایجاد می‌شود. در حالتی هم که داده‌ها به صورت مقادیری حقیقی می‌باشند، مشابه با کدهای باینری، در طراحی Constellation تلاش می‌شود که نحوه چینش روی صفحه Constellation به صورتی باشد که فاصله مقادیر مجاور نگاشته‌شده کمترین مقدار باشد تا در صورت ایجاد خطا در آشکارسازی، فاصله بین داده اصلی و مقدار آشکارسازی‌شده زیاد نباشد. در راستای تدوین این مقاله چندین نوع نگاشت مختلف بررسی شده و یک نگاشت مناسب که در شکل ۳ مشاهده می‌شود به عنوان طرح Constellation مورد استفاده انتخاب شده است. در شکل مذکور شماره‌های قرار داده شده روی نقاط نشان‌دهنده نگاشت داده‌های کوانتیزه‌شده می‌باشند؛ بدین ترتیب که مقادیر بین کمینه و بیشینه دامنه داده‌های ورودی را به ۲۵۶ سطح کوانتیزه نموده و به ترتیب به هر یک عددی از ۱ تا ۲۵۶ نسبت می‌دهیم. به عنوان مثال عدد ۱۸ که بر روی

2. Pseudo Inverse  
3. Mean Square Error

1. Mapper



شکل ۵: مقایسه متوسط مربع خطا برای بلوک‌های ۴ و ۸ سمبلی.

که در آن سیگنال باند پایه دریافتی و  $s(t)$  سیگنال باند پایه ارسالی و  $n(t)$  نویز سفید جمع‌شونده گوسی (AWGN) می‌باشد و همچنین  $c(t)$  در کانال رایس به صورت زیر مدل می‌گردد

$$c(t) = a + u(t) + jv(t) \quad (19)$$

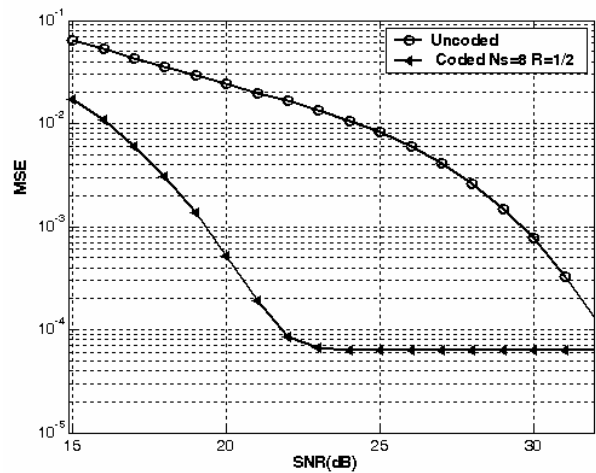
در رابطه فوق  $a$  یک مقدار ثابت است و  $u(t)$  و  $v(t)$  فرآیندهای سفید گوسی با میانگین صفر و واریانس  $\delta^2$  می‌باشند. در این حالت با فرض اینکه توان سیگنال ارسالی  $P_s = E\{|s(t)|^2\}$  باشد، توان سیگنال دریافتی  $P_r = (a^2 + 2\delta^2)P_s$  خواهد بود. برای آنکه معیاری برای ارزیابی عمق فیدینگ رایس داشته باشیم، پارامتر  $K_f$  به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$K_f = \frac{a^2}{2\delta^2} \quad (20)$$

در واقع پارامتر  $K_f$  بیانگر نسبت توان دید مستقیم به توان دریافت شده از طریق انعکاس<sup>۵</sup> و یا پراش<sup>۶</sup> در کانال رادیویی می‌باشد. در شبیه‌سازی‌هایی که نتایج آنها در این مقاله ارائه شده، فرض شده است که  $a = 1$  می‌باشد و تغییرات پارامتر  $K_f$  از طریق تغییر واریانس  $\delta^2$  ایجاد می‌گردد. در این صورت توان سیگنال دریافتی از عبارت  $P_r = (1 + 1/K_f)P_s$  به دست می‌آید.

در این مرحله تأثیر کانال فیدینگ را نیز اضافه نموده و به بررسی عملکرد کد DFT می‌پردازیم. در این حالت بلوک‌های اطلاعات را ۴ سمبلی و نرخ کد را  $1/2$  فرض کرده و تأثیر فیدینگ رایس با ضرایب  $K = 2$ ،  $K = 3$ ، و  $K = 0.5$  را نسبت به کانال بدون فیدینگ بررسی می‌کنیم. همان‌طور که انتظار می‌رفت نتایج ارائه شده در شکل ۶ نشان می‌دهند که با بالا رفتن ضریب فیدینگ تأثیر آن در سیگنال به نویزهای بالا بر روی میزان متوسط مربع خطا کم می‌شود. در اینجا باید توجه داشت که تغییر پارامتر فیدینگ از دو جهت بر میزان MSE تأثیرگذار می‌باشد. در جهت اول به علت کاهش مؤلفه مربوط به بازتابش و پراش میزان عدم قطعیت کانال کاهش یافته و منجر به کاهش میزان MSE می‌گردد. از جهت دیگر کاهش مؤلفه فوق‌الذکر باعث کاهش کل توان دریافتی شده و از این طریق با کاهش سیگنال به نویز دریافتی به افزایش میزان MSE منجر می‌گردد. آنچه که در منحنی‌های شکل ۶ ملاحظه می‌گردد حاصل تقابل این دو اثر متضاد می‌باشد. در سیگنال به نویزهای بالا، میزان

5. Reflection
6. Scattering



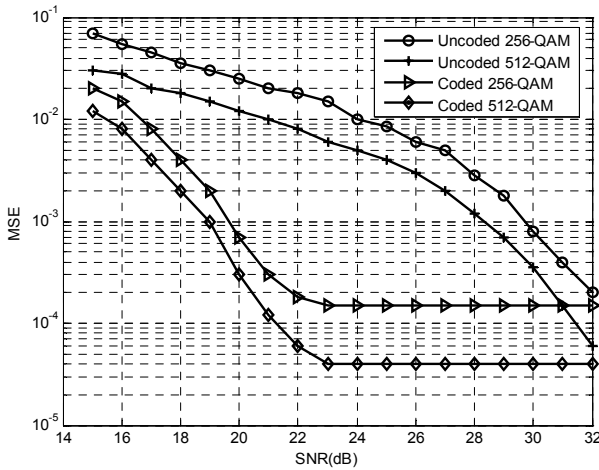
شکل ۶: مقایسه متوسط مربع خطا برای حالت گذشته و حالت کنده شده.

برای سهولت بیان، پارامتر  $N_s$  را به عنوان تعداد سمبل‌های بلوک،  $R$  را به عنوان نرخ کد و  $K_f$  را به عنوان پارامتر عمق فیدینگ که در ادامه تعریف می‌گردد در نظر می‌گیریم. در شکل ۴ نتایج شبیه‌سازی برای بلوک‌های ۸ سمبلی با نرخ کد  $1/2$  و در حضور نویز کوانتیزاسیون و نویز کانال نشان داده شده است. عملکرد بهتر سیستم در حضور کدینگ DFT نسبت به حالت کنده شده در این شکل به روشنی قابل مشاهده می‌باشد. مشاهده می‌شود که میزان سیگنال به نویز مورد نیاز برای رسیدن به متوسط مربع خطای برابر با  $10^{-3}$ ، در حالت گذشته نزدیک به ۱۰ dB نسبت به حالت کنده شده کمتر است. در اینجا لازم به یادآوری است که سیگنال اولیه ارسالی از نوع آنالوگ در دامنه بوده و سیگنال نهایی بازسازی شده از نوع گسسته در دامنه می‌باشد. به همین دلیل حتی در صورت تصحیح کامل خطای حاصل از نویز کانال و فیدینگ، میزان MSE به صفر نمی‌رسد و منحنی‌های MSE بر حسب سیگنال به نویز دارای یک سطح کف خطا<sup>۱</sup> خواهند بود که میزان آن، همان‌طور که در ادامه نشان داده خواهد شد، وابسته به تعداد سطوح کوانتیزاسیون می‌باشد. در حالت بعد تعداد سمبل‌های بلوک کد به ۱۶ افزایش داده شده است. متوسط مربع خطا برای این حالت در مقایسه با حالت  $N_s = 8$  در شکل ۵ نشان داده شده است. با این تغییر در سیگنال به نویز مورد نیاز برای رسیدن به متوسط مربع خطای برابر با  $10^{-3}$ ، به علت بالا رفتن امکان تصحیح خطا، نسبت به حالت قبل ۳ dB بهبود مشاهده می‌گردد. همچنین ملاحظه می‌شود که کارایی کدینگ DFT در سیگنال به نویزهای پایین در صورت استفاده از بلوک‌هایی با تعداد سمبل‌های بیشتر افزایش می‌یابد. این نتیجه بر اساس تئوری کدینگ کاملاً قابل پیش‌بینی بود.

تا اینجا تنها تأثیر نویز کانال و نویز کوانتیزاسیون مورد بررسی قرار گرفت. در مرحله بعد به تجزیه و تحلیل عملکرد کد DFT در کانال فیدینگ می‌پردازیم. در شبیه‌سازی‌ها از مدل فیدینگ صاف<sup>۲</sup> با توزیع رایس<sup>۳</sup> برای دامنه سیگنال دریافتی از کانال فیدینگ استفاده شده است. در یک کانال با فیدینگ غیر انتخاب فرکانسی<sup>۴</sup> سیگنال باند پایه دریافتی به صورت زیر خواهد بود

$$r(t) = c(t)s(t) + n(t) \quad (18)$$

1. Error Floor
2. Flat Fading
3. Rician Distribution
4. Non Frequency Selective

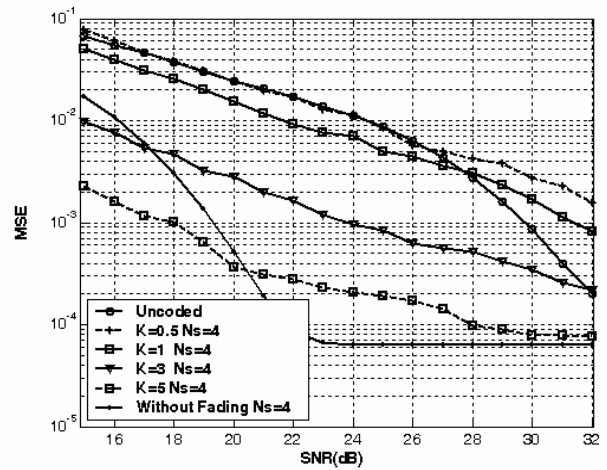


شکل ۸: مقایسه متوسط مربع خطا برای سطوح مختلف کوانتیزاسیون.

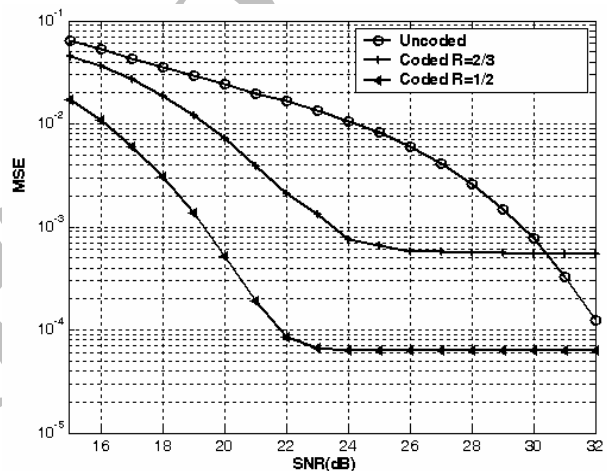
در تعداد سطوح کوانتیزاسیون کمتر از ۲۵۶ قابل قبول نمی‌باشد اما در صورت استفاده از تعداد ۲۵۶ و ۵۱۲ در سیگنال به نویزهای پایین تفاوت چندانی در کارایی ملاحظه نمی‌گردد. منحنی‌های مربوط به متوسط مربع خطا برای تعداد سطوح ۲۵۶ و ۵۱۲ در شکل ۸ رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود میزان تغییر متوسط مربع خطا برای سیگنال به نویزهای پایین با تغییر سطوح کوانتیزاسیون ناچیز می‌باشد.

## ۶- مقایسه عملکرد کد DFT و کد RS

در این بخش هدف مقایسه عملکرد کد بلوکی DFT در میدان حقیقی و کد RS در میدان گالوا با نرخ کد و طول کلمه کد یکسان می‌باشد. برای بررسی کارایی کد RS پس از تولید اطلاعات در منبع، داده‌ها را کوانتیزه می‌نماییم. در شبیه‌سازی‌های انجام‌شده کوانتیزاسیون ۲۵۶ سطحی در نظر گرفته شده است. سپس هر داده کوانتیزه‌شده معادل یک سمبل در میدان  $GF(2^8)$  قرار داده شده و سمبل‌های حاصل وارد کدکننده RS می‌گردند. پس از عملیات مدولاسیون و کدینگ، خروجی کدکننده را از کانال عبور داده و در گیرنده سمبل‌های دریافتی بعد از دمدولاسیون وارد بخش کدگشا شده و در نهایت پس از عمل کدگشایی به جای هر کدام از داده‌های خروجی معادل حقیقی آن قرار داده می‌شود. مشابه حالات قبل برای تحلیل کارایی کد RS متوسط مربع خطای داده‌های دریافتی نسبت به داده‌های اولیه به کار برده می‌شود. نتیجه شبیه‌سازی انجام‌شده در مقایسه کد RS و کد DFT در شکل ۹ ملاحظه می‌گردد. می‌توان مشاهده نمود که عملکرد کد DFT در سیگنال به نویزهای پایین نسبت به کد RS بهتر است و از طرفی کد RS در سیگنال به نویزهای بالا عملکرد مناسب‌تری را از خود نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود چون عملکرد کد RS در سیگنال به نویز بالا بهتر است می‌توان نتیجه گرفت که در کد DFT اثر ناشی از نویز کوانتیزاسیون نسبت به کد RS بیشتر است. این نتیجه ناشی از این واقعیت است که در طراحی کد DFT فرض بر آن است که نمونه‌های اطلاعات حقیقی و یا مختلط می‌باشند و انجام عملیات کوانتیزاسیون نه تنها نویز کوانتیزاسیون را اضافه می‌کند بلکه کد DFT را هم از حالت ایده‌آل خارج می‌سازد و به همین دلیل در غیاب اختلالات ناشی از کانال، استفاده از کد DFT میزان MSE را حتی از حالت گذشته نیز بیشتر می‌کند و در نتیجه استفاده از آن مفید نخواهد بود. ولی در حضور اختلالات ناشی از کانال و در سیگنال به نویزهای پایین روش کدینگ DFT در نرخ کد و طول کلمه کد یکسان عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهد.



شکل ۶: مقایسه متوسط مربع خطا برای بلوک‌های ۴ سمبلی بعد از عبور از کانال فیدینگ.



شکل ۷: مقایسه متوسط مربع خطا برای نرخ کدهای ۱/۲ و ۲/۳.

کاهش در توان دریافتی ناشی از افزایش پارامتر فیدینگ قابل چشم‌پوشی است و به همین دلیل بهترین کارایی مربوط به حالت بدون فیدینگ،  $K_r = \infty$  می‌باشد. این درحالیست که در سیگنال به نویزهای پایین به علت کاهشی که در سیگنال به نویز دریافتی حاصل می‌گردد، حالت بدون فیدینگ در بعضی از شرایط کارایی بهتری را از خود نشان می‌دهد.

تا بدین‌جا نرخ کد ثابت و برابر با ۱/۲ فرض شده است. حال نرخ کد را تغییر داده و اثر آن را روی متوسط مربع خطا بررسی می‌کنیم. در نرخ کد  $R = 1/2$  با اضافه‌نمودن ۴ سمبل افزودگی به بلوک‌های ۴ سمبلی، کلمه کدهای ۸ تایی تولید می‌گردد. در این قسمت برای تولید کدهایی با نرخ کد ۲/۳، تعداد سمبل‌های افزودگی را ۲ سمبل در نظر گرفته و کلمه کد ۶ سمبلی تولید می‌گردد. انتظار می‌رود به علت کاهش سمبل‌های افزودگی کارایی کد جدید نسبت به حالت قبل کمتر باشد و همان‌طور که در شکل ۷ ملاحظه می‌گردد، این پیش‌بینی تحقق یافته است. به عنوان مثال در نرخ کد ۲/۳ برای رسیدن به  $MSE = 10^{-3}$  نسبت به نرخ کد ۱/۲ سیگنال به نویز را باید نزدیک به ۴ dB افزایش داد.

در قسمت آخر این بخش به بررسی تأثیر نویز کوانتیزاسیون بر عملکرد کد DFT می‌پردازیم. همان‌طور که می‌دانیم با بالا بردن تعداد سطوح کوانتیزاسیون، میزان نویز کوانتیزاسیون کاهش می‌یابد؛ لذا به منظور مطالعه اثر این نوع نویز، کارایی روش کدینگ را در صورت استفاده از تعداد متفاوت سطوح کوانتیزاسیون مورد بررسی قرار می‌دهیم. شبیه‌سازی‌های انجام‌شده نشان می‌دهد که کارایی روش کدینگ DFT

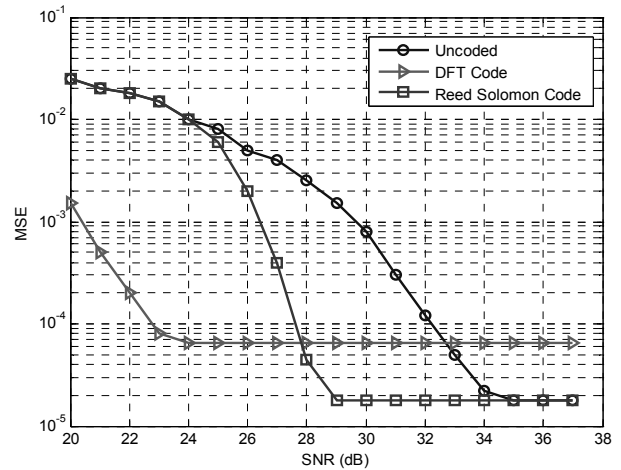
نتیجه به آن دلیل است که نویز کوانتیزاسیون روی کد DFT اثر مخرب بیشتری دارد و این کد را از حالت ایده آل خارج می‌نماید و به همین دلیل در غیاب اختلالات ناشی از کانال استفاده از کد DFT مناسب نخواهد بود.

## مراجع

- [1] T. G. Marshall, JR., "Coding of real-number sequences for error correction: a digital signal processing problem," *IEEE J. on Selected Areas in Comm.*, vol. 2, no. 1, pp. 381-392, Mar. 1984.
- [2] F. Marvasti, "Nonuniform sampling, theory and practice," *Kluwer Academic*, Plenum Publishers, 2001.
- [3] F. Marvasti and M. Nafie, "Sampling theorem: a unified outlook on information theory, block and convolutional codes," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E76-A, no. 9, pp. 1381-1393, Sep. 1993.
- [4] F. Marvasti, M. Hasan, M. Echtrat, and S. Talebi, "Efficient techniques for burst error recovery using FFT and other transform kernels," *IEEE Trans. Signal processing*, vol. 47, no. 4, pp. 1065-1075, Apr. 1999.
- [5] J. Vieira and P. Ferreira, "Noniterative reconstruction of band limited signals and coding techniques," *IEEE Digital Signal Processing Workshop*, pp 149-152, Sep. 1996.
- [6] P. Azmi and F. Marvasti, "Robust decoding of DFT-based error control codes for impulsive and additive white gaussian noise channels," in *IEEE Proc., Communications*, vol. 152, issue 3, pp. 265-271, Jun. 2005.

**پائیز عزمی** تحصیلات خود در مقاطع کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکترا در رشته مهندسی برق را به ترتیب در سال‌های ۱۳۷۵، ۱۳۷۷ و ۱۳۸۱ در دانشگاه صنعتی شریف به پایان رسانده است. نامبرده هم‌اکنون دانشیار بخش مهندسی برق دانشگاه تربیت مدرس می‌باشد. زمینه‌های پژوهشی مورد علاقه ایشان سیستم‌های CDMA و سیستم‌های مخابرات نوری و نیز تئوری اطلاعات و کدینگ و پردازش سیگنال‌های دیجیتال و مالتی‌مدیا می‌باشد.

**محمد مهدی سرمدهی** تحصیلات خود در رشته مهندسی برق را در مقطع کارشناسی در سال ۱۳۸۲ در دانشکده مخابرات و در مقطع کارشناسی ارشد در دانشگاه تربیت مدرس به ترتیب در سال‌های ۱۳۸۲ و ۱۳۸۴ به پایان رسانده است. زمینه‌های پژوهشی مورد علاقه ایشان تئوری کدینگ و پردازش سیگنال‌های دیجیتال می‌باشد.



شکل ۹: مقایسه عملکرد کد DFT در میدان حقیقی و کد RS در میدان گالوا.

## ۷- نتیجه گیری

در این مقاله به بررسی تأثیر نویز کوانتیزاسیون، نویز کانال و فیدینگ بر عملکرد کد DFT پرداخته شد و همان‌طور که مشاهده گردید نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها تأیید نمود که استفاده از این نوع کد در سیگنال به نویزهای پایین منجر به کاهش سیگنال به نویز لازم برای دستیابی به یک MSE دلخواه می‌گردد. همچنین مشاهده شد که هرگاه طول بلوک‌های ورودی به کدکننده افزوده گردد، عملکرد کدینگ در سیگنال به نویزهای پایین بهبود می‌یابد. همچنین نشان داده شد که مشابه سایر انواع کدهای کانال کاهش نرخ کد منجر به افزایش کارایی کد DFT می‌گردد. نتیجه دیگری که در این مقاله ارائه گردید آن است که روش کدینگ DFT در صورت استفاده از تعداد سطوح کوانتیزاسیون کمتر از ۲۵۶ کارایی مناسبی ندارد و تفاوت کارایی در سیگنال به نویزهای پایین بین حالتی که تعداد این سطوح ۲۵۶ و ۵۱۲ است قابل چشم‌پوشی می‌باشد. در بخش پایانی این مقاله به مقایسه کد DFT و کد RS پرداخته شد و نتایج حاصل نشان داد که عملکرد کد DFT در سیگنال به نویزهای پایین بهتر و در سیگنال به نویزهای بالا نسبت به کد RS بدتر می‌باشد و این