مجله پژوهشي دانشگاه اصفهان (علوم پايه)
جلد بيست و يكم- شماره ۱- سال ۱۳۸٤
صص ۳۰ - ۱۹

كوانتش محيط‌هاي پيوسته در فضاي فاز گسترش يافته

سعدا نصيري قيداري،* محمدتقي فلاحي مروست و حسن پهلواني****

***گروه فيزيک دانشگاه زنجان و مركز تحصيلات تكميلي در علوم پايه زنجان**
****گروه فيزيک دانشگاه اصفهان**

چكيده

در اين مقاله فرمولبندي مكانيك كوانتومي در فضاي فاز گسترش يافته براي بررسي تحول ميدانهاي كلاسيك و كوانتومي تعميم داده شده است. در حالت كلاسيك مساله تار مرتعش بعنوان يك مثال با استفاده از اين روش حل شده است.

واژه‌هاي كليدي: كوانتش محيط‌ها، فضاي فاز گسترش يافته، ميدان‌هاي كلاسيک و كوانتومي

Quantization of Continuous Media in Extended Phase Space

S. Nasiri*, M. T. Fallahi and H. Pahlavani****

***Department of Physics, University of Zanjan**
****Department of Physics, University of Isfahan**

Abstract

In this article, the quantum mechanical formulation in extended phase space has been generalized to the quantized many body systems with degrees of freedom limited to the evolution of classical and quantum mechanical fields. This makes the investigation of such fields possible in phase space. As an example, the problem of vibrating string has been solved using this formalism.

Keywords: Quantized media, Generalized phase space, Quantum and classic fields

.

مقدمه

يكي از روشهاي ارايه شده براي كوانتش سيستمهاي بس ذره‌اي، منسوب به ويگنر است (۱)، وي توانست با استفاده از تصوير شرودينگر در مكانيك كوانتومي، يك معادله تحول براي توابع حالت اينگونه سيستم‌ها در فضاي فاز بنويسد بطوري‌كه مقدار چشمداشتي هر مشاهده‌پذير با انتگرال‌گيري روي فضاي فاز معمولي بدست آيد. اين روش توسط افراد مختلف از جمله مويال (۲)، هيلري و ديگران (۳)، مهتا (٤)، كيم و ديگران (۵)، و كوبو (٦)، توسعه يافته است و بعنوان يك روش قوي براي حل مسايل مربوط به اينگونه سيستمها شناخته شده است (به مقاله مروري مربوط به دكر (۷) و مراجع متعدد موجود در آن مراجعه شود). در روش ويگنر قبل از رسيدن به مكانيك كوانتومي در فضاي فاز، مكانيك كوانتومي در تصوير شرودينگر پذيرفته مي‌شود و اساس كار قرار مي‌گيرد. ميتوان بدون توسل به تصوير فوق بصورت مستقيم به مكانيك كوانتومي در فضاي فاز دست پيدا كرد، اينكار توسط ثبوتي و نصيري از طريق معرفي توابع لاگرانژي و هاميلتوني

گسترش يافته و با استفاده از كوانتش بندادي و انتگرال مسير انحام گرفته است. نتيجه به دست آمده معادله‌اي شبيه معادله شرودينگر است كه تحول توابع حالت كوانتومي را در فضاي فاز نشان مي‌دهد (۸، ۹، ۱۰، ۱۱). به تازگی بعنوان كاربردي از اين روش تحول يك سيستم ميراي كوانتومي و همچنين كوانتش ناورداي پيمانه‌اي يك سيستم ميراي بس ذره‌اي باردار بررسي شده است (۱۲، ۱۳).

در اين مقاله سعي شده است روش فوق به بررسي تحول محيط‌هاي پيوسته تعميم داده شود. بديهي است كه بايد معادلات تحول مربوط به تحول يك سيستم با درجه‌های آزادي محدود، به بي‌نهايت درجه آزادي تعميم داده شود.

اين كار از دو ديدگاه كلاسيك و كوانتومي انجام شده است.

در حالت كلاسيك مساله تار مرتعش بعنوان مثال حل شده است. در بخش دوم روش كوانتش در فضاي فاز گسترش يافته را از مراجع (۸) و (۱۲) مرور مي‌كنيم. در بخش سوم كوانتش محيط پيوسته در فضاي فاز گسترش يافته در دو قسمت يعني حالت كلاسيك و حالت كوانتومي بررسي شده است. در بخش چهارم بحث و نتيجه‌گيري ارايه گرديده است.

كوانتش سيستم ذرات در فضاي فاز

تابع لاگرانژي گسترش يافته در فضاي فاز به صورت زير تعريف مي‌شود:

$$L(q, p, \dot{q}, \dot{p}) = -\dot{q}_1 p_1 - \dot{p}_1 q_1 + L^q(q, \dot{q}) + L^p(p, \dot{p}), \qquad ۱$$

كه در آن L^q و L^p به ترتيب تابع لاگرانژي در فضاهاي پيكربندي و تكانه هستند و روي شاخصهاي تكرار شده جمع زده مي‌شود. معادلات حركت عبارتند از:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L^q}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L^q}{\partial q_1} = 0 \qquad \text{۲. الف}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_1} - \frac{\partial L}{\partial p_1} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L^p}{\partial \dot{p}_1} - \frac{\partial L^p}{\partial p_1} = 0 \qquad \text{۲. ب}$$

اگر شرايط اوليه طوري تعريف شوند كه q_1 و p_1 در ابتدا جفت‌هاي مزدوج بندادي باشند $(p_1 = \frac{\partial L^q}{\partial \dot{q}_1}, q_1 = \frac{\partial L^p}{\partial \dot{p}_1})$ حالت حركت بنا به تعريف و به معناي آماري آن، يك حالت خالص

است، ولي در حالت كلي q و p جفت‌هاي بندادي نيستند و مستقل از هم‌اند (حالتهاي آميخته). در اين صورت ميتوان دومين گروه از تكانه‌هاي بندادي را براي q و p به كمك تابع لاگرانژي گسترش يافته معرفي كرد.

$$\pi_{q1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial L^q}{\partial \dot{q}_1} - p_1 \qquad \text{۳. الف}$$

$$\pi_{p1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_1} = \frac{\partial L^p}{\partial \dot{p}_1} - q_1 \qquad \text{۳. ب}$$

تابع هاميلتوني گسترش يافته در فضاي فاز با استفاده از تبديل لژاندر روي لاگرانژي گسترش يافته به صورت زير تعريف مي‌شود:

$$\begin{aligned} H(q,p,\pi_q,\pi_q) &= \pi_{q_1}\dot{q}_1 + \pi_{p_1}\dot{p}_1 - L(q,p,\dot{q},\dot{p}). \\ &= h(p+\pi_q,q) - h(p,q+\pi_p) \end{aligned} \qquad \text{٤}$$

كه در آن $h(p,q)$ هاميلتوني متعارف است.

$$h(\frac{\partial L^q}{\partial \dot{q}},q) = \frac{\partial L^q}{\partial \dot{q}_1}\dot{q}_1 - L^q(q,\dot{q}) \qquad \text{۵. الف}$$

$$h(p,\frac{\partial L^p}{\partial \dot{p}_1}) = \frac{\partial L^p}{\partial \dot{p}_1}p_1 - L^p(p,\dot{p}) \qquad \text{۵. ب}$$

و معادلات حركت در اين فرمولبندي عبارتند از:

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial \pi_{q1}}, \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial \pi_{p1}}, \dot{\pi}_{q1} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dot{\pi}_{p1} = -\frac{\partial H}{\partial p_1} \qquad \text{٦}$$

براي كوانتش سيستم ذرات در فضاي فاز روند آشناي كوانتش بندادي دنبال مي‌شود [۸]. اصول موضوعه آن به شرح زير است:

الف) $\pi_{q1,}p_1,q_1$ و π_{p1} عملگرهايي در يك فضاي هيلبرت هستند و روابط جابجايي زير را ارضا مي‌كنند.

$$[\pi_{p1,}P_j] = [\pi_{q1},\pi_{qj}] = 0 \qquad \text{۷. الف}$$

$$\left[\pi_{q1}, q_j\right] = -i\hbar\delta_{1j}, \pi_{q1} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q_1},$$ ۷. ب

$$\left[\pi_{p1,} p_j\right] = -i\hbar\delta_{1j}, \pi_{p1} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial p_1}$$ ۷. ج

ب) تابع حالت $x(q,p,t)$ معادله شرودینگر گسترش یافته‌اي را ارضاء مي کند.

$$i\hbar\frac{\partial x}{\partial t} = Hx = \left\{h(p - i\hbar\frac{\partial}{\partial q}, q) - h(p, q - i\hbar\frac{\partial}{\partial p})\right\}x$$

$$= \sum_{n-1}\frac{(i\hbar)^n}{n!}\left\{\frac{\partial^n h\partial^n}{\partial p^n\partial q^n} - \frac{\partial^n h\partial^n}{\partial q^n\partial p^n}\right\}x.$$ ۸

(ج) مقدار چشمداشتي مشاهده پذير $f(q,p)$ از قاعده زیر محاسبه مي‌شود:

$$\langle f\rangle = \int f(q,p)x^*(q,p,t)dqdp.$$ ۹

تمام جوابهاي معادله (۸) توابع حالت قابل قبول نيستند، مگر آنهايي كه شرايط زير را ارضاء كنند:

۱) براي مشاهده پذيرهايي كه عملگر نظير آنها در نمايشهاي q و p هرميتي هستند، مقادير چشمداشتي حقيقي بدهند.

۲) براي مشاهده پذيرهاي مثبت، مقادير مثبت بدهند.

۳) براي $f = 1$ معادله (۹) بايد به صورت زير درآيد:

$$\int x^* dqdp = 1.$$ ۱۰

کوانتش محیط‌هاي پيوسته در فضاي فاز گسترش يافته

همانطوري كه در بخش قبل اشاره شد، معادلات تحول يك سيستم بس ذره‌اي كوانتومي با درجه‌هاي آزادي قابل شمارش را ميتوان با فرض مسيرهاي مجازي در فضاي فاز و معرفي فضاي فاز گسترش يافته بدست آورد. در اينجا به موازات كار فوق فرمولبندي حاكم بر تحول ميدانهاي كلاسيك و كوانتومي را ارايه خواهيم كرد.

ميدانهاي كلاسيك

براي يك محيط پيوسته ميداني به صورت $\eta(q,t)$ در نظر مي‌گيريم. q و t به ترتيب متغيرهاي مكان و زمان و مستقل از يكديگرند و مي‌توانند به صورت صريح در لاگرانژي سيستم وارد شوند. براي اين ميدان چگالي لاگرانژي در فضاي مكان را به صورت زير در نظر مي‌گيريم (١٤):

$$L^{\eta} = L^{\eta}(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial q}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, q, t). \qquad ۱۱$$

اصل هاميلتوني براي تحول سيستم در فاصله زماني t_1 تا t_2 چنين خواهد بود.

$$\delta I = \delta \int_{t1}^{t2} L^{\eta} dq dt = 0 \qquad ۱۲$$

با حل معادله (١٢) مي‌توان به معادلات اويلر- لاگرانژ به صورت زير در فضاي مكان رسيد:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial L^{\eta}}{\partial(\partial \eta / \partial t)}\right] + \frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{\partial L^{\eta}}{\partial(\partial \eta / \partial q)}\right] - \frac{\partial L^{\eta}}{\partial \eta} = 0 \qquad ۱۳$$

اكنون ميدان ديگري در فضاي تكانه به صورت $\xi(p,t)$ كه در آن p و t به ترتيب متغيرهاي تكانه و زمان و مستقل از يكديگرند تعريف مي‌كنيم. در اينجا نيز همانند متغيرهاي q_1 و p_1 براي سيستمهاي با درجه‌هاي آزادي محدود $\eta(q,t)$ و $\xi(p,t)$ نيز براي حالتهاي خالص مزدوج بندادي هستند. اين نكته را بعداً توضيح خواهيم داد. چگالي لاگرانژي L^{ξ} را در فضاي تكانه به صورت زير معرفي مي‌كنيم:

$$L^{\xi} = L^{\xi}(\xi, \frac{\partial \xi}{\partial p}, \frac{\partial \xi}{\partial t}, p, t). \qquad ۱٤$$

و در نتيجه مسير تحول سيستم در فضاي تكانه نيزهمانند معادله (١٣) براساس رابطه زير خواهد بود:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial L^{\xi}}{\partial(\partial \xi / \partial t}\right] + \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{\partial L^{\xi}}{\partial \xi / \partial p}\right] - \frac{\partial L^{\xi}}{\partial \xi} = 0. \qquad ۱۵$$

اكنون تابع چگالي لاگرانژي گسترش يافته به صورت زير تعريف مي‌كنيم:

$$L = L(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial q}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \xi, \frac{\partial \xi}{\partial p}, \frac{\partial \xi}{\partial t}, q, p, t). \qquad ۱٦$$

متناظر با این گسترش اصل هامیلتوني براي تحول این میدانها در فضاي فاز را به صورت زیر تعمیم مي‌دهیم:

$$\delta I = \delta \int\int\int L dq \; dpdt = 0$$

معادلات اویلر- لاگرانژ نظیر آن چنین خواهد بود:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial\eta/\partial t)}\right]+\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial\eta/\partial q)}\right]-\frac{\partial L}{\partial\eta}=0 \qquad \text{۱۷.الف}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial\xi/\partial t)}\right]+\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial\xi/\partial p)}\right]-\frac{\partial L}{\partial\xi}=0 \qquad \text{۱۷. ب}$$

همانطوري‌که اشاره شد میدانهاي $\eta(q,t)$ و $\xi(p,t)$ شبیه آنچه در مورد سیستمهاي با درجه آزادي محدود در مرجع (۸) آمده، در حالت خالص مزدوج بندادي هستند. یعني:

$$\xi = \frac{\partial L^{\eta}}{\partial(\partial\eta/\partial t)} \qquad \text{۱۸. الف}$$

$$\eta = \frac{\partial L^{\xi}}{\partial(\partial\xi/\partial t)} \qquad \text{۱۸. ب}$$

و در حالت آمیخته مزدوج بندادي نیستند و معادلات ۱۸ صادق نخواهند بود.
با توجه به معادله ۱۸. الف چگالي هامیلتوني براي میدان η و مزدوج بندادي آن در فضاي مکان به صورت زیر نوشته مي‌شود:

$$h\left(\eta,\frac{\partial\eta}{\partial q},\frac{\partial L^{\eta}}{\partial(\partial\eta/\partial t)},q,t\right)=(\partial\eta/\partial t)\frac{\partial L^{\eta}}{\partial(\partial\eta/\partial t)}-L^{\eta}. \qquad \text{۱۹}$$

همچنین با توجه به معادله ۱۸ ب براي تابع چگالي هامیلتوني در فضاي تکانه خواهیم داشت:

$$h\left(\xi,\frac{\partial\xi}{\partial p},\frac{\partial L^{\xi}}{\partial(\partial\xi/\partial t)},p,t\right)=-(\partial\xi/\partial t)\frac{\partial L^{\xi}}{\partial(\partial\xi/\partial t)}+L^{\xi}. \qquad \text{۲۰}$$

در نتیجه چگالي لاگرانژي گسترش یافته را میتوان به صورت زیر تعریف کرد:

$$L(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial q}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \xi, \frac{\partial \xi}{\partial p}, \frac{\partial \xi}{\partial t}, q, p, t) = -(\partial \xi / \partial t)\eta - (\partial \eta / \partial t)\xi + L^{\eta} + L^{\xi}. \quad ۲۱$$

اکنون ميتوان دومين دسته از تکانه‌هاي بندادي را براي η و ξ در حالت آميخته به صورت زير معرفي کرد:

$$\pi_{\eta} = \frac{\partial L}{\partial(\partial \eta / \partial t)} = -\xi + \frac{\partial L^{\eta}}{\partial(\partial \eta / \partial t)} \quad \text{۲۲. الف}$$

$$\pi_{\xi} = \frac{\partial L}{\partial(\partial \xi / \partial t} = -\eta + \frac{\partial L^{\xi}}{\partial(\partial \xi / \partial t)} \quad \text{۲۲. ب}$$

که در آن π_{η} و $\pi\xi$ بترتيب تکانه‌هاي گسترش يافته مزدوج با η و ξ هستند. چگالي هاميلتوني گسترش يافته به صورت تابعي از تکانه‌هاي بندادي به صورت زير خواهد بود:

$$\begin{aligned} &H(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial q}, \pi_{\eta}, \xi, \frac{\partial \xi}{\partial p}, \pi_{\xi}, q, p, t) = \\ &\pi_{\eta}(\partial \eta / \partial t) + \pi_{\xi}(\partial \xi / \partial t) - L(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial q}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \xi, \frac{\partial \xi}{\partial p}, \frac{\partial \xi}{\partial t}, q, p, t). \end{aligned} \quad ۲۳$$

به کمك معادلات ۲۲ ميتوان عبارتهاي $\frac{\partial L^{\eta}}{\partial(\partial \eta / \partial t)}$ و $\frac{\partial L^{\xi}}{\partial(\partial \xi / \partial t)}$ را از معادلات ۱۹ و ۲۰ حذف کرد و چگالي هاميلتوني گسترش يافته را به صورت زير به دست آورد:

$$H = h(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial q}, \xi + \pi_{\eta}, q, t) - h(\eta + \pi_{\xi}, \xi, \frac{\partial \xi}{\partial p}, p, t) \quad ۲٤$$

اين هاميلتوني مي‌تواند در کوانتش مورد استفاده قرار گيرد.

اکنون اگر جمله اول را حول $\xi = \pi_{\eta}$ و جمله دوم را حول $\eta = \pi_{\xi}$ بسط تيلور دهيم خواهيم داشت.

$$H = \sum \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n h}{\partial \eta^n} \pi_{\xi}{}^{n} - \frac{\partial^n h}{\partial \xi^n} \pi_{\eta}{}^{n} \right\}, \quad ۲٥$$

که ميتوان با استفاده از آن معادلات حرکت را نيز بدست آورد. براي روشن شدن موضوع مثال زير را در نظر مي‌گيريم:

مثال: تار مرتعشي با چگالي جرم واحد طول μ و كشش T در نظر گرفته و با توجه به چگاليهاي انرژي جنبشي و انرژي پتانسيل ميتوان چگالي لاگرانژي را در فضاي η و در فضاي ξ به صورت زير نوشت:

۲۶. الف
$$L^{\eta} = \frac{1}{2}\mu(\frac{\partial \eta}{\partial t})^2 - \frac{1}{2}T(\frac{\partial \eta}{\partial q})^2$$

۲۶. ب
$$L^{\xi} = -\frac{1}{2T}(\frac{\partial \xi}{\partial t})^2 + \frac{1}{\mu}(\frac{\partial \xi}{\partial p})^2$$

با قرار دادن معادلات ۲٦ در معادله ۲۱ به چگالي لاگرانژي گسترش يافته ميرسيم.

$$L(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial q}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \xi, \frac{\partial \xi}{\partial p}, \frac{\partial \xi}{\partial t}, q, p, t) =$$

$$-(\frac{\partial \xi}{\partial t})\eta - (\frac{\partial \eta}{\partial t})\xi + \frac{1}{2}\mu(\frac{\partial \eta}{\partial t})^2 - \frac{1}{2T}(\frac{\partial \xi}{\partial t})^2 - \frac{1}{2}T\frac{\partial \eta^2}{\partial q} + \frac{1}{2\mu}(\frac{\partial \xi}{\partial p})^2 \qquad ۲۷$$

با استفاده از معادله ۲۷ و با بكار بردن معادلات ۱۷ ميتوان به معادلات موج براي ξ, η رسيد. يعني:

۲۸. الف
$$\mu\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - T\frac{\partial^2 \eta}{\partial q^2} = 0$$

۲۸. ب
$$-\frac{1}{T}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 \xi}{\partial p^2} = 0.$$

معادلات ۲۸ تحول تار مرتعش را به ترتيب در فضاي مكان و تكانه براي حالتهاي خالص و آميخته نشان مي‌دهند. در حالتهاي خالص η و ξ مزدوج يكديگرند و در حالتهاي آميخته مستقل از هم تحول مي‌يابند. براي توضيح بيشتر حالتهاي خالص و آميخته، هاميلتوني گسترش يافته تار مرتعش را با استفاده از معادله ۲٤ مي‌نويسيم:

$$H = \frac{1}{2\mu}(\xi + \pi_{\eta})^2 + \frac{1}{2}T(\frac{\partial \eta}{\partial q})^2 - \frac{1}{2}T(\eta + \pi_{\xi})^2 - \frac{1}{2\mu}(\frac{\partial \xi}{\partial p})^2$$

به سهولت ميتوان نشان داد كه يكي از جوابهاي ممكن معادلات هاميلتون براي هاميلتوني فوق $\pi_\eta = \pi_\xi = 0$ است (۸). در اين صورت طبق معادلات ۲۲ η و ξ مزدوج يكديگر مي‌شوند و اين وضعيت در طول تحول نيز حفظ مي‌شود و نشانگر حالتهاي خالص است. جوابهاي غير صفر π_η و π_ξ متناظر با حالتهاي آميخته است. در اين حالت طبق معادله ۲۲ η و ξ مزدوج يكديگر نخواهند بود و معادلات هاميلتون به دو دسته معادلات مستقل براي η و ξ تبديل مي‌شود. جنبه مثبت اين روش در سطح كوانتش ميدانها ظاهر مي‌شود و حضور حالتهاي آميخته در هاميلتوني قبل از كوانتش، اين مكان را فراهم مي‌كند كه بدون استفاده از مكانيك كوانتمي متعارف بتوان تحول ميدانهاي كوانتومي را كه در حالتهاي آميخته هستند، در فضاي فاز فرمولبندي كرد (۸، ۱۲، ۱۳).

ميدانهاي كوانتومي

اگر X يك فضاي هيلبرت باشد، در اين فضا مي‌توانيم سه اصل زير را براي كوانتش فضاي فاز بيان كنيم:

الف) $\eta(q,t)$ و $\xi(p,t)$ را در فضاي X به عنوان عملگرهاي مستقل نرده‌اي و π_η و π_ξ را به عنوان عملگرهاي ديفرانسيلي به صورت زير در نظر مي‌گيريم:

$$\pi_\eta = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\eta} \qquad \text{۲۹. الف}$$

$$\pi_\xi = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\xi} \qquad \text{۲۹. ب}$$

اين عملگرها روابط جابجايي زير را ارضا مي‌كنند:

$$\left[\pi_\eta(q,t), \eta(q',t)\right] = -ih\delta(q-q'), \qquad \text{۳۰. الف}$$

$$\left[\pi_\xi(p,t), \xi(p',t)\right] = -ih\delta(p-p'). \qquad \text{۳۰. ب}$$

همچنين:

$$\left[\pi(q,t), \xi(p,t)\right] = 0 \qquad \text{۳۱. الف}$$

$$\left[\pi_\eta(q,t), \pi_\xi(p,t)\right] = 0 \qquad \text{۳۱. ب}$$

این روابط جابجايي ايجاب مي‌كنند كه η و ξ يا π_ξ,π_η همزمان با دقت قابل اندازه‌گيري باشند، در حالي كه اندازه‌گيريهاي همزمان و دقيق $\xi(p,t),\pi_\xi(p,t)$ يا $\eta(q,t),\pi_\eta(q,t)$ انجام‌پذير نيست.

ب) با داشتن H بعنوان يك عملگر هرميتي و يك تابع حالت $x(\xi,\eta,t)\in X$ ميتوان با استفاده از رابطه (۲۵) معادله‌اي شبيه به معادله شرودينگر نوشت بنحوي كه تابع حالت x در اين معادله صدق كند، يعني

$$ih\frac{\partial x}{\partial t}=Hx=\sum\frac{(-ih)^n}{n!}\left\{\frac{\partial^n h}{\partial\eta^n}\frac{\partial^n}{\partial\xi^n}-\frac{\partial^n h}{\partial\xi^n}\frac{\partial^n}{\partial\eta^n}\right\}x. \qquad ۳۲$$

رابطه ۳۲ يك معادله تحول است. با انتخاب تابع چگالي لاگرانژي مناسب و با پيدا كردن تابع چگالي هاميلتوني نظير آن مي‌توانيم معادله بالا را حل و ويژه تابع مورد نظر را پيدا كنيم.

ج) در نهايت با داشتن تابع حالت $x(\eta,\xi,t)$ مي‌توانيم مقدار چشمداشتي هر مشاهده‌پذير را در فضاي فاز محاسبه كنيم، مثلاً براي مشاهده‌پذير A خواهيم داشت.

$$\langle A\rangle=\int A(\xi,\eta)x^*(\eta,\xi,t)d\xi\ d\eta. \qquad ۳۳$$

بدين ترتيب روش كوانتش سيستم ذرات در فضاي فاز گسترش يافته به موضوع ميدانها در اين فضا تعميم داده مي‌شود.

بحث و نتيجه‌گيري

بنحوي كه ملاحظه شد در اين مقاله روش فضاي فاز گسترش يافته را در مورد كوانتش سيستمهاي بس ذره‌اي با درجه‌هاي آزادي محدود به تحول ميدانهاي كلاسيك و كوانتومي تعميم داديم. بدين ترتيب تحول اينگونه ميدانها در فضاي فاز امكان‌پذير مي‌شود. البته استفاده از تكنيك فضاي فاز در مسايل مربوط به سيستمهاي بس ذره‌اي و ميدانها مرسوم است، به عنوان مثال در مساله مربوط به يافتن سطح مقطع پراكندگي براي الكترون‌هاي نسبيتي و غير نسبيتي از يك پتانسيل، براي محاسبه اجزا ماتريس پراكندگي و تعداد حالتهاي نهايي ممكن از فضاي فاز

استفاده مي‌كنيم، لكن در اين روش، فضاي فاز نه بعنوان يك تكنيك رياضي در حاشيه نظريه بلكه بعنوان يك محمل اصلي از ابتدا وارد مي‌شود. اين حضور فضاي فاز در مرحله كوانتش بدليل گسترش فضاي فاز در سطح كلاسيك است كه بر خلاف تصوير شرودينگر موجب مي‌شود توابع حالت كوانتومي بجاي فضاي مكان يا فضاي تكانه در فضاي فاز نوشته شوند. در مورد ميدانهاي كلاسيك تار مرتعش بعنوان مثالي از كاربرد اين روش بررسي شد كه تحول آن را در فضاي مكان و تكانه به طور همزمان بدست آوريم. البته اين نتايج در حد كلاسيك شبيه آنچه كه در خصوص سيستمهاي بس ذره‌اي با تعداد درجه‌هاي آزادي محدود ديديم اطلاعات جديد ندارد. لكن در مرحله كوانتش منجر به مكانيك آماري كوانتومي مي‌شود و دليل آن حفظ فضاي فاز در مرحله كوانتش است. در مورد ميدانهاي كوانتومي نيز مسايلي از قبيل تحول حالتهاي همدوس و چلانده و تفسير تبديلات پيمانه‌اي ميدانهاي الكترومغناطيسي به عنوان نوعي از تبديلات بندادي در فضاي فاز گسترش يافته بررسي شده‌اند كه در جاي ديگر ارايه خواهد شد.

منابع

۱- محمد تقي فلاحي مروست- سعداله نصيري، مجله پژوهشي علوم پايه دانشگاه اصفهان، ۱۳۸۱.

۲. E. P. Wigner, Phys. Rev. ٤۰, ۷٤۹, (۱۹۳۲).

۳. J.E. Moyal, Proc. Camb. Philos, Soc. ٤۵, ۹۹, (۱۹٤۹).

٤. M. Hillery, R.F. O,connell, M O Scully, E. P. Wigner, Phys. Rev. ۱۰٦, ۱۲۱, (۱۹۸٤).

۵. C. L. Mehta. J. Math. Phys., ۵،٦۷۷, (۱۹٦٤).

٦. Y. S. Kim. E. P. Wigner, Am. J. Phys. ۵۸(۵), ٤۳۹, (۱۹۹۰).

۷. R. J. Kubo, Phys. Soc. Japan, ۱۹, ۲۱۲۷, (۱۹٦٤).

۸. H. Dekker, Phys. Rev., ۱, ۸۰, (۱۹۸۱).

۹. Y. Sobouti, S. Nasiri, Int. J. Mod. Phys. B., ۱۸, ۷, (۱۹۹۳).

۱۰. Y. Sobouti, S. Nasiri, Tr. J. Phys., ۱۹. ۲, (۱۹۹۵).

۱۱. S. Nasiri, Iranian J. Sci, Tech., ٤،۳, (۱۹۹۵).

۱۲. S. Nasiri, Proc. Applied Math. Baku State Univ. & Zanjan Univ., ۱۲۹ (۱۹۹۵).
۱۳. S. Khademi and S. Nasiri, Iranian J. Sci. Tech., ۲٦. Al, (۲۰۰۲).
۱٤. H. Goldstein, Claslsical Mechanics. Addison-Wesley Pub., Chap. ۱۲, (۱۹۸۰).