

ارائه یک روش تحلیلی دقیق برای بررسی تأثیر خطای تخمین بهره کانال بر عملکرد گیرنده‌های دایورسیتی MRC و EGC در کانال‌های فیدینگ رایلی

حسین صمیمی و پائیز عزمی

چکیده: برای انتخاب و وزن‌دهی سیگنال‌های دریافتی در شاخه‌های دایورسیتی و ترکیب همدوس آنها، نیاز به تخمین بهره کانال می‌باشد. فرآیند تخمین کانال ایده‌آل نبوده و خطاهای موجود در آن باعث ایجاد خطا در تعیین ضرایب وزن‌دهی مورد استفاده در شاخه‌های دایورسیتی خواهد شد. این خطاها معمولاً به صورت متغیرهای گوسی مدل می‌شوند. در این مقاله یک روش تحلیلی دقیق برای بررسی عملکرد شماهای دایورسیتی MRC و EGC در کانال‌های فیدینگ رایلی با در نظر گرفتن خطاهای گوسی در ضرایب وزن‌دهی ارائه می‌شود. در مقایسه با روش‌های تحلیلی موجود، روش ارائه‌شده در این مقاله منجر به یک رابطه بسته برای محاسبه احتمال خطای متوسط می‌گردد. در روش پیشنهادی پارامتر جدیدی با عنوان سیگنال به نویز مؤثر مورد استفاده قرار می‌گیرد که معرف تأثیرات ناشی از خطاهای گوسی موجود در ضرایب وزن‌دهی می‌باشد. روابط ارائه‌شده نشان می‌دهند که می‌توان احتمال خطای متوسط را با استفاده از روابط دقیق موجود که با فرض ایده‌آل بودن فرآیند تخمین کانال استخراج شده‌اند و صرفاً با جایگزین نمودن سیگنال به نویز در هر شاخه دایورسیتی با سیگنال به نویز مؤثر، محاسبه کرد. فرم بسته و مناسب روابط تحلیلی ارائه‌شده در این مقاله اجازه می‌دهد تا بتوان از آنها به عنوان ابزار مناسبی برای بررسی عملکرد گیرنده‌های MRC و EGC در کانال‌های فیدینگ رایلی و نیز تحلیل تأثیر خطاهای ناشی از تخمین کانال استفاده نمود.

کلید واژه: دایورسیتی، فیدینگ رایلی، خطای گوسی، EGC، MRC.

۱- مقدمه

استفاده از تکنیک دایورسیتی در گیرنده سیستم‌های مخابرات سیار، یکی از روش‌های متداول جهت کاهش اثرات مخرب فیدینگ ناشی از انتشار چندمسیری می‌باشد. عملکرد هر سیستم دایورسیتی به روشی بستگی دارد که جهت انتخاب و نیز ترکیب سیگنال‌های دریافتی از شاخه‌های دایورسیتی به کار گرفته می‌شود. بدین منظور می‌توان سیگنال‌ها را با استفاده از تکنیک‌های مختلفی چون SC^1 ، EGC^2 ، MRC^3 و یا تلفیقی از تکنیک‌های SC و MRC که اصطلاحاً GSC^4 یا

این مقاله در تاریخ ۱ مهر ماه ۱۳۸۵ دریافت و در تاریخ ۳۰ بهمن ماه ۱۳۸۵ بازنگری شد.

حسین صمیمی، مرکز تحقیقات مخابرات ایران، خیابان کارگر شمالی، تهران، صندوق پستی ۳۹۶۱-۱۴۱۵۵، ایران (email: samimi@itrc.ac.ir).

پائیز عزمی، گروه مخابرات، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه تربیت مدرس، تهران (email: pazmi@modares.ac.ir).

5. Hybrid-Selection MRC
6. Probability Distribution Function
7. Signal-to-Noise Ratio
8. Moment Generating Function
9. Maximum-Likelihood

1. Selective Combining
2. Equal-Gain Combining
3. Maximal-Ratio Combining
4. Generalized Selection Combining

دریافتی در l امین شاخه از گیرنده دایورسیتی ($1 \leq l \leq L$) به صورت زیر قابل توصیف است

$$r_l = g_l X + n_l, \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (1)$$

که در آن g_l بهره مختلط کانال است. فرض می‌کنیم مؤلفه‌های موهومی و حقیقی g_l ناهمبسته بوده و هر یک دارای توزیع گوسی با متوسط صفر و واریانس σ_g^2 باشند. n_l نیز نویز گوسی مختلط با میانگین صفر و واریانس $N/2$ در هر بعد (مؤلفه‌های موهومی و حقیقی) فرض می‌شود. بهره‌های کانال g_l و g_q در دو شاخه مختلف l و q از گیرنده دایورسیتی، ناهمبسته دارای توزیع آماری یکسان فرض می‌شوند. همچنین متغیرهای تصادفی g_l و n_l ناهمبسته در نظر گرفته می‌شوند. برای ترکیب سیگنال‌های دریافتی $\{r_l\}$ ، گیرنده ناچار به تخمین بهره g_l در هر شاخه دایورسیتی می‌باشد. بدین منظور می‌توان از سیگنال پایلوت استفاده کرد. فرض کنیم p_l معرف مقدار تخمینی g_l در شاخه l ام گیرنده دایورسیتی باشد. گیرنده به صورت خطی و با استفاده از ضرایب وزن‌دهی $\{\alpha_l\}$ که تابعی از $\{p_l\}$ هستند - سیگنال‌های $\{r_l\}$ را ترکیب نموده و سیگنال خروجی ترکیب‌کننده دایورسیتی را به فرم زیر تولید می‌کند

$$r = \sum_{l=1}^L \alpha_l r_l = X \sum_{l=1}^L \alpha_l g_l + \sum_{l=1}^L \alpha_l n_l \quad (2)$$

ضرایب وزنی $\{\alpha_l\}$ با توجه به شمای دایورسیتی مورد استفاده تعیین می‌شوند. به عنوان مثال هنگام استفاده از شمای دایورسیتی MRC و EGC، به ترتیب $\alpha_l = p_l^* / |p_l|$ و $\alpha_l = p_l^*$ می‌باشند.

۳- مدل‌سازی خطای تخمین کانال در ضرایب وزن دهی

در این بخش مدل ارائه‌شده در [۲] به اختصار معرفی می‌شود. فرض اصلی در این مدل آن است که بهره واقعی در کانال و بهره تخمینی، دو متغیر تصادفی مختلط مشترکاً گوسی می‌باشند. این مدل به طور متداول در بررسی اثر ایده‌آل نبودن تخمین کانال بر عملکرد گیرنده‌های دایورسیتی مورد استفاده قرار گرفته است [۳] تا [۷]. فرض کنیم p_k بهره تخمینی کانال یک متغیر گوسی مختلط با میانگین صفر و واریانس σ_p^2 در هر بعد بوده و به صورت زیر توصیف گردد

$$p_k = \hat{a}_k \exp(j\theta_k) \quad (3)$$

در نتیجه متغیر \hat{a}_k دارای توزیع رایلی با واریانس $2\sigma_p^2$ بوده و متغیر θ_k دارای توزیع یکنواخت در بازه $[0, 2\pi)$ می‌باشد. فرض می‌شود سیگنال‌های دریافتی در شاخه‌های دایورسیتی دارای توزیع مشابه بوده و همبستگی بین سیگنال‌های پایلوت و اطلاعات دریافتی روی هر شاخه از گیرنده دایورسیتی یکسان باشد. در [۲] روش خاصی برای مدل‌نمودن همبستگی بین g_k و p_k ارائه شده است. این روش اجازه می‌دهد تا بتوان SNR را به دو مؤلفه تجزیه نمود که یکی کاملاً وابسته به نویز دیگری مستقل از نویز باشد. با استفاده از این روش خواهیم داشت

$$g_k = a_k \exp(j\theta_k + j\phi_k) \\ = \{(x_k + R_c \hat{a}_k / \sigma_p^2) + j(y_k + R_{cs} \hat{a}_k / \sigma_p^2)\} \cdot \exp(j\theta_k) \quad (4) \\ = (x_k + jy_k) p_k / |p_k| + (R_c + jR_{cs}) p_k / \sigma_p^2$$

که در آن a_k دامنه g_k و ϕ_k اختلاف فاز بین g_k و p_k می‌باشد. پارامترهای R_c و R_{cs} نیز چنین تعریف می‌شوند

$$R_c = E\{\text{Re}(p_k) \text{Re}(g_k)\} = E\{\text{Im}(p_k) \text{Im}(g_k)\} \\ R_{cs} = E\{\text{Re}(p_k) \text{Im}(g_k)\} = -E\{\text{Im}(p_k) \text{Re}(g_k)\} \quad (5)$$

سمبل‌های مربوطه بر عملکرد کلی گیرنده دایورسیتی MRC پرداخته شده است. در [۹] با فرض وجود خطاهای گوسی در ضرایب وزن‌دهی، عبارات دقیقی برای محاسبه احتمال خطا هنگام بکارگیری شمای H-S/MRC و استفاده از شمای مدولاسیون BPSK، QPSK و MPSK ارائه شده است؛ هرچند به واسطه پیچیدگی محاسبات ارائه‌شده در [۹]، احتمال خطای متوسط به صورت روابط بسته قابل توصیف نمی‌باشد.

هدف از این مقاله ارائه روابط تحلیلی به فرم بسته برای محاسبه دقیق احتمال خطای متوسط هنگام بکارگیری شمای دایورسیتی MRC و EGC همراه با مدولاسیون BPSK در کانال فیدینگ رایلی مستقل و با در نظر گرفتن وجود خطاهای گوسی در ضرایب وزن‌دهی می‌باشد. در این مقاله نشان داده می‌شود که هنگام بکارگیری شمای MRC و EGC با فرض وجود خطای گوسی در ضرایب وزن‌دهی، احتمال خطای مشروط به بهره واقعی کانال، بهره تخمینی و اختلاف فاز بین آنها بستگی دارد. در ادامه این مقاله روش تحلیلی جدیدی برای محاسبه احتمال خطای متوسط با استفاده از احتمال خطای مشروط پیشنهاد می‌شود که در مقایسه با روش‌های تحلیلی موجود، منجر به یک رابطه بسته برای محاسبه احتمال خطای متوسط می‌گردد. در روش پیشنهادی از پارامتر جدیدی با عنوان سیگنال به نویز مؤثر استفاده شده که معرف تأثیرات ناشی از خطاهای گوسی موجود در ضرایب وزن‌دهی می‌باشد. روابط ارائه‌شده نشان می‌دهند که می‌توان احتمال خطای متوسط را با استفاده از روابط دقیق موجود که تحت شرایط ایده‌آل بودن فرآیند تخمین کانال ارائه شده‌اند و صرفاً با جایگزین نمودن سیگنال به نویز در هر شاخه دایورسیتی با پارامتر جدید سیگنال به نویز مؤثر، محاسبه نمود. فرم بسته و مناسب روابط تحلیلی ارائه‌شده در این مقاله اجازه می‌دهد تا بتوان از آنها به عنوان ابزار مناسبی برای بررسی عملکرد گیرنده‌های MRC و EGC در کانال‌های فیدینگ رایلی و نیز تحلیل تأثیر خطاهای ناشی از تخمین کانال استفاده کرد. نتایج بررسی نشان می‌دهند که با فرض وجود خطاهای گوسی در ضرایب وزن‌دهی و در SNRهای بالا، احتمال خطای متوسط دارای یک سطح اشباع است که صرفاً به سیگنال به نویز متوسط و نیز مرتبه دایورسیتی بستگی دارد. این امر با نتایج گزارش شده در مقالات موجود [۹] مطابقت دارد.

به دنبال این مقدمه در بخش بعد مدل سیستم تحت بررسی در این مقاله معرفی می‌شود. در بخش سوم مروری اجمالی بر روش ارائه‌شده در [۲] جهت مدل‌سازی خطاهای گوسی در ضرایب وزن‌دهی ناشی از غیر ایده‌آل بودن تخمین کانال انجام می‌گیرد. در بخش چهارم با در نظر گرفتن خطاهای گوسی در ضرایب وزن‌دهی، احتمال خطای مشروط برای گیرنده MRC محاسبه شده و روش پیشنهادی در این مقاله برای محاسبه احتمال خطای متوسط مطرح می‌گردد. در بخش پنجم روش پیشنهادی جهت محاسبه احتمال خطای متوسط برای گیرنده EGC ارائه شده است. نتایج عددی و تحلیل‌های مربوطه در بخش ششم ارائه می‌شوند. بخش پایانی نیز به جمع‌بندی مقاله اختصاص دارد.

۲- مدل سیستم

مدل در نظر گرفته شده در این مقاله مشابه مدلی است که در [۷] و [۹] بررسی شده است. فرض کنیم بیت‌های اطلاعاتی به صورت BPSK مدوله شده و متغیر تصادفی $X = \pm \sqrt{E_S}$ معرف سمبل‌های هم‌احتمال ارسالی بوده و E_S انرژی متوسط سمبل باشد. فیدینگ کانال از نوع غیرانتخابی در نظر گرفته شده و فرض می‌شود در بازه ارسالی مربوط به یک سمبل دارای تغییرات آرامی باشد. با توجه به این فرضیات، سیگنال

متوسط‌گیری کرد

$$\bar{P}_e = E_U \{E_W \{Q(\sqrt{\frac{\gamma E_s}{N}}(W+U))\}\} \quad (14)$$

با توجه به (۳)، $\hat{a}_l^r = \text{Re}^r \{p_l\} + \text{Im}^r \{p_l\}$ می‌باشد، لذا می‌توان متغیر تصادفی U در (۱۳) را به صورت زیر توصیف کرد

$$U = \left(\frac{R_c}{\sigma_p}\right) \sqrt{\sum_{l=1}^L \hat{a}_l^r} \quad (15)$$

$$= \frac{R_c}{\sigma_p} \sqrt{\sum_{l=1}^L \left[\left(\frac{\text{Re}(p_l)}{\sigma_p}\right)^2 + \left(\frac{\text{Im}(p_l)}{\sigma_p}\right)^2 \right]} = \left(\frac{R_c}{\sigma_p}\right) Z$$

چون بخش‌های حقیقی و موهومی p_l متغیرهای تصادفی گوسی مستقل از هم با میانگین صفر و واریانس σ_p^2 می‌باشند، لذا متغیر تصادفی Z در (۱۵) دارای توزیع کای (Chi) به فرم

$$f_Z(Z) = \frac{\gamma^L Z^{L-1} \exp(-\frac{Z^2}{\gamma})}{\gamma^L \Gamma(L)} \quad (16)$$

می‌باشد. با توجه به این امر و با فرض $\sigma = R_c/\sigma_p$ ، pdf متغیر تصادفی U به فرم زیر قابل توصیف خواهد بود

$$f_U(U) = \frac{\gamma U^{\gamma L-1} \exp(-\frac{U^2}{\gamma \sigma^2})}{\gamma^L \sigma^{\gamma L} \Gamma(L)} \quad (17)$$

در (۱۲) متغیرهای تصادفی $\{x_l\}$ گوسی با میانگین صفر و واریانس σ_e^2 می‌باشند، لذا به ازای $\{\hat{a}_l\}$ ثابت، متغیر تصادفی W مجموع L متغیر تصادفی گوسی هر یک به فرم $\hat{a}_l x_l / \sqrt{\sum_{l=1}^L \hat{a}_l^2}$ با میانگین صفر و واریانس $(\hat{a}_l^2 \sigma_e^2) / \sum_{l=1}^L \hat{a}_l^2$ خواهد بود. با توجه به این امر و به ازای $\{\hat{a}_l\}$ ثابت، به سادگی می‌توان نشان داد که متغیر تصادفی W دارای توزیع گوسی با میانگین صفر و واریانس $\sigma_W^2 = \sigma_e^2 (1 - |\rho|^2)$ می‌باشد. در نتیجه با فرض $\{\hat{a}_l\}$ ثابت، pdf متغیر تصادفی W به صورت زیر قابل توصیف است

$$f_W(W | \{\hat{a}_l\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_W} \exp\left(-\frac{W^2}{2\sigma_W^2}\right) \quad (18)$$

با توجه به (۱۸)، $f_W(W | \{\hat{a}_l\})$ مستقل از $\{\hat{a}_l\}$ است، بنابراین $f_W(W) = f_W(W | \{\hat{a}_l\})$ می‌باشد. با استفاده از $f_U(U)$ و $f_W(W)$ و بکارگیری (۱۴)، می‌توان احتمال خطای متوسط را محاسبه نمود.

در این مقاله روش جدیدی برای محاسبه احتمال خطای متوسط در (۱۴) ارائه شده است. بدین منظور ابتدا (۱۴) به فرم زیر نمایش داده می‌شود

$$\bar{P}_e = E_U \{E_W \{Q(\sqrt{\frac{\gamma E_s}{N}}(W+U)) | U\}\} \quad (19)$$

برای محاسبه عبارت فوق از لم زیر استفاده می‌کنیم [۱۰]:
لم: اگر S یک متغیر تصادفی گوسی با میانگین صفر و واریانس واحد باشد، آنگاه

$$E[Q(\alpha + \lambda S)] = Q\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}\right) \quad (20)$$

با استفاده از این لم داریم

در [۲] نشان داده شده است که متغیرهای تصادفی x_k و y_k از هم مستقل بوده و دارای pdf گوسی با میانگین صفر و واریانس $\sigma_e^2 = \sigma_g^2 - ((R_c^r + R_{cs}^r)/\sigma_p^r)$ می‌باشند. همچنین متغیرهای تصادفی x_k و y_k مستقل از \hat{a}_k هستند. ضریب همبستگی مختلط بین g_k و p_k نیز با ρ نشان داده شده و چنین محاسبه می‌شود

$$\rho = \frac{E\{g_k p_k^*\}}{\sqrt{E\{p_k p_k^*\} \cdot E\{g_k g_k^*\}}} = \frac{(2R_c + j2R_{cs})}{(2\sigma_p \sigma_g)} \quad (6)$$

$$= \frac{R_c}{(\sigma_p \sigma_g)} + \frac{jR_{cs}}{(\sigma_p \sigma_g)} = \text{Re}\{\rho\} + j \text{Im}\{\rho\}$$

با توجه به تعریف فوق، می‌توان نوشت

$$\sigma_e^r = \sigma_g^r (1 - |\rho|^2) \quad (7)$$

۴- محاسبه احتمال خطای متوسط برای گیرنده MRC

در حالت کلی و با توجه به (۲) می‌توان احتمال خطا را چنین محاسبه نمود

$$P_e = P\{\text{Re}\{r\} < 0 | X = \sqrt{E_s}\} \quad (8)$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{\gamma E_s}{N}} \frac{\text{Re}\{\alpha_l g_l\}}{\sqrt{\sum_{l=1}^L |\alpha_l|^2}}\right)$$

هنگام استفاده از شمای دایورسیتی MRC، داریم $\alpha_l = p_l^*$ ، لذا با توجه به (۲)، (۳)، به فرم زیر قابل بیان می‌باشد

$$r = \sqrt{E_s} \sum_{l=1}^L \hat{a}_l a_l e^{j\phi_l} + \sum_{l=1}^L \hat{a}_l e^{-j\theta_l} n_l \quad (9)$$

و از آنجا با استفاده از (۸)، احتمال خطا به صورت زیر بیان می‌شود

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{\gamma E_s}{N}} \frac{\sum_{l=1}^L \hat{a}_l a_l \cos(\phi_l)}{\sqrt{\sum_{l=1}^L \hat{a}_l^2}}\right) \quad (10)$$

رابطه (۱۰) نشان می‌دهد که P_e در واقع احتمال خطای مشروط بوده و به صورت تابعی از \hat{a}_l ، a_l و اختلاف فاز ϕ قابل توصیف است. با توجه به (۴)، داریم $a_l \cos(\phi_l) = x_l + R_c \hat{a}_l / \sigma_p^r$ ، لذا می‌توان (۱۰) را به فرم زیر بیان نمود

$$P_e = \left(\sqrt{\frac{\gamma E_s}{N}}(W+U)\right) \quad (11)$$

که در آن متغیرهای تصادفی W و U چنین تعریف می‌شوند

$$W = \frac{\sum_{l=1}^L \hat{a}_l x_l}{\sqrt{\sum_{l=1}^L \hat{a}_l^2}} \quad (12)$$

$$U = \left(\frac{R_c}{\sigma_p^r}\right) \sqrt{\sum_{l=1}^L \hat{a}_l^2} \quad (13)$$

با توجه به (۱۱)، برای محاسبه احتمال خطای متوسط (\bar{P}_e) باید از P_e روی تابع توزیع متغیرهای تصادفی W و U به صورت زیر

۵- روش پیشنهادی جهت محاسبه احتمال خطای متوسط برای گیرنده EGC

برای گیرنده EGC، $\alpha_l = p_l^* / |p_l|$ ، $(1 \leq l \leq L)$ می‌باشد. با جایگذاری مقدار α_l در (۲) خواهیم داشت

$$r = \sum_{l=1}^L \alpha_l r_l = X \sum_{l=1}^L a_l e^{j\phi_l} + \sum_{l=1}^L a_l e^{-j\phi_l} \quad (29)$$

و از آنجا با استفاده از (۸)، احتمال خطای مشروط به صورت زیر بیان خواهد شد

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{\gamma E_s}{N}} \frac{\text{Re}\{\alpha_l g_l\}}{\sqrt{\sum_{l=1}^L |\alpha_l|^2}}\right) \quad (30)$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{\gamma E_s}{LN}} \sum_{l=1}^L a_l \cos(\phi_l)\right)$$

با توجه به (۴)، داریم $a_l \cos(\phi_l) = x_l + R_c \hat{a}_l / \sigma_p^*$ ، با این جایگذاری (۳۰) به فرم زیر تبدیل می‌شود

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{\gamma E_s}{LN}} \sum_{l=1}^L a_l \cos(\phi_l)\right) \quad (31)$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{\gamma E_s}{LN}} \left(\sum_{l=1}^L x_l + \frac{R_c}{\sigma_p^*} \sum_{l=1}^L \hat{a}_l\right)\right)$$

$$U_r = \frac{1}{\sigma_p \sqrt{\gamma}} \sum_{l=1}^L \hat{a}_l = \frac{1}{\sigma_p \sqrt{\gamma}} Z_r \quad (32)$$

$$W_r = \sum_{l=1}^L x_l \quad (33)$$

رابطه (۳۱) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{\gamma E_s}{LN}} (W_r + R_c \frac{\sqrt{\gamma} U_r}{\sigma_p})\right) \quad (34)$$

برای محاسبه \bar{P}_e باید از رابطه فوق روی متغیرهای تصادفی W_r و U_r متوسط‌گیری نمود. با توجه به توضیحات پیشین و با توجه به اینکه متغیر تصادفی $\{x_l\}$ گوسی با میانگین صفر و واریانس σ_e^2 می‌باشند، متغیر تصادفی W_r یک متغیر تصادفی گوسی با میانگین صفر و واریانس $L\sigma_e^2$ خواهد بود. با استفاده از لم (۱)، داریم

$$\bar{P}_e = E_{U_r} \{E_{W_r} \{P_e | U_r\}\} \quad (35)$$

$$= Q\left(\frac{\sqrt{\frac{\gamma E_s R_c^*}{N L \sigma_p^*}} U_r}{\sqrt{\frac{\gamma E_s}{N L} \sigma_g^* (1 - |\rho|^2) + 1}}\right)$$

با استفاده از $\bar{\gamma} = \gamma (E_s / N) \sigma_g^*$ به عنوان SNR متوسط در هر شاخه از گیرنده دایورسیتی و نیز $\text{Re}\{\rho\} = R_c / (\sigma_p \sigma_g)$ ، و با توجه به تعریف γ_{eff} در (۲۴)، (۳۵) به صورت زیر بیان خواهد شد

$$\bar{P}_e = E_{U_r} \{E_{W_r} \{P_e | U_r\}\} \quad (36)$$

$$= Q\left(\frac{\sqrt{\bar{\gamma} \text{Re}\{\rho\}} U_r}{\sqrt{L(\bar{\gamma}(1 - |\rho|^2) + 1)}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{\bar{\gamma}}{L}} U_r\right)$$

احتمال خطای متوسط (\bar{P}_e) با متوسط‌گیری از (۳۶) روی تابع توزیع

$$E_W \{Q(\sqrt{\frac{\gamma E_s}{N}} (W + U)) | U\} = Q\left(\frac{\sqrt{\frac{\gamma E_s}{N}} U}{\sqrt{(\frac{\gamma E_s}{N}) \sigma_g^* (1 - |\rho|^2) + 1}}\right) \quad (21)$$

با تعریف $\bar{\gamma} = \gamma (E_s / N) \sigma_g^*$ به عنوان SNR متوسط در هر شاخه از گیرنده دایورسیتی و جایگذاری $U = (R_c / \sigma_p) Z$ از (۱۵)، (۲۱) به صورت زیر بیان خواهد شد

$$E_W \{Q(\sqrt{\frac{\gamma E_s}{N}} (W + U)) | U\} = Q\left(\frac{\sqrt{\bar{\gamma}} \left(\frac{R_c}{\sigma_g \sigma_p}\right) Z}{\sqrt{\bar{\gamma}(1 - |\rho|^2) + 1}}\right) \quad (22)$$

با توجه به (۶) داریم $\text{Re}\{\rho\} = R_c / (\sigma_g \sigma_p)$ ، که با جایگذاری آن در (۲۲) خواهیم داشت

$$E_W \{Q(\sqrt{\frac{\gamma E_s}{N}} (W + U)) | U\} = Q\left(\sqrt{\frac{\bar{\gamma} (\text{Re}\{\rho\})^2 Z^2}{\bar{\gamma}(1 - |\rho|^2) + 1}}\right) \quad (23)$$

با تعریف

$$\gamma_{eff} = \frac{\bar{\gamma} (\text{Re}\{\rho\})^2}{\bar{\gamma}(1 - |\rho|^2) + 1} \quad (24)$$

به عنوان SNR مؤثر در هر شاخه از گیرنده دایورسیتی، (۲۳) به صورت زیر تبدیل خواهد شد

$$E_W [Q(\sqrt{\frac{\gamma E_s}{N}} (W + U)) | U] = Q(\sqrt{\gamma_{eff} Z^2}) \quad (25)$$

با بکارگیری رابطه فوق در عبارت مربوط به محاسبه احتمال خطای متوسط (۱۴)، خواهیم داشت

$$\bar{P}_e = E_{U_r} \{Q(\sqrt{\gamma_{eff} Z^2})\} = \quad (26)$$

$$E_Z [Q(\sqrt{\gamma_{eff} Z^2})] = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\sqrt{\gamma_{eff} Z^2}) f_Z(Z) dZ$$

با جایگذاری $f_Z(Z)$ از (۱۶) در (۲۶)، به رابطه زیر دست خواهیم یافت

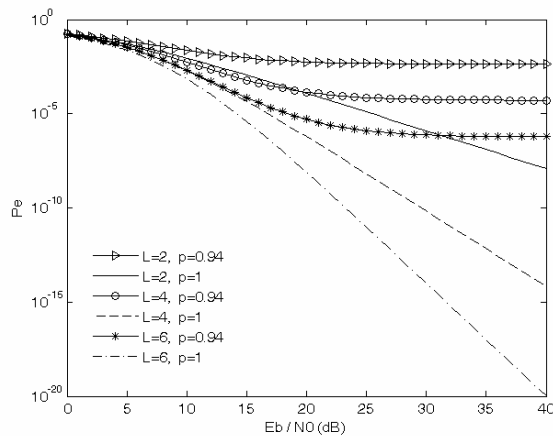
$$P_e = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\sqrt{\gamma_{eff} Z^2}) \frac{\gamma^{\nu} \exp(-\frac{Z^2}{\gamma})}{\gamma^{\nu} \Gamma(\nu)} dZ \quad (27)$$

$$= \frac{\gamma^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\sqrt{\gamma_{eff} Z^2}) Z^{\nu-1} \exp(-\frac{Z^2}{\gamma}) dZ$$

برای محاسبه انتگرال فوق می‌توان از رابطه انتگرالی ارائه‌شده در [۱۱] (۱۴-۱۵) استفاده نمود و به رابطه‌ای به فرم بسته برای احتمال خطای متوسط به صورت زیر دست یافت

$$P_e = \frac{1}{\gamma^{\nu}} \left(1 - \left(\frac{1}{\gamma_{eff}} + 1\right)^{-1/\nu}\right)^{\nu L} \times \sum_{k=0}^{\nu L-1} \gamma^{-k} \binom{\nu L - 1 + k}{k} \left(1 + \left(\frac{1}{\gamma_{eff}} + 1\right)^{-1/\nu}\right)^k \quad (28)$$

رابطه (۲۸) دقیقاً مشابه رابطه مربوط به محاسبه احتمال خطای متوسط برای گیرنده MRC با فرض ایده‌آل بودن تخمین کانال است که در آن مقدار SNR با SNR مؤثر (۲۴) جایگزین شده است [۱۱].



شکل ۲: عملکرد گیرنده دایورسیتی MRC با استفاده از مقادیر دقیق (۲۸) با فرض $L=2,4,6$ و در دو حالت تخمین کانال ایده‌آل ($\rho=1$) و تخمین کانال غیر ایده‌آل ($\rho=0.94$).

استفاده از (۲۴) می‌توان نتیجه گرفت

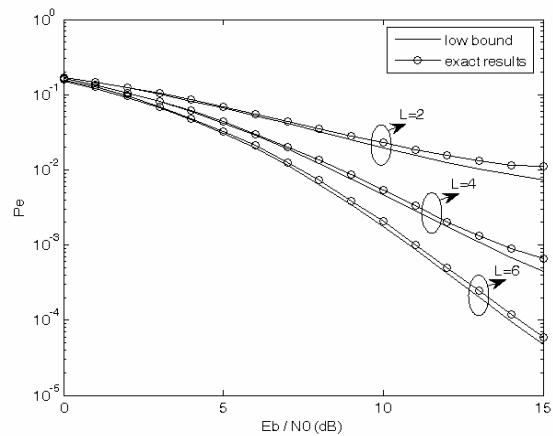
$$\gamma_{\text{eff}} = \frac{\bar{\gamma}(\text{Re}\{\rho\})^{\tau}}{\bar{\gamma}(1-|\rho|^{\tau})+1} \rightarrow \frac{(\text{Re}\{\rho\})^{\tau}}{(1-|\rho|^{\tau})+1} \quad (39)$$

در نتیجه SNR متوسط مستقل از E_b/N_0 خواهد شد. بنابراین مقدار احتمال خطای متوسط در (۲۸) نیز با فرض $E_b/N_0 \rightarrow \infty$ به مقدار ثابتی به فرم زیر میل خواهد نمود

$$P_e = \frac{1}{\tau^L} (1 - \frac{(1-|\rho|^{\tau})+1}{(\text{Re}\{\rho\})^{\tau}})^{-\tau} \times \sum_{k=0}^{\tau-L} \tau^{-k} \binom{\tau-L-1+k}{k} (1 + (1 - \frac{(1-|\rho|^{\tau})+1}{(\text{Re}\{\rho\})^{\tau}})^{-\tau})^k \quad (40)$$

این مقدار ثابت فقط به مرتبه دایورسیتی (L) و ضریب همبستگی بین بهره واقعی کانال و مقدار تخمینی آن (ρ) بستگی داشته و مستقل از مقدار SNR متوسط در هر شاخه دایورسیتی ($\bar{\gamma}$) است. نتیجه مشابهی در [۹] هنگام بررسی عملکرد شمای دایورسیتی H-S/MRC شرایط ایده‌آل نبودن فرآیند تخمین کانال و با فرض وجود خطاهای گوسی در ضرایب وزن دهی، گزارش شده است.

در شکل ۳ اثر وجود آفست فازی در فرآیند تخمین کانال بر عملکرد گیرنده MRC با استفاده از روابط دقیق ارائه شده در این مقاله بررسی شده است. در این مثال فرض می‌شود بهره تخمینی p_k صرفاً دارای یک آفست فازی غیر تصادفی ولی نامشخص برابر ϕ نسبت به بهره واقعی g_k بوده و به صورت $p_k = e^{j\phi} g_k$ توصیف شود. با استفاده از (۴) این حالت را می‌توان با $R_c = \sigma_g \sigma_p \cos(\phi)$ ، $R_{cs} = -\sigma_g \sigma_p \sin(\phi)$ و $\rho = \cos(\phi) - j \sin(\phi)$ ، $|\rho|=1$ و $\sigma_e = 0$ مدل نمود. نتایج ارائه شده در شکل ۳ نشان می‌دهند که حتی با فرض $|\rho|=1$ و $\sigma_e = 0$ ، وجود آفست فازی در فرآیند تخمین کانال باعث کاهش کیفیت عملکرد گیرنده MRC می‌گردد. با توجه به شکل ۳ می‌توان مشاهده نمود که به ازای $\phi = 90^\circ$ ، احتمال خطای متوسط برابر ۰/۵ می‌گردد. در شکل ۴ عملکرد گیرنده EGC برای $L=5$ و به ازای مقادیر مختلف ρ با استفاده از (۳۷) نشان داده شده است. همان‌طور که قبلاً اشاره شد، محاسبه احتمال خطای متوسط برای گیرنده EGC در حالتی که $L > 2$ باشد، صرفاً به صورت عددی قابل محاسبه است. شکل فوق نشان‌دهنده آن است که کاهش ρ باعث افزایش سطح اشباع در احتمال خطای متوسط خواهد شد.



شکل ۳: مقایسه احتمال خطای متوسط برای گیرنده دایورسیتی MRC با استفاده از رابطه دقیق پیشنهادی در این مقاله (۲۸) و حد پایین ارائه شده در [۴] به ازای $L=2,4,6$ و $\rho=0.95$.

متغیر تصادفی U_{τ} به فرم زیر قابل دستیابی است

$$\bar{P}_e = \int_0^{\infty} Q\left(\sqrt{\frac{\tau \bar{\gamma}_{\text{eff}}}{L}} U_{\tau}\right) f_{U_{\tau}}(U_{\tau}) dU_{\tau} \quad (37)$$

رابطه (۳۷) دقیقاً مشابه رابطه کلی مربوط به محاسبه احتمال خطای متوسط برای گیرنده EGC با فرض ایده‌آل بودن تخمین کانال می‌باشد [۱۲] که در آن مقدار SNR با مؤثر جایگزین شده است. متغیر تصادفی U_{τ} مجموع L تصادفی i.i.d از نوع رابلی است و رابطه بسته‌ای برای بیان pdf برای $L \geq 3$ آن وجود ندارد [۱۲]. در حالت خاص $L=2$ در [۱۲] روشی برای محاسبه احتمال خطای بیت با استفاده از فرم کلی نشان داده شده در (۳۹) ارائه شده است که با بکارگیری آن می‌توان به رابطه زیر دست یافت

$$\bar{P}_e = \frac{1}{\tau} \left(1 - \frac{\sqrt{\bar{\gamma}_{\text{eff}}(\tau + \bar{\gamma}_{\text{eff}})}}{1 + \bar{\gamma}_{\text{eff}}}\right) \quad (38)$$

۶- نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی مربوط به بررسی عملکرد گیرنده‌های MRC و EGC در کانال فیدینگ رابلی با فرض ایده‌آل نبودن فرآیند تخمین کانال و وجود خطاهای گوسی در ضرایب وزن دهی ارائه می‌شود. در شکل ۱ مقادیر دقیق احتمال خطای متوسط با استفاده از رابطه تحلیلی پیشنهادی در این مقاله (۲۸) و حد پایین ارائه شده در [۴] بر حسب E_b/N_0 (SNR متوسط دریافتی) نشان داده شده‌اند. در این شکل $R_c = 0.95$ و $R_{cs} = 0$ فرض شده و نتایج بر حسب مرتبه دایورسیتی $L=2,4,6$ ارائه شده‌اند. با توجه به شکل ۱ عملکرد گیرنده دایورسیتی MRC که با استفاده از رابطه دقیق (۲۸) حاصل می‌گردد، بدتر از میزان پیش‌بینی شده توسط حد پایین [۴] بوده و با افزایش مرتبه دایورسیتی، عملکرد گیرنده دایورسیتی به حد پایین نزدیک‌تر می‌گردد.

در شکل ۲ عملکرد گیرنده دایورسیتی MRC با استفاده از رابطه دقیق (۲۸) با فرض $L=2,4,6$ و در دو حالت تخمین کانال ایده‌آل ($\rho=1$) و تخمین کانال غیر ایده‌آل ($\rho=0.94$) با هم مقایسه شده است. این شکل گویای آن است که با فرض $E_b/N_0 \rightarrow \infty$ ، احتمال خطای متوسط در شرایط ایده‌آل نبودن تخمین کانال و وجود خطاهای گوسی در ضرایب وزن دهی به اشباع می‌رسد. این واقعیت را می‌توان چنین توجیه نمود. در حالتی که $\bar{\gamma} \rightarrow \infty$ (یا به طور معادل $E_b/N_0 \rightarrow \infty$)

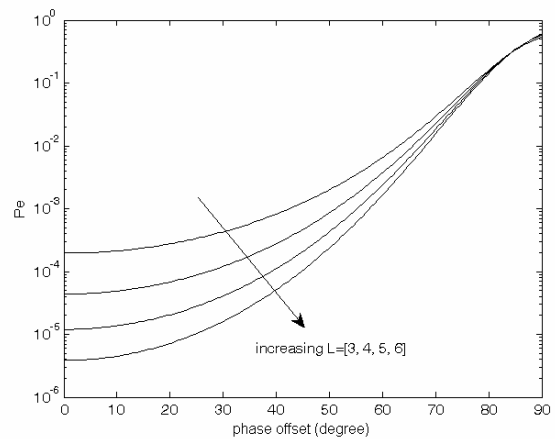
کانال، احتمال خطای متوسط در SNRهای بزرگ دارای یک سطح اشباع است که فقط به مرتبه دایورسیتی (L) و ضریب همبستگی بین بهره واقعی کانال و مقدار تخمینی آن (ρ) بستگی داشته و مستقل از مقدار SNR متوسط در هر شاخه دایورسیتی ($\bar{\gamma}$) است.

مراجع

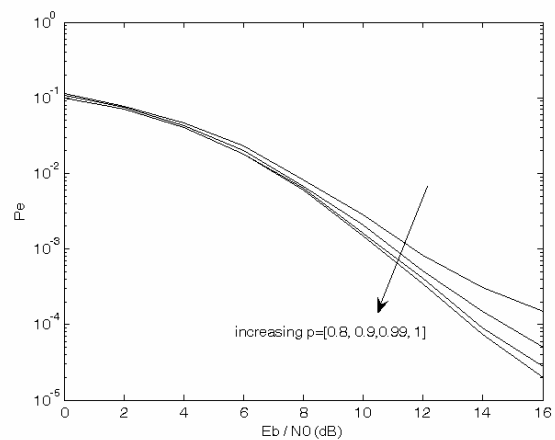
- [1] P. Bello and B. D. Nelin, "Predetection diversity combining with selectively fading channels," *IEEE Trans. Commun. Syst.*, vol. 10, no. 1, pp. 32-42, Mar. 1962.
- [2] J. Gans, "The effect of Gaussian error in maximal ratio combiners," *IEEE Trans. Commun. Technol.*, vol. 19, no. 4, pp. 492-500, Aug. 1971.
- [3] B. R. Tomiuk, N. C. Beaulieu, and A. A. Abu-Dayya, "General forms of maximal ratio diversity with weighting errors," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 47, no. 4, pp. 488-492, Apr. 1999.
- [4] A. Annamalai, "The effect of Gaussian error on the selection diversity combiners," *Wiley J. Wireless Commun. Mob. Comput.*, vol. 1, no. 3, pp. 419-435, Jul. 2001.
- [5] A. Annamalai and C. Tellambura, "Analysis of hybrid selection/maximal ratio diversity with Gaussian errors," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 1, no. 3, pp. 498-512, Jul. 2002.
- [6] Y. Ma, R. Schober, and S. Pasupathy, "Effect of imperfect channel estimation on MRC diversity in fading channels," in *Proc. IEEE ICC'04*, vol. 6, pp. 3163-3167, Jun. 2004.
- [7] Y. Ma, R. Schober, and S. Pasupathy, "Effect of imperfect channel estimation on MRC diversity in fading channels," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 54, no. 1, pp. 2137-2142, Nov. 2005.
- [8] W. Gifford, M. Win, and M. Chiani, "Diversity with practical channel estimation," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 4, no. 4, pp. 1935-1947, Jul. 2005.
- [9] L. Cao and N. C. Beaulieu, "Exact error rate analysis of diversity 16-QAM with channel estimation error," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 52, no. 6, pp. 1019-1029, Jun. 2004.
- [10] S. Verdo, *Multiuser Detection*. Cambridge, U. K.: Cambridge Univ. Press, 1998.
- [11] J. G. Proakis, *Digital Communications*, 3rd edition. New York: McGraw-Hill, 1995.
- [12] A. Annamalai and C. Tellambura, "Equal gain diversity receiver performance in wireless channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 48, no. 10, pp. 1732-1745, Oct. 2000.

حسین صمیمی تحصیلات خود را در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد در رشته مهندسی برق به ترتیب در سال‌های ۱۳۷۲ و ۱۳۷۶ در دانشگاه تهران به پایان رسانده رساله و در سال ۱۳۸۶ موفق به اخذ درجه دکترای مهندسی برق - مخابرات از دانشگاه تربیت مدرس شده است. نامبرده هم‌اکنون استادیار پژوهشی مرکز تحقیقات مخابرات ایران می‌باشد. زمینه‌های پژوهشی مورد علاقه ایشان شامل تئوری کدینگ، مخابرات سلولی و تکنیک‌های دایورسیتی می‌باشد.

پائیز عزمی تحصیلات خود در مقاطع کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکترا در رشته مهندسی برق را به ترتیب در سال‌های ۱۳۷۵، ۱۳۷۷ و ۱۳۸۱ در دانشگاه صنعتی شریف به پایان رسانده است. نامبرده هم‌اکنون دانشیار بخش مهندسی برق دانشگاه تربیت مدرس می‌باشد. زمینه‌های پژوهشی مورد علاقه ایشان سیستم‌های CDMA و سیستم‌های مخابرات نوری و نیز تئوری اطلاعات و کدینگ و پردازش سیگنال‌های دیجیتال و مالتی‌مدیا می‌باشد.



شکل ۳: مقایسه احتمال خطای متوسط برای گیرنده دایورسیتی MRC با استفاده از رابطه دقیق پیشنهادی در این مقاله (۲۸) بر حسب اختلاف فاز ϕ بین بهره واقعی و تخمینی کانال به ازای $E_b/N_0 = 15 \text{ dB}$ با فرض $L = 3, 4, 5, 6$.



شکل ۴: احتمال خطای متوسط برای گیرنده دایورسیتی EGC به ازای $L = 5$ و مقادیر مختلف ρ .

۷- جمع‌بندی

در این مقاله عملکرد گیرنده‌های دایورسیتی از نوع MRC و EGC در کانال‌های فیدینگ رایلی مستقل با فرض وجود خطاهای گوسی در ضرایب وزن دهی ناشی از ایده‌آل نبودن تخمین کانال مورد بررسی قرار گرفت. در این مقاله نشان داده شد که با وجود خطاهای گوسی در ضرایب وزن دهی، احتمال خطای مشروط به بهره واقعی کانال، بهره تخمینی و نیز اختلاف فاز بین آنها بستگی دارد. سپس با ارائه یک روش تحلیلی دقیق و به دست آوردن توابع توزیع احتمال مورد نیاز و متوسط‌گیری از احتمال خطای مشروط، روابطی به فرم بسته برای احتمال خطای متوسط ارائه شد. روابط حاصل بر مبنای پارامتر جدید SNR مؤثر توصیف شده و گویای آن هستند که می‌توان احتمال خطای متوسط را با استفاده از روابط دقیق موجود - که با فرض ایده‌آل بودن تخمین کانال به دست آمده‌اند - و صرفاً با جایگزین نمودن SNR با SNR مؤثر به دست آورد. با استفاده از روابط تحلیلی ارائه شده نشان دادیم که تحت شرایط ایده‌آل نبودن تخمین