

# استفاده از تخمین‌زننده کمینه‌کننده میانگین مربعات خطا جهت بهبود کیفیت تصاویر مقطع نگاری رایانه‌ای از شکم بر اساس مدل مخلوط لاپلاس دومتغیره در حوزه تبدیل ویولت مختلط چندبعدی

حسین ربانی و منصور وفادوست

تبدیل نمود.

در دهه گذشته استفاده از تبدیل ویولت به‌منظور بازیابی سیگنال اصلی از داده‌های نویزی مورد توجه قرار گرفته است. اکثر این الگوریتم‌ها بر اساس مقاله دُنْهَو [2] در مورد روش سطح آستانه نرم گسترش یافته‌اند. علت اصلی انجام عملیات کاهش نویز در حوزه ویولت، خاصیت تُنْک‌بودن<sup>2</sup> ضرایب ویولت و قرارگرفتن عمده انرژی سیگنال در چند ضریب و کم‌اهمیت‌بودن مابقی ضرایب کوچک می‌باشد [3]. بر این اساس یک عملگر سطح آستانه مناسب در صورت صحیح انتخاب شدن سطح آستانه می‌تواند ضمن حفظ خصوصیات اصلی سیگنال، مابقی ضرایب که متأثر از نویز می‌باشند را حذف نماید [4]. حذف نویز در واقع همان مسأله تخمین سیگنال اصلی از روی مشاهدات نویزی است. بنابراین در صورتی که از تخمین‌زننده‌های بی‌زی همچون کمینه‌کننده میانگین مربعات خطا (MMSE) استفاده شود، صحت توزیع در نظر گرفته شده برای ضرایب ویولت بدون نویز از اهمیت شایانی برای مسأله تخمین برخوردار است. تحقیقات گسترده‌ای بر روی مدل‌های توزیع تک‌متغیره به‌منظور مدل کردن مُمان چهارم بالای ضرایب ویولت (هیستوگرام ضرایب ویولت دارای قله بزرگ در صفر بوده و دُم‌دارتر از توزیع گوسی می‌باشند [4]) صورت پذیرفته و بر اساس آن توزیع‌های مختلفی از جمله توزیع گوسی تعمیم‌یافته (GGD)، توزیع با فرم بسل مرتبه  $k$  (BKF) و توزیع‌های مخلوط، برای توزیع کناری ضرایب ویولت ارائه گردیده است [5] تا [10].

در چند سال اخیر خاصیت مهم دیگر ضرایب ویولت، یعنی وابستگی مابین مقیاسی آنها [6] و [7]، در مدل کردن تابع توزیع ضرایب بدون نویز مورد توجه واقع شده است. در واقع ضرایب ویولت در مقیاس‌های مجاور گرچه ناهمبسته‌اند اما مستقل از یکدیگر نمی‌باشند [11] تا [13]. در این زمینه توابع توزیع احتمال دومتغیره همچون گوسی دومتغیره مشروط [11]، لاپلاس با تقارن حلقوی [14] و تابع توزیع احتمال دومتغیره کوشی [15] برای مدل کردن ضرایب در مقیاس‌های مجاور به‌منظور حذف نویز پیشنهاد شده‌اند. در روش‌های مذکور از توزیع‌های ساده و غیر مخلوط که قابلیت مدل کردن خصوصیات همبستگی ضرایب ویولت را دارا می‌باشند استفاده شده است. به‌عنوان نمونه در [11] فرض می‌شود که هر ضریب ویولت مشروط به معلوم‌بودن ضرایب همسایه (در مقیاس‌ها و جهت‌های مجاور) دارای توزیع گوسی خواهد بود و با استفاده از تخمین‌زننده کمینه‌کننده میانگین مربعات خطا، تابع مورد نیاز برای کاهش نویز به‌دست آمده است. در مقاله مذکور همچنین اثر استفاده از توزیع‌های تک‌متغیره همچون توزیع گوسی تعمیم‌یافته و حالات خاص آن همچون توزیع لاپلاس و

چکیده: یکی از مسایل تعیین‌کننده در زمینه حذف نویز در حوزه ویولت بر اساس تئوری بیز، استفاده از تابع چگال احتمال مناسب برای مدل کردن ضرایب ویولت می‌باشد. از جمله خصوصیات ضرایب ویولت، وابستگی مابین مقیاسی آنها می‌باشد. در واقع مابین ضرایب ویولت و والد آنها در مقیاس مجاور همبستگی بالایی وجود دارد. بر همین اساس در چند سال اخیر به‌جای استفاده از توزیع‌های تک‌متغیره در هر زیرباند ویولت از توزیع‌های دومتغیره استفاده شده است. در این مقاله از مخلوط دو توزیع دومتغیره لاپلاسی برای مدل کردن ضرایب ویولت استفاده شده است. استفاده از این مدل، هم خصوصیات نوک‌تیزبودن در مبدأ و دُم‌داربودن توزیع ضرایب ویولت و هم خصوصیت وابستگی مابین مقیاسی آنها را به‌طور توأم به‌همراه خواهد داشت. بر اساس این مدل توزیع احتمال و با استفاده از تخمین‌زننده کمینه‌کننده میانگین مربعات خطا (MMSE)، الگوریتم تطبیقی جدیدی برای کاهش نویز حاصل می‌گردد. از این الگوریتم برای کاهش نویز تصاویر مقطع نگاری رایانه‌ای (CT) از شکم در حوزه تبدیل ویولت مختلط استفاده می‌گردد. نتایج شبیه‌سازی‌های صورت‌گرفته با این الگوریتم بیانگر بهبود عملیات کاهش نویز به‌طور کمی و کیفی در مقایسه با دیگر روش‌های مطرح‌شده در مقالات می‌باشد.

کلید واژه: تبدیل ویولت مختلط، تخمین‌زننده کمینه‌کننده میانگین مربعات خطا، مدل مخلوط، مدل توأم.

## 1- مقدمه

تصاویر معمولاً در اثر انتقال یا در اثر نویز حاصل از وسایل تصویرگیری و یا علل دیگر دچار خرابی می‌شوند و بر همین اساس کاهش نویز یکی از عملیات‌های اساسی در اکثر کاربردهای پردازش تصویر می‌باشد. به‌عنوان نمونه در تصویرگیری مقطع نگاری رایانه‌ای (CT)، اندازه‌گیری بر اساس شمارش تعداد وقایع در یک فرآیند گسسته می‌باشد و لذا توزیع پواسن مدل مناسبی برای اندازه‌گیری می‌باشد. در نتیجه هر یک از پیکسل‌های حاصله از عملیات تصویرگیری دارای نویزی که میزان آن به سیگنال وابسته می‌باشد خواهد بود و می‌توان توزیع پواسن را مدل مناسبی برای نویز تصاویر مقطع نگاری رایانه‌ای دانست. متأسفانه جداکردن نویزهای غیر ایستا و غیر گوسی مسأله ساده‌ای نبوده و لذا می‌توان با استفاده از یک پایدارساز همچون تبدیل انسکامب<sup>1</sup> [1] نویز پواسن را به نویز گوسی

این مقاله در تاریخ 17 اسفند ماه 1386 دریافت و در تاریخ 7 دی ماه 1387 بازنگری شد.

حسین ربانی، گروه فیزیک و مهندسی پزشکی، دانشگاه علوم پزشکی اصفهان، (email: h\_rabbani@med.mui.ac.ir).

منصور وفادوست، دانشکده مهندسی پزشکی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، (email: vmansur@aut.ac.ir).

2. Sparse

1. Anscombe

مدل کردن ضرایب ویولت مختلط و تخمین‌زننده بیشینه‌کننده تابع توزیع پسین استفاده می‌کند [14].  
 به‌علاوه اثر صحت توزیع به‌کار رفته در مدل کردن ضرایب ویولت با مقایسه روش BiLapMixShrinkMMSE (که مبتنی بر توزیع مخلوط دومتغیره لاپلاس می‌باشد) با روش LapMixShrinkMMSE (که مبتنی بر توزیع مخلوط تک‌متغیره لاپلاس می‌باشد) در این بخش بررسی می‌گردد. نهایتاً در بخش چهارم جمع‌بندی صورت گرفته و راهکارهای آتی پیشنهاد می‌گردد.

## 2- تشریح الگوریتم پیشنهادی

در این بخش کاهش نویز یک تصویر خراب‌شده با نویز گوسی در نظر گرفته می‌شود. در این صورت ضرایب ویولت تصویر نویزی شده در صورت استفاده از ویولت متعامد نرمال به‌صورت  $\bar{y} = \bar{w} + \bar{n}$  خواهد بود که مؤلفه‌های  $\bar{w} = (w_1, w_2)$  ضرایب ویولت بدون نویز در دو مقیاس مجاور  $w_1$  والد  $w_2$  می‌باشد) و مؤلفه‌های  $\bar{n} = (n_1, n_2)$  نویز گوسی با واریانس  $\sigma_n^2$  خواهند بود.

با استفاده از تخمین‌زننده کمینه‌کننده میانگین مربعات خطا تخمین مناسب  $w_1$  که آن را با  $\tilde{w}_1$  نشان می‌دهیم میانگین پسین به‌فرم زیر خواهد بود

$$\tilde{w}_1 = \iint w_1 p(\bar{w} | \bar{y}) d\bar{w} \quad (1)$$

با استفاده از قانون بیز خواهیم داشت

$$p_{\bar{w} | \bar{y}}(\bar{w} | \bar{y}) = \frac{p_{\bar{y} | \bar{w}}(\bar{y} | \bar{w}) p_{\bar{w}}(\bar{w})}{p_{\bar{y}}(\bar{y})} \quad (2)$$

و بنابراین با جایگزینی (2) در (1) می‌توان نوشت

$$\tilde{w}_1 = \iint w_1 \frac{p_{\bar{y} | \bar{w}}(\bar{y} | \bar{w}) p_{\bar{w}}(\bar{w})}{p_{\bar{y}}(\bar{y})} d\bar{w} \quad (3)$$

از آنجا که  $p_{\bar{y}}(\bar{y})$  مستقل از  $\bar{w}$  می‌باشد خواهیم داشت

$$\tilde{w}_1 = \frac{\iint w_1 p_{\bar{y} | \bar{w}}(\bar{y} | \bar{w}) p_{\bar{w}}(\bar{w}) d\bar{w}}{p_{\bar{y}}(\bar{y})} \quad (4)$$

که در نهایت به رابطه زیر منتهی می‌گردد

$$\tilde{w}_1 = \frac{\iint w_1 p_{\bar{y} | \bar{w}}(\bar{y} | \bar{w}) p_{\bar{w}}(\bar{w}) d\bar{w}}{\iint p_{\bar{y} | \bar{w}}(\bar{y} | \bar{w}) p_{\bar{w}}(\bar{w}) d\bar{w}} \quad (5)$$

از آنجا که  $\bar{y} = \bar{w} + \bar{n}$ ، تابع چگالی احتمال شرطی  $p_{\bar{y} | \bar{w}}(\bar{y} | \bar{w})$  یک گوسی دومتغیره با میانگین  $\bar{w}$  خواهد بود بنابراین می‌توان نوشت

$$\tilde{w}_1 = \frac{\iint w_1 p_{\bar{n}}(\bar{y} - \bar{w}) p_{\bar{w}}(\bar{w}) d\bar{w}}{\iint p_{\bar{n}}(\bar{y} - \bar{w}) p_{\bar{w}}(\bar{w}) d\bar{w}} \quad (6)$$

که در آن

$$p_{\bar{n}}(\bar{n}) = BiGauss(\bar{n}, \sigma_n) := \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} \exp\left(-\frac{n_1^2 + n_2^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad (7)$$

## 2-1 مدل مخلوط لاپلاس دوبعدی

در این مقاله ضرایب ویولت به‌صورت مخلوطی از دو لاپلاس دومتغیره به‌فرم زیر مدل می‌شوند

$$p_{\bar{w}}(\bar{w}) = aBiLap(\bar{w}, \sigma_1) + (1-a)BiLap(\bar{w}, \sigma_2) \quad (8)$$

گوسی نیز بررسی و در مقایسه با روش اصلی ارائه‌شده در مقاله، تأثیر مدل کردن وابستگی مابین مقیاسی در بهبود عملیات کاهش نویز نشان داده شده است. چنانچه در ادامه توضیح داده می‌شود، در این مقاله به‌جای استفاده از توزیع ساده، از توزیع مخلوط (دومتغیره) استفاده شده است تا (علاوه بر خاصیت وابستگی مابین مقیاسی) خاصیت دُم‌دار بودن به‌طور مؤثرتری مدل گردد.

در [9] و [16] بر اساس مدل مارکف از مخلوط دو توزیع گوسی (یکی با واریانس بالا برای قسمت دُم‌دار و یکی با واریانس پایین برای قسمت نوک‌تیز) برای مدل کردن ضرایب ویولت استفاده شده است. در [10] به‌جای استفاده از مخلوط گوسی از مخلوط دو توزیع لاپلاس استفاده شده است و با توجه به دُم‌دارتر بودن توزیع لاپلاس نسبت به توزیع گوسی، نشان داده شده است که مخلوط لاپلاس تطابق بهتری بر هیستوگرام ضرایب ویولت نسبت به مخلوط گوسی دارد و با توجه به این بهبود، نتایج کاهش نویز بر اساس این روش نسبت به روش مطرح‌شده در [9] از عملکرد مناسب‌تری برخوردار است. روش مطرح‌شده در [10] صرفاً قادر به مدل کردن خاصیت دُم‌دار بودن ضرایب ویولت بوده و خاصیت وابستگی مابین مقیاسی را در نظر نمی‌گیرد. در این مقاله از مخلوط دو توزیع دومتغیره لاپلاسی برای مدل کردن ضرایب ویولت استفاده می‌شود. این توزیع در عین حال که خاصیت دُم‌دار بودن را به جهت استفاده از توزیع مخلوط لاپلاس داراست، خاصیت همبستگی مابین مقیاسی را نیز در نظر می‌گیرد. چنانچه ذکر گردید از جمله عوامل تعیین‌کننده در کاهش نویز مبتنی بر تئوری بیز در حوزه ویولت، نوع تخمین‌زننده و تابع چگالی احتمال در نظر گرفته شده برای نویز و ضرایب ویولت بدون نویز می‌باشد. در [10] از تخمین‌زننده بیشینه‌کننده تابع توزیع پسین (MAP) به‌صورت غیر مستقیم برای کاهش نویز در حوزه ویولت با استفاده از توزیع تک‌متغیره لاپلاس استفاده شده است (استفاده از تخمین‌زننده بیشینه‌کننده توزیع پسین به‌صورت مستقیم به حل بسته منجر نمی‌شود و نیازمند حل عددی می‌باشد). در این مقاله علاوه بر به‌دست آوردن تابع سطح آستانه جدیدی که از توزیع مخلوط تک‌متغیره لاپلاسی و با استفاده از تخمین‌زننده کمینه‌کننده میانگین مربعات خطا حاصل می‌گردد (این تابع را LapMixShrinkMMSE می‌نامیم)، تابع سطح آستانه دومتغیره دیگری مبتنی بر توزیع مخلوط دومتغیره لاپلاسی به نام BiLapMixShrinkMMSE با استفاده از تخمین‌زننده کمینه‌کننده میانگین مربعات خطا به‌دست می‌آید.

در ادامه مقاله پس از مروری کلی بر اصول حذف نویز بیزی در حوزه ویولت مختلط [17] با استفاده از تخمین‌زننده کمینه‌کننده میانگین مربعات خطا، در قسمت دوم مدل پیشنهادی این مقاله بر پایه مخلوط دو توزیع دومتغیره لاپلاسی تشریح و الگوریتم حذف نویز بر پایه این مدل ارائه می‌شود. در بخش سوم، نویز تصاویر مقطع نگاری رایانه‌ای از شکم توسط الگوریتم پیشنهادی این مقاله کاهش داده می‌شود و نتایج کاهش نویز با این روش با روش‌های زیر مقایسه می‌گردد:

- فیلتر وینر در حوزه ویولت مختلط که در آن از یک تخمین‌زننده خطی برای هر زیرباند استفاده می‌گردد [11] تا [13].
- سطح آستانه سخت در حوزه ویولت مختلط که ضرایب کوچک‌تر از یک سطح آستانه در هر زیرباند را برابر صفر قرار می‌دهد [2] تا [4].
- BayesShrink که از تخمین‌زننده کمینه‌کننده تابع ریسک بیز بر اساس مدل توزیع گوسی تعمیم‌یافته برای ضرایب ویولت استفاده می‌کند [5].
- روش سندور که از توزیع لاپلاس دومتغیره با تقارن حلقوی برای

چنانچه مشخص است در واقع  $g_a(\bar{y})$  کانولوشن دوبعدی توزیع گوسی و  $BiLap(\bar{w}, \sigma_1)$  و  $g_{1-a}(\bar{y})$  کانولوشن دوبعدی توزیع گوسی و  $BiLap(\bar{w}, \sigma_2)$  می باشد که پس از جایگذاری و ساده سازی به فرم زیر به دست می آید

$$\begin{aligned} g_a(\bar{y}) &:= BiLapGauss(\bar{y}, \sigma_1, \sigma_n) \\ &= BiLap(\bar{y}, \sigma_1) \times BiGauss(\bar{y}, \sigma_n) \\ &= LapGauss(y_1, \sigma_1, \sigma_n) LapGauss(y_2, \sigma_1, \sigma_n) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} g_{1-a}(\bar{y}) &:= BiLapGauss(\bar{y}, \sigma_2, \sigma_n) \\ &= BiLap(\bar{y}, \sigma_2) \times BiGauss(\bar{y}, \sigma_n) \\ &= LapGauss(y_1, \sigma_2, \sigma_n) LapGauss(y_2, \sigma_2, \sigma_n) \end{aligned} \quad (21)$$

که در آن تابع LapGauss که حاصل کانولوشن یک بعدی توزیع های لاپلاسی و گوسی تک متغیره می باشد، به فرم زیر خواهد بود [14]

$$LapGauss(y, \sigma, \sigma_n) = \frac{e^{-\frac{y^2}{2\sigma_n^2}}}{2\sqrt{2}\sigma} \left[ \operatorname{erfcx}\left(\frac{\sigma_n}{\sigma} - \frac{y}{\sqrt{2}\sigma_n}\right) + \operatorname{erfcx}\left(\frac{\sigma_n}{\sigma} + \frac{y}{\sqrt{2}\sigma_n}\right) \right] \quad (22)$$

از (18) و (19) می توان فهمید که  $\tilde{w}_{1,a}$  و  $\tilde{w}_{1,1-a}$  به ترتیب تخمین کمینه کننده میانگین مربعات خطا با فرض تابع چگالی توأم غیر مخلوط  $BiLap(\bar{w}, \sigma_1)$  و  $BiLap(\bar{w}, \sigma_2)$  می باشند. از آنجا که مؤلفه های توزیع BiLap (برخلاف توزیع مخلوط دومتغیره) از یکدیگر مستقل می باشند، می توان از نتایج حاصل از توزیع اولیه لاپلاس تک متغیره به فرم زیر استفاده نمود [18]

$$\tilde{w}_{1,a} = \frac{(y_1 - \frac{\sigma_n^2 \sqrt{2}}{\sigma_1}) \operatorname{erfcx}\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_1} - \frac{y_1}{\sigma_n \sqrt{2}}\right)}{\operatorname{erfcx}\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_1} - \frac{y_1}{\sigma_n \sqrt{2}}\right) + \operatorname{erfcx}\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_1} + \frac{y_1}{\sigma_n \sqrt{2}}\right)} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{(y_1 + \frac{\sigma_n^2 \sqrt{2}}{\sigma_1}) \operatorname{erfcx}\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_1} + \frac{y_1}{\sigma_n \sqrt{2}}\right)}{\operatorname{erfcx}\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_1} - \frac{y_1}{\sigma_n \sqrt{2}}\right) + \operatorname{erfcx}\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_1} + \frac{y_1}{\sigma_n \sqrt{2}}\right)} \\ \tilde{w}_{1,1-a} &= \frac{(y_1 - \frac{\sigma_n^2 \sqrt{2}}{\sigma_2}) \operatorname{erfcx}\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_2} - \frac{y_1}{\sigma_n \sqrt{2}}\right)}{\operatorname{erfcx}\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_2} - \frac{y_1}{\sigma_n \sqrt{2}}\right) + \operatorname{erfcx}\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_2} + \frac{y_1}{\sigma_n \sqrt{2}}\right)} \\ &+ \frac{(y_1 + \frac{\sigma_n^2 \sqrt{2}}{\sigma_2}) \operatorname{erfcx}\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_2} + \frac{y_1}{\sigma_n \sqrt{2}}\right)}{\operatorname{erfcx}\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_2} - \frac{y_1}{\sigma_n \sqrt{2}}\right) + \operatorname{erfcx}\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_2} + \frac{y_1}{\sigma_n \sqrt{2}}\right)} \end{aligned} \quad (24)$$

با این تعبیر پس از به دست آوردن (16) - (19)، می توان (15) که آن را  $BiLapMixShrinkMMSE$  می نامیم، را جمع وزن داری از تخمین های کمینه کننده میانگین مربعات خطا منتجه از توزیع های لاپلاس دومتغیره

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1 &= \frac{\iint w_1 p_{\bar{n}}(\bar{y} - \bar{w}) (a BiLap(\bar{w}, \sigma_1) + (1-a) BiLap(\bar{w}, \sigma_2)) d\bar{w}}{\iint p_{\bar{n}}(\bar{y} - \bar{w}) (a BiLap(\bar{w}, \sigma_1) + (1-a) BiLap(\bar{w}, \sigma_2)) d\bar{w}} \\ &= \frac{a \iint w_1 p_{\bar{n}}(\bar{y} - \bar{w}) BiLap(\bar{w}, \sigma_1) d\bar{w} + (1-a) \iint w_1 p_{\bar{n}}(\bar{y} - \bar{w}) BiLap(\bar{w}, \sigma_2) d\bar{w}}{a \iint p_{\bar{n}}(\bar{y} - \bar{w}) BiLap(\bar{w}, \sigma_1) d\bar{w} + (1-a) \iint p_{\bar{n}}(\bar{y} - \bar{w}) BiLap(\bar{w}, \sigma_2) d\bar{w}} \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن

$$BiLap(\bar{w}, \sigma) := Lap(w_1, \sigma) \cdot Lap(w_2, \sigma) \quad (9)$$

$$Lap(w, \sigma) := \frac{1}{\sigma \sqrt{2}} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} |w|\right) \quad (10)$$

مدل فوق در درجه اول عدم استقلال  $w_1, w_2$  را بیان می کند. چرا که تابع توزیع کناری  $w_1, w_2$  به صورت توزیع مخلوط لاپلاسی تک متغیره به فرم زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} p_{w_1}(w_1) &= \int p_{\bar{w}}(\bar{w}) dw_2 \\ &= a Lap(w_1, \sigma_1) + (1-a) Lap(w_1, \sigma_2) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} p_{w_2}(w_2) &= \int p_{\bar{w}}(\bar{w}) dw_1 \\ &= a Lap(w_2, \sigma_1) + (1-a) Lap(w_2, \sigma_2) \end{aligned} \quad (12)$$

و از روابط فوق مشخص است که

$$p_{\bar{w}}(\bar{w}) \neq p_{w_1}(w_1) p_{w_2}(w_2) \quad (13)$$

لذا این توزیع در عین بیان ناهمبستگی  $E(w_1 w_2) = 0$  عدم استقلال  $w_1, w_2$  را نیز بیان می کند. ثانیاً این مدل یک مدل مخلوط است و لذا خاصیت دم دار بودن ضرایب ویولت نیز در آن گنجانده شده است. نکته مهم، به دست آوردن پارامترهای مجهول مدل  $(a, \sigma_1, \sigma_2)$  از روی مشاهدات نویزی می باشد که چنانچه در ادامه ذکر می گردد، این کار توسط الگوریتم بیشینه کننده امید ریاضی (EM) انجام می گیرد که در ادامه توضیح داده خواهد شد.

## 2-2 تابع تخمین زنده بر اساس مدل مخلوط لاپلاس دوبعدی

برای به دست آوردن تابع سطح آستانه دوبعدی مبتنی بر مدل مخلوط لاپلاس دوبعدی کفایت (8) را در (6) جایگذاری نماییم. در این صورت (14) در پایین صفحه به دست خواهد آمد. این رابطه را می توان به صورت زیر نیز نوشت

$$\tilde{w}_1 = \frac{a g_a(\bar{y}) \tilde{w}_{1,a} + (1-a) g_{1-a}(\bar{y}) \tilde{w}_{1,1-a}}{a g_a(\bar{y}) + (1-a) g_{1-a}(\bar{y})} \quad (15)$$

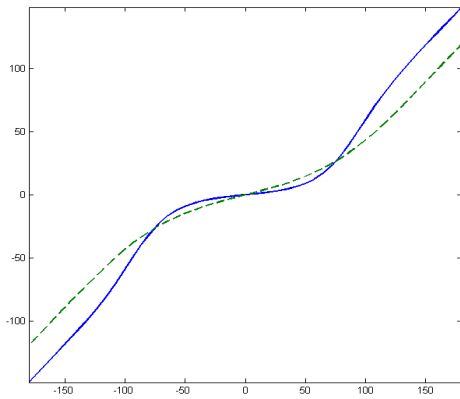
که در آن

$$g_a(\bar{y}) = \iint p_{\bar{n}}(\bar{y} - \bar{w}) BiLap(\bar{w}, \sigma_1) d\bar{w} \quad (16)$$

$$g_{1-a}(\bar{y}) = \iint p_{\bar{n}}(\bar{y} - \bar{w}) BiLap(\bar{w}, \sigma_2) d\bar{w} \quad (17)$$

$$\tilde{w}_{1,a} = \frac{\iint w_1 p_{\bar{n}}(\bar{y} - \bar{w}) BiLap(\bar{w}, \sigma_1) d\bar{w}}{\iint p_{\bar{n}}(\bar{y} - \bar{w}) BiLap(\bar{w}, \sigma_1) d\bar{w}} \quad (18)$$

$$\tilde{w}_{1,1-a} = \frac{\iint w_1 p_{\bar{n}}(\bar{y} - \bar{w}) BiLap(\bar{w}, \sigma_2) d\bar{w}}{\iint p_{\bar{n}}(\bar{y} - \bar{w}) BiLap(\bar{w}, \sigma_2) d\bar{w}} \quad (19)$$



شکل 2: خطوط پیوسته نمونه‌ای از تابع LapMixShrinkMMSE بر اساس تابع (34) و خطچین نمونه‌ای از تابع سطح آستانه منتهج از مدل غیر مخلوط لاپلاس بر اساس تخمین‌زننده کمینه‌کننده میانگین مربعات خطا را نشان می‌دهد. محور عمودی  $w$  و محور افقی  $y$  را نشان می‌دهند.

گام‌های  $E$  و  $M$  به اندازه کافی تکرار می‌شود تا مقادیر به‌دست آمده برای پارامترها به پایداری برسند.

#### 4-2 تابع تخمین‌زننده بر اساس مدل مخلوط لاپلاس یک‌بعدی

علاوه بر BiLapMixShrinkMMSE که مبتنی بر توزیع لاپلاس دومتغیره مخلوط می‌باشد، در این مقاله تابع سطح آستانه دیگری به نام LapMixShrinkMMSE که مبتنی بر توزیع لاپلاس تک‌متغیره مخلوط با استفاده از تخمین‌زننده کمینه‌کننده میانگین مربعات خطا می‌باشد نیز به‌دست می‌آید. این تابع را که بر خلاف BiLapMixShrinkMMSE یک‌بعدی می‌باشد، مشابه مباحث مطرح‌شده در بخش‌های قبل می‌توان به‌دست آورد. با این تفاوت که در حالت تک‌بعدی (6) به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$\tilde{w} = \frac{\int w p_n(y-w) p_w(w) dw}{\int p_n(y-w) p_w(w) dw} \quad (32)$$

در این حالت توزیع گوسی تک‌متغیره با واریانس  $\sigma_n^2$  و  $p_w(w)$  توزیع مخلوط لاپلاس به‌فرم زیر می‌باشد

$$p_w(w) = a \text{Lap}(w, \sigma_1) + (1-a) \text{Lap}(w, \sigma_2) \quad (33)$$

که در نهایت پس از جایگذاری در (32) خواهیم داشت

$$\tilde{w} = \frac{a p_a(y) \tilde{w}_{1,a} + (1-a) p_{1-a}(y) \tilde{w}_{1,1-a}}{a p_a(y) + (1-a) p_{1-a}(y)} \quad (34)$$

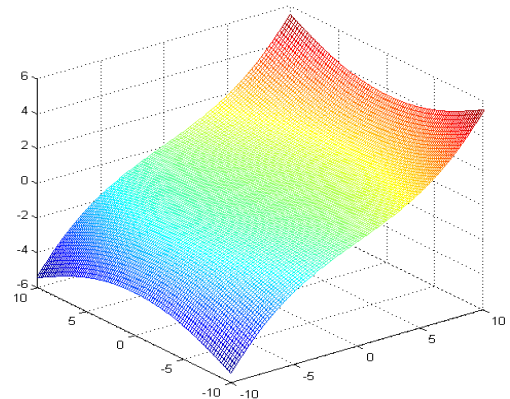
که در آن

$$p_a(y) = \text{LapGauss}(y, \sigma_1, \sigma_n) \quad (35)$$

$$p_{1-a}(y) = \text{LapGauss}(y, \sigma_2, \sigma_n) \quad (36)$$

شکل 2 تابع سطح آستانه LapMixShrinkMMSE را مطابق (34) برای مقادیر مشخصی از پارامترها نشان می‌دهد. چنانچه از شکل مشخص است استفاده از مدل مخلوط نسبت به مدل غیر مخلوط (روش سطح آستانه نرم منتهج از تخمین‌زننده کمینه‌کننده میانگین مربعات خطا [11]) منجر به کاهش بیشتر مقادیر کوچک حول و حوش صفر و کاهش کمتر مقادیر بزرگ می‌گردد.

به‌طور مشابه برای حالت تک‌متغیره نیز می‌بایست از الگوریتم EM برای تخمین پارامترها استفاده نمود که این روابط برای مقادیر



شکل 1: نمونه‌ای از تابع BiLapMixShrinkMMSE بر اساس تابع (15). محور عمودی  $w_1$  و محورهای افقی  $y_1$  و  $y_2$  را نشان می‌دهند.

غیر مخلوط دانست. شکل 1 نمونه‌ای از این تابع سطح آستانه دوبعدی را نشان می‌دهد.

#### 3-2 تخمین پارامترها

برای اجرای الگوریتم فوق‌الذکر نیاز به تخمین پارامترهای مجهول می‌باشد. در صورتی که واریانس نویز نامعلوم باشد می‌توان با استفاده از تخمین‌زننده میانه [3] به‌فرم زیر مقدار واریانس نویز را تخمین زد

$$\sigma_n = C \frac{\text{median}(|y_i|)}{0.6745} \quad (25)$$

که در آن  $y_i$  ضرایب ویولت زیرباند HH در مقیاس اول و دوم و  $C$  یک مقدار ثابت بوده که در این مقاله بر روی عدد 1/5 تنظیم می‌گردد. برای تخمین پارامترهای مدل مخلوط از روی مشاهدات نویزی از الگوریتم EM استفاده می‌شود. بدین نحو که تابع چگالی احتمال ضرایب نویزی حاصل کانولوشن تابع چگالی احتمال ضرایب ویولت بدون نویز و تابع چگالی احتمال نویز می‌باشد که چون این امر منتهی به کانولوشن توابع گوسی و لاپلاس دومتغیره می‌گردد خواهیم داشت

$$\begin{aligned} p_{\bar{y}}(\bar{y}) &= a \text{BiLapGauss}(\bar{y}, \sigma_1, \sigma_n) \\ &+ (1-a) \text{BiLapGauss}(\bar{y}, \sigma_2, \sigma_n) \\ &= a g_a(\bar{y}) + (1-a) g_{1-a}(\bar{y}) \end{aligned} \quad (26)$$

در این صورت با انتخاب مقدار اولیه برای  $a, \sigma_1, \sigma_2$ ، در گام  $E$  برای هر مقدار مشاهده‌شده  $\bar{Y}_n$  (که  $n=1, \dots, N$  و  $N$  تعداد کل ضرایب هر زیرباند می‌باشد)، عبارت زیر محاسبه می‌شود

$$r_1(n) \leftarrow \frac{a g_a(\bar{Y}_n)}{p_y(\bar{Y}_n)} = \frac{a g_a(\bar{Y}_n)}{a g_a(\bar{Y}_n) + (1-a) g_{1-a}(\bar{Y}_n)} \quad (27)$$

$$r_2(n) \leftarrow \frac{(1-a) g_{1-a}(\bar{Y}_n)}{p_y(\bar{Y}_n)} = 1 - r_1(n) \quad (28)$$

در گام  $M$  نیز ضرایب به‌صورت زیر تخمین زده می‌شوند

$$a \leftarrow \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N r_1(n) \quad (29)$$

$$\hat{\sigma}_1^2 \leftarrow \frac{\left(\frac{1}{N}\right) \sum_{n=1}^N r_1(n) \|\bar{Y}_n\|^2 / 2}{\sum_{n=1}^N r_1(n)} - \sigma_n^2 \quad (30)$$

$$\hat{\sigma}_2^2 \leftarrow \frac{\left(\frac{1}{N}\right) \sum_{n=1}^N r_2(n) \|\bar{Y}_n\|^2 / 2}{\sum_{n=1}^N r_2(n)} - \sigma_n^2 \quad (31)$$

برای اعمال الگوریتم‌های کاهش نویز مطرح شده نیز ابتدا واریانس نویز توسط (25) تخمین زده شده، سپس با استفاده از الگوریتم EM پارامترهای توزیع مخلوط لاپلاس ((27) تا (31) برای مدل دومتغیره و (37) تا (41) برای حالت تک‌متغیره) از روی ضرایب نویزی هر زیرباند تخمین زده شده و در نهایت با استفاده از تابع تخمین‌زننده مطابق (15) برای BiLapMixShrinkMMSE و (34) برای LapMixShrinkMMSE ضرایب حذف نویز شده به دست می‌آیند. شکل 3 نمونه‌ای از یک تصویر مقطع نگاری رایانه‌ای نویزی از شکم که با الگوریتم‌های مطرح شده، نویز آنها حذف شده‌اند را نشان می‌دهد. چنانچه از شکل مشخص است روش‌های BiLapMixShrinkMMSE و LapMixShrinkMMSE مقایسه با روش‌های فیلتر وینر، سطح آستانه سخت و سطح آستانه نرم در حوزه ویولت مختلط بهترین نتایج را به همراه دارند.

مقایسه BiLapMixShrinkMMSE و LapMixShrinkMMSE نیز مشخص می‌کند که BiLapMixShrinkMMSE به علت قابلیت مدل کردن همزمان خصوصیات دُم‌دار بودن توزیع کناری و همبستگی مابین مقیاسی نتایج بهتری از روش LapMixShrinkMMSE که صرفاً قادر به مدل کردن خاصیت دُم‌دار بودن می‌باشد، از خود نشان می‌دهد.

به منظور بررسی بهتر الگوریتم‌های ارائه شده در مقاله از نویز ساختگی گوسی استفاده شده و معیارهای سیگنال به نویز (PSNR)، ضریب همبستگی (CoC) که نشان‌دهنده میزان حفظ بافت تصویر می‌باشد و ضریب حفظ لبه (EPI) [20] به فرم زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد

$$PSNR = 20 \log \frac{255N}{\sum (s - \bar{s})^2} \quad (43)$$

$$CoC = \frac{\sum (s - \bar{s})(\hat{s} - \bar{\hat{s}})}{\sum (s - \bar{s})^2 \sum (\hat{s} - \bar{\hat{s}})^2} \quad (44)$$

$$EPI = \frac{\sum (\Delta s - \bar{\Delta s})(\Delta \hat{s} - \bar{\Delta \hat{s}})}{\sum (\Delta s - \bar{\Delta s})^2 \sum (\Delta \hat{s} - \bar{\Delta \hat{s}})^2} \quad (45)$$

که در آن  $\hat{s}$  تصویر حذف نویز شده،  $s$  تصویر اولیه و  $N$  تعداد پیکسل‌های تصویر می‌باشد و  $\bar{s}$  میانگین  $s$  و  $\Delta s$  نشان‌دهنده عملگر لاپلاس گسسته می‌باشد. جدول 2 مقادیر PSNR روش‌های مطرح شده در این مقاله را با روش‌های فیلتر وینر [11] تا [13]، سطح آستانه سخت [2] تا [4]، BayesShrink [5] و روش سِندور که مبتنی بر توزیع لاپلاس با تقارن حلقوی با استفاده از تخمین‌زننده بیشینه‌کننده تابع توزیع پسین می‌باشد [14] برای شش تصویر مقطع نگاری رایانه‌ای از شکم که به آنها نویز مصنوعی اضافه شده است نشان می‌دهد. چنانچه مشخص است روش BiLapMixShrinkMMSE بالاترین مقدار PSNR را داراست. با توجه به فرم بسته معادلات 15 و 34 و از آنجا که انتگرال‌های مربوطه در این روابط دارای فرم صحیح بوده و نیازی به حل عددی نمی‌باشد، پیچیدگی محاسباتی روش‌های مطرح شده در این مقاله مطلوب می‌باشد. به عنوان نمونه زمان لازم برای اجرای الگوریتم‌های LapMixShrinkMMSE و BiLapMixShrinkMMSE در محیط MATLAB7 برای یک تصویر 512×512 با چهار گام ویولت (با فیلترهای جدول 1) در یک کامپیوتر Pentium 4 CPU 3/40 GHz و با یک گیگابایت حافظه به ترتیب برابر 28/42 و 28/49 ثانیه می‌باشد.

جدول 3 مقادیر EPI و CoC که به ترتیب میزان حفظ بافت تصویر و لبه‌های تصویر را معین می‌کنند برای سه تصویر در حالات مختلف نویز نشان می‌دهد. عملکرد مطلوب‌تر روش‌های مطرح شده در این مقاله به‌ویژه

جدول 1: ضرایب فیلتر آنالیز ویولت مختلط به کار رفته در این مقاله (ضرایب فیلترهای سنتز زمان معکوس فیلترهای آنالیز می‌باشند).

فیلتر پایین‌گذر درخت اول	فیلتر بالاگذر درخت اول	فیلتر پایین‌گذر درخت دوم	فیلتر بالاگذر درخت دوم
0,0351638	0	0	-0,0351638
0	0	0	0
-0,0883294	-0,1143018	-0,1143018	0,0883294
0,23389032	0	0	0,23389032
0,7602723	0,5875183	0,5875183	-0,7602723
0,5875183	0,7602723	-0,7602723	0,5875183
0	0,23389032	0,23389032	0
-0,1143018	-0,0883294	0,0883294	-0,1143018
0	0	0	0
0	0,0351638	-0,0351638	0

مشاهده شده  $Y_n$  (که  $n = 1, \dots, N$  و  $N$  تعداد کل ضرایب هر زیرباند می‌باشد) به فرم زیر ساده می‌شوند:

گام E:

$$r_1(n) \leftarrow \frac{ap_a(Y_n)}{ap_a(Y_n) + (1-a)p_{1-a}(Y_n)} \quad (37)$$

$$r_2(n) \leftarrow \frac{(1-a)p_{1-a}(Y_n)}{ap_a(Y_n) + (1-a)p_{1-a}(Y_n)} \quad (38)$$

گام M:

$$a \leftarrow \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N r_1(n) \quad (39)$$

$$\hat{\sigma}_1^2 \leftarrow \frac{\left(\frac{1}{N}\right) \sum_{n=1}^N r_1(n) Y_n^2}{\sum_{n=1}^N r_1(n)} - \sigma_n^2 \quad (40)$$

$$\hat{\sigma}_2^2 \leftarrow \frac{\left(\frac{1}{N}\right) \sum_{n=1}^N r_2(n) Y_n^2}{\sum_{n=1}^N r_2(n)} - \sigma_n^2 \quad (41)$$

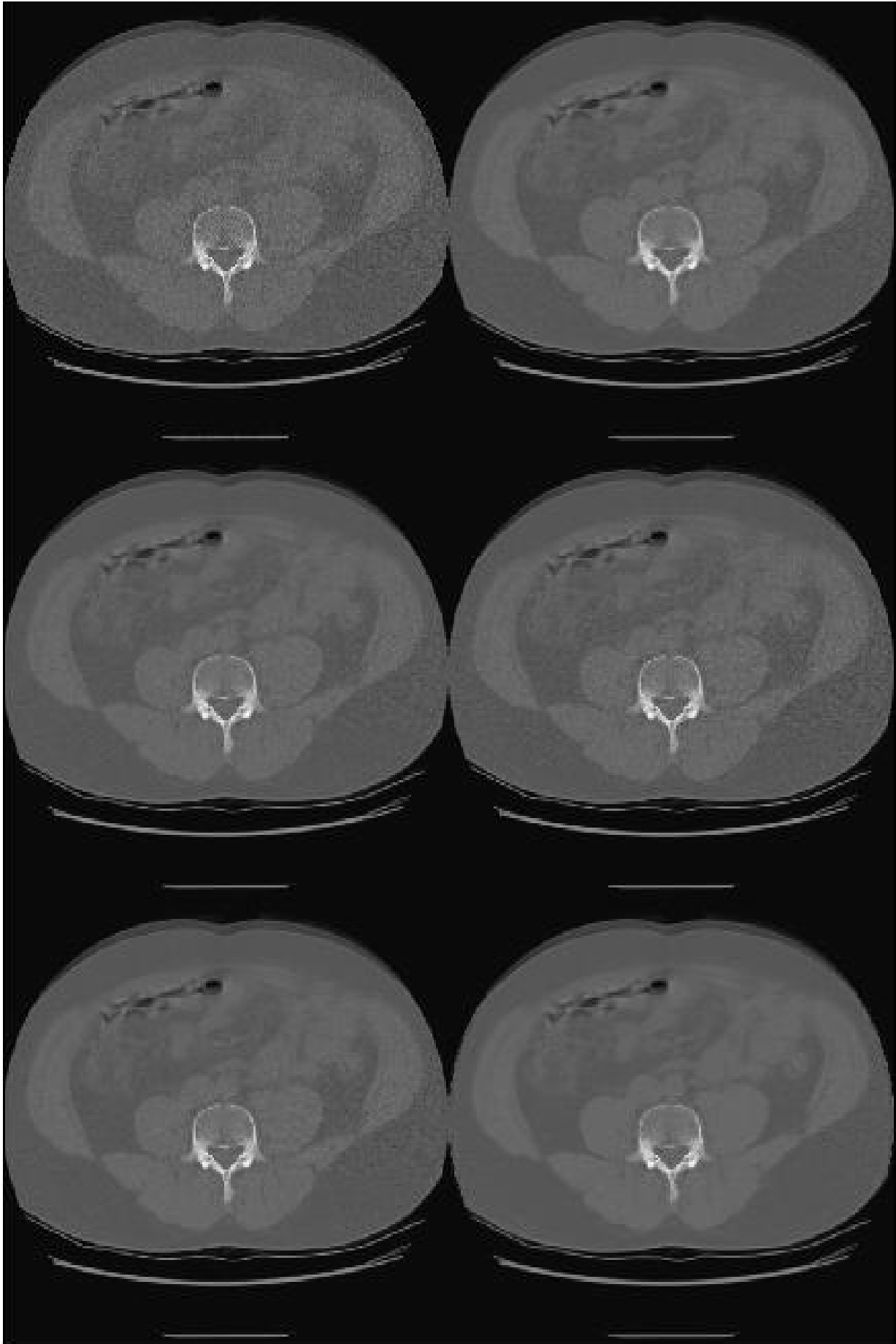
### 3- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش از روش‌های BiLapMixShrinkMMSE و LapMixShrinkMMSE برای کاهش نویز تصاویر مقطع نگاری رایانه‌ای از شکم استفاده می‌گردد. بدین منظور ابتدا از تبدیل انسکامب [1] به فرم زیر استفاده می‌گردد

$$s = 2\sqrt{I + \frac{3}{8}} \quad (42)$$

که در آن  $I$  تصویر نویزی اولیه با نویز پواسن است و  $s$  تصویر حاصله با نویز گوسی می‌باشد. پس از آن تصویر  $s$  به حوزه ویولت مختلط برده شده و الگوریتم‌های مطرح شده در این مقاله به آن اعمال و سپس عملیات معکوس ویولت انجام می‌گیرد. در نهایت نیز از عکس تبدیل انسکامب استفاده شده و تصویر کاهش نویز یافته تولید می‌گردد.

مطابق مباحث مطرح شده در [19] ضرایب فیلترهای ویولت مختلط برای درخت اول و دوم مطابق جدول 1 انتخاب شده است که با توجه به تعداد کم نقاط فیلترها پیچیدگی محاسباتی الگوریتم پایین خواهد بود.



شکل 3: مقایسه تصویر حذف نویز شده CT از شکم با روش‌های مختلف. از بالا سمت راست به صورت ساعت‌گرد: تصویر اولیه، روش فیلتر وینر، روش سطح آستانه سخت، روش BiLapMixShrinkMMSE، روش LapMixShrinkMMSE و روش سطح آستانه نرم.



جدول 2: مقایسه PSNR روش‌های مختلف با الگوریتم‌های ارائه شده در این مقاله برای چندین تصویر مقطع نگاری رایانه‌ای از شکم در سطوح مختلف نویز ساختگی.

$\sigma_n$	فیلتر وینر	سطح آستانه سخت	Bayes-Shrink [5]	روش سندور [14]	Lap-Mix-Shrink-MMSE	BiLap-Mix-Shrink-MMSE
5	35,63	36,33	35,76	35,90	36,83	36,92
10	33,06	33,40	33,44	33,62	33,78	34,28
15	31,67	32,09	32,44	32,67	33,13	33,66
20	30,88	31,23	31,67	31,96	32,30	32,58
25	30,16	30,74	30,98	31,27	31,55	31,67
30	29,59	30,20	30,32	30,62	30,86	30,98

جدول 3: مقایسه COC و EPI روش‌های مختلف با الگوریتم‌های ارائه شده در این مقاله برای چندین تصویر مقطع نگاری رایانه‌ای از شکم در سطوح مختلف نویز ساختگی.

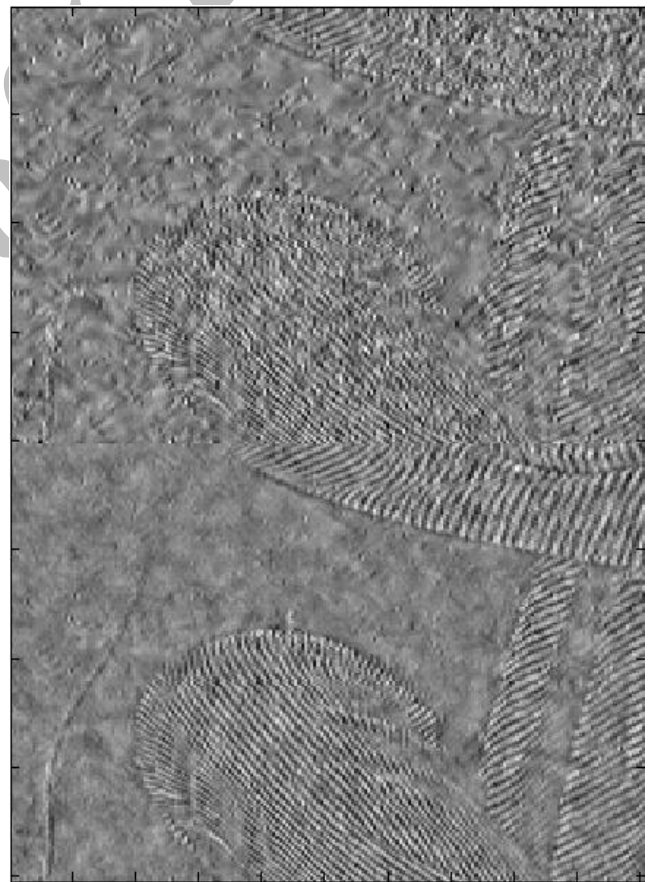
$\sigma_n$		تصویر نویزی	فیلتر وینر	سطح آستانه سخت	سطح آستانه نرم	روش سندور [14]	Lap-Mix-Shrink-MMSE	BiLap-Mix-Shrink-MMSE
10	CoC	0,9706	0,9942	0,9967	0,9958	0,9963	0,9966	0,9957
10	EPI	0,2184	0,4358	0,5572	0,5259	0,5381	0,5621	0,6148
20	CoC	0,8957	0,9892	0,9908	0,9905	0,9908	0,9909	0,9950
20	EPI	0,1157	0,2905	0,3121	0,3104	0,3135	0,3227	0,5337
30	CoC	0,8028	0,9839	0,9887	0,9868	0,9873	0,9879	0,9914
30	EPI	0,0745	0,2432	0,3087	0,2889	0,2937	0,3104	0,4616

#### 4- جمع بندی و پیشنهادات تکمیلی

در این مقاله الگوریتمی بر پایه مدل توزیع مخلوط لاپلاسی دومتغیره ارائه گردید. با توجه به خاصیت دُم‌دار بودن این توزیع و در عین حال در نظر گرفتن همبستگی مابین مقیاسی در آن، این مدل قابلیت تطبیق مناسبی با داده‌های هر زیرباند از خود نشان می‌دهد. بر اساس این مدل و با استفاده از تخمین‌زننده کمینه‌کننده میانگین مربعات خطا یک تابع دومتغیره برای تخمین ضرایب نویزی ارائه گردید و از آن برای کاهش نویز تصاویر مقطع نگاری رایانه‌ای شکمی استفاده گردید. نتایج آزمایش‌ها حاکی از بهبود کمی و کیفی عملیات کاهش نویز نسبت به روش‌های دیگر از جمله روش مبتنی بر توزیع مخلوط لاپلاس تک‌متغیره می‌باشد. استفاده از دیگر مدل‌های مخلوط و توأم از جمله مخلوط لاپلاس با تقارن حلقوی یا مخلوط کوشی دومتغیره به‌عنوان کارهای آتی پیشنهاد می‌گردد. همچنین می‌توان الگوریتم را برای مدل کردن دیگر خصوصیات آماری ضرایب ویولت نیز توسعه داد. بررسی دیگر روش‌های به‌کار رفته برای حذف نویز پواسن و تطابق آن با روش‌های مطرح شده در این مقاله نیز می‌تواند به نتایج مناسب‌تری منجر گردد.

#### مراجع

- [1] J. Starck, F. Murtagh, and A. Bijaoui, *Image Processing and Data Analysis: the Multiscale Approach*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [2] D. L. Donoho, "Denoising by soft-thresholding," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 41, no. 3, pp. 613-627, May 1995.
- [3] D. L. Donoho and I. M. Johnstone, "Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage," *Biometrika*, vol. 81, no. 3, pp. 425-455, Sep. 1994.
- [4] D. L. Donoho and I. M. Johnstone, "Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage," *J. Amer. Statist. Assoc.*, vol. 90, no. 432, pp. 1200-1224, Dec. 1995.
- [5] S. Chang, B. Yu, and M. Vetterli, "Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression," *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 9, no. 9, pp. 1532-1546, Sep. 2000.
- [6] F. Luisier, T. Blu, and M. Unser, "A new SURE approach to image denoising: interscale orthonormal wavelet thresholding," *IEEE Trans. on Image Processing*, vol. 16, no. 3, pp. 593-606, Mar. 2007.
- [7] A. Pizurica and W. Philips, "Estimating the probability of the presence of a signal of interest in multiresolution single and



شکل 4: تصاویر بالا و پایین به ترتیب خطای حاصل از عملیات کاهش نویز با روش‌های سطح آستانه سخت و LapMixShrinkMMSE را نشان می‌دهند.

BiLapMixShrinkMMSE در حالت‌های نویزی شدید از این جدول مشهود است. همچنین جهت بررسی دقیق‌تر خطای حاصل از عملیات کاهش نویز با روش‌های سطح آستانه سخت و LapMixShrinkMMSE برای بخشی از تصویر باربارا که با نویز گوسی با واریانس 30 خراب شده است، در شکل 4 نشان داده شده است. وجود آرتیفکت‌های اضافی حاصل از روش سطح آستانه سخت در شکل مشهود می‌باشد.

- signal and image processing," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 22, no. 6, pp.123-151, Nov. 2005.
- [18] S. Gazor and W. Zhang, "Speech enhancement employing Laplacian-Gaussian mixture," *IEEE Trans. on Speech and Audio Processing*, vol. 13, no. 5, pp. 896-904, Sep. 2005.
- [19] N. G. Kingsbury, "A dual-tree complex wavelet transform with improved orthogonality and symmetry properties," in *Proc. Int. Conf. Image Processing*, vol. 2, pp. 375-378, Sep. 2000.
- [20] Z. Wang, A. C. Bovik, H. R. Sheikh, and E. P. Simoncelli, "Image quality assessment: from error visibility to structural similarity," *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 13, no. 4, pp. 600-612, Apr. 2004.
- حسین ربانی** مدرک کارشناسی خود را در رشته مهندسی برق - مخابرات در سال 1379 با رتبه اول از دانشگاه صنعتی اصفهان و مدرک کارشناسی ارشد و دکترای خود را در رشته مهندسی پزشکی - بیوالکترونیک به ترتیب در سالهای 1381 و 1386 از دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران) اخذ نمود. وی در سال 1385 نیز در دانشگاه کوئینز کانادا به عنوان محقق در زمینه مدل کردن آماری تصاویر در حوزه تبدیلهای تنگ مشغول تحقیق بوده و هم اکنون عضو هیات علمی گروه مهندسی پزشکی و مرکز تحقیقات پردازش تصویر و سیگنال پزشکی دانشگاه علوم پزشکی اصفهان می باشد. زمینه های تحقیقاتی مورد علاقه وی، پردازش سیگنال، تصویر و ویدئو، تبدیلهای زمان-فرکانس و مدل کردن آماری سیگنال در حوزه تبدیلهای تنگ می باشد.
- منصور وفادوست** در سال 1364 مدرک کارشناسی خود را از دانشگاه صنعتی شریف و در سال 1367 مدرک کارشناسی ارشد خود را از دانشگاه صنعتی امیرکبیر در رشته مهندسی برق - الکترونیک و مدرک دکترای خود در رشته مهندسی پزشکی را از دانشگاه New South Wales سیدنی استرالیا در سال 1373 دریافت نمود. وی در حال حاضر عضو هیات علمی دانشکده مهندسی پزشکی دانشگاه صنعتی امیرکبیر می باشد. زمینه های علمی مورد علاقه نامبرده پردازش و آنالیز تصاویر پزشکی می باشد.
- multiband image denoising," *IEEE Trans. on Image Processing*, vol. 15, no. 3, pp. 654-665, Mar. 2006.
- [8] M. J. Fadili and L. Boubchir, "Analytical form for a Bayesian wavelet estimator of images using the Bessel K form densities," *IEEE Trans. on Image Proc.*, vol. 14, no. 2, pp. 231-240, Feb. 2005.
- [9] M. S. Crouse, R. D. Nowak, and R. G. Baraniuk, "Wavelet - based statistical signal processing using hidden Markov models," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 46, no. 4, pp. 886-902, Apr. 1998.
- [10] H. Rabbani and M. Vafadoost, "Wavelet based image denoising based on a mixture of Laplace distributions," *Iranian J. of Science & Technology, Trans. B., Engineering*, vol. 30, no. B6, pp. 711-733, 2006.
- [11] E. Simoncelli, "Modeling the joint statistics of images in the wavelet domain," in *Proc. of the SPIE 44th Annual Meeting*, 3813, pp. 188-195, Jul. 1999.
- [12] A. Srivastava, A. B. Lee, E. P. Simoncelli, and S - C. Zhu, " On advances in statistical modeling of natural images," *J. Math. Imaging and Vision*, vol. 18, no. 1, pp. 17-33, Jan. 2003.
- [13] E. Simoncelli, *Modeling the Joint Statistics of Images in the Wavelet Domain*, Handbook of Image and Video Processing, pp. 431-441, Academic Press, May 2005.
- [14] L. Sendur and I. W. Selesnick, "Bivariate shrinkage functions for wavelet - based denoising exploiting interscale dependency," *IEEE. Tran. Signal Processing*, vol. 50, no. 11, pp. 2744-2756, Nov. 2002.
- [15] A. Achim, P. Tsakalides, and A. Bezerianos, "SAR image denoising via Bayesian wavelet shrinkage based on heavy-tailed modeling," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. 41, no. 8, pp. 1773-1784, Aug. 2003.
- [16] J. K. Romberg, C. Hyeokho, and R. G. Baraniuk, "Bayesian tree-structured image modeling using wavelet - domain hidden Markov models," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 10, no. 7, pp. 1056-1068, Jul. 2001.
- [17] I. W. Selesnick, R. G. Baraniuk, and N. Kingsbury, "The dual-tree complex wavelet transform - a coherent framework for multiscale

Archive of SID