تعيين كنترل بهينة دروني وابسته به زمان و مكان براي يك سيستم موج خطي ناهمگن بر مبناي جواب كلاسيك و اندازهها

عليرضا فخارزادة جهرمي* و سيد رسول علمدار فهفرخي**

* گروه رياضي دانشگاه صنعتي شيراز

** گروه رياضي دانشگاه آزاد اسلامي واحد شهركرد

چكيده

استفاده از جوابهاي كلاسيك معادلات ديفرانسيل با مشتقات جزيي بصورتي مستقيم كمتر در روش نشاندن براي حل مسايل كنترل بهينه مدنظر گرفته شده است. هدف اين مقاله تعيين كنترل بهينة دروني براي يك سيستم فيزيكي متضمن معادله موج خطي و ناهمگن، داراي شرايط مرزي اوليه و انتهايي، بر مبناي جواب كلاسيك آن است. ابتدا به شناسايي اين جـواب پرداختـه و آنگـاه بـا انجـام يـك دگرديسي مطابق روش نشاندن، مساله به مسالهاي از نوع كمينه سازي تابعي خطي روي مجموعهاي از انـدازههـاي رادن مثبـت مبـدل ميشود. خواص اندازه بهينه ما را قادر ميسازد كه در دو گام تقريب آن را بوسيله جواب مسالهاي از نوع برنامـهريـزي خطـي متنـاهي شناسايي كرده چنانكه كنترل بهينه بصورت تابعي قطعهاي ثابت معرفي گردد. مثالهاي عددي ارايه شده نيز تواناييهـاي ايـن روش را بـا ارايه و مقايسه نتايج نمايش خواهند داد.

واژههاي كليدي: معادلة موج، تقريب، جواب كلاسيك، اندازة رادون، روش نشاندن، كنترل بهينه و برنامهريزي خطي

مقدمه

نگرشي ساده در پديـدههـاي جهـان اطـراف، از وزش بادها، جريان آبها و صوت گرفتـه تـا فعاليتهـاي ابزارهـاي پيچيده ارتباطي، مويد اهميـت وافـر امـواج اسـت. از ايـن روست كه مبحث موج در سطوح مختلف، جـزو مباحـث هميشگي و پايدار مهندسي و فيزيك از سطوح ابتـدايي تـا پيشرفته است؛ و از اين روست كه شاهد ادبيـاتي غنـي در رياضي چه به منظور گـسترش مرزهـاي دانـش و چـه بـه منظور پشتيبانيهاي لازم در خصوص اين مبحث ميباشيم.

هدايت سيستم‌هاي موج در وضعيتهاي مختلف از جمله موضوعات هميشه مطرح در رشته رياضي كاربردي بوده است كه در [۴] برخي از اين منابع معرفي گرديده‌اند. از جمله كارهاي اخير در اين راستا مي‌توان به [۹] و [۱۱] در خصوص تعيين كنترل بهينه براي سيستمهاي هدايت شده توسط معادلات موج بصورتي تقريبي و همچنين بررسي مشاهده پذيري، كنترل پذيري و پايداري سيستم بااستفاده از تابع گريز در سال ۲۰۰۳ در [۱۰] اشاره نمود. اما بدنبال ارايه روش نشاندن توسط روبيو در سال ۱۹۸۶ در [۱۲]، و با توجه به تواناييهاي متعدد و قوي اين روش، تلاشهاي موفق فراواني جهت حل مسايل مختلف كنترل بهينة با استفاده از اين روش انجام گرفت. به عنوان نمونه مي‌توان به [۷]، [۴] و [۳] اشاره نمود. فراهي در [۵] چگونگي تعيين كنترل بهينة مرزي معادله موج خطي همگن را بررسي كرده است. آنها با استفاده از جواب كلاسيك ارايه شده به اين عمل اقدام نمودند. همچنين علوي و ديگران در [۱] كنترل بهينة يك سيستم هدايت شده توسط معادله موج خطي غير همگن را از روش نشاندن بدست آوردند. گرچه آنان در اين تلاش موفق به تبيين كنترل دروني بهينه در حالت يك و دو بعدي گرديده‌اند و حتي از جواب كلاسيك (تحليلي) نيز بهره گرفته‌اند،اما نظير [۲] از مسير سختي عبور نموده‌اند، تبديل مساله به يك مساله گشتاور و سپس بكارگيري نظريه نيم گروهها. بعلاوه كنترل دروني مورد بحث آنان فقط وابسته به زمان بود.

ما نيز در اين نوشتار بدنبال تبيين كنترل بهينة دروني معادله موج خطي و ناهمگن با استفاده جواب كلاسيك معادلات موج و خواص سريهاي فوريه و همچنين كاربري روش نشاندن هستيم. اما در تفاوت با [۱]، اول مسير ما در اين تلاش بي‌نياز از در نظر گرفتن مساله به فرم يك مساله گشتاور است. دوم كنترل دروني مورد نظر سيستم وابسته به دو عامل زمان و مكان است. همچنين علاوه بر كلي‌تر بودن سيستم، قادريم از جواب كلاسيك بطور مستقيم استفاده كرده و روش نشاندن را بدون واسطه بكار ببريم. بدين منظور سيستمي كنترلي را در نظر مي‌گيريم كه توسط معادله موج خطي و ناهمگن زير هدايت مي‌گردد.

$$Y_{tt}(x,t) - a^{۲} Y_{xx}(x,t) = u(x,t) \qquad (۱)$$

در اين معادله تابع $(x,t) \to Y(x,t)$ نمايانگر تغييرات سيستم در وضعيت x و زمان t در $(0,S)\times(0,T)$ هستند جايي كه $S,\ T>۰$ اعداد حقيقي ثابت و α سرعت انتشار موج باشد. شرايط اوليه و مرزي چنين سيستمي عبارتند از:

$$Y(x,\circ) = f(x),\ \ Y_t(x,\circ) = h(x),\ \ Y(\circ,t) = \circ,\ \ Y_t(S,t) = \circ, \qquad (۲)$$

كه در آنها f و h توابع حقيقي معيني بر $[۰, S]$ مي‌باشند. تابع مجهول اندازه پذير $(x,t) \in [0,S]\times[0,T] \to u(x,t) \in \mathbf{R}$ در (۱) در اصل تابع كنترل سيستم مي‌باشد كه وابسته به مكان و زمان است. با تعيين آن قادريم سيستم را چنان هدايت كنيم كه تابع هدف مورد نظري در عين برقراري سيستم، بهينه گردد. لازم به ذكر است كه اكثر پديده‌هاي موج خطي از معادله (۱) پيروي مي كنند. ([۶]). همچنين در [۱] و حتي [۲] جمله سمت راست در معادله نظير (۱) بصورت $b(x)u(t)$ در نظر گرفته شده است.

تعريف: كنترل u را قابل قبول گوييم هر گاه بر مجموعه $[0,S]\times[0,T]$ تابعي انتگرال پذير لبگ بوده و علاوه بر برقراري معادلات (۱) و (۲) و در شروط زير نيز صدق كند:

الف) براي هر $(x,t) \in [0,S]\times[0,T]$ داشته باشيم:

$$|u(x,t)| \le 1 \ (\alpha e)$$

ب) براي $g_1(x), g_2(x) \in L_2[0,S]$ داده شده، هر جواب شرطهاي انتهايي زير را نيز برقرار كند:

$$Y(x,T)=g_1(x) \qquad Y_t(x,T)=g_2(x). \quad (۳)$$

مجموعه همه كنترلهاي قابل قبـول را بـا $\mathcal{U}$ نمـايش مـي‌دهـيم. لازم به ذكر است كه شرط الف بدون كاستن از كليـت مـساله بيانگر كرانداري تابع u است. هدف تبيين كنتـرل بهينـه $u \in \mathcal{U}$ اســـت بـــه طـــوري كـــه بـــراي تـــابع داده شـــده $f_0 \in C(\Omega)$ بـا $\Omega=[0,S]\times[0,T]\times[-1,1]$ تـابعي زيـر كمينـه گردد:

$$I(u)=\int_0^T\int_0^S f_0(t,x,u(t,x))\,dx\,dt. \quad (۴)$$

در رسيدن به اين هدف با مشكلاتي جدي مواجه هـستيم: مساله فوق ممكن است اصلاً جـواب نداشـته باشـد و يـا جوابي در $\mathcal{U}$ نداشـته باشـد؛ يـا حتـي در صـورت وجـود جواب، تعيين آن مشكل باشد ([۱۲]). براي فايق آمدن بـر چنين مشكلاتي و نظاير آنها، با استفاده از نتـايج كلاسـيك در زمينه سيستمهاي هدايت شده با معادلات موج، به طرح مساله در فضاي مناسبي اقدام خواهيم كرد.

جواب كلاسيك

همانگونه كه در [۱۴] نـشان داده شـده اسـت، جـواب معادله موج (۱) بـا توجـه بـه شـرايط اوليـه و مـرزي (۲) بصورت زير خواهد بود:

$$Y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\int_0^t C_nQ_n(\tau)\sin(K_n(t-\tau))d\tau + A_n\cos(K_nt)+B_n\sin(K_nt)\Big)\sin\frac{n\pi x}{S} \quad (۵)$$

كه براي ...، ۳، ۲، ۱ = n داريم:

$$A_n=\frac{2}{S}\int_0^S f(x)\sin\frac{n\pi x}{S}dx\ ,$$
$$K_n=\frac{na\pi}{S}\ ,\quad C_n=\frac{1}{K_n}$$
$$B_n=\frac{2}{K_nS}\int_0^S h(x)\sin\frac{n\pi x}{S}dx\ ,$$
$$Q_n(t)=\frac{2}{S}\int_0^S u(x,t)\sin\frac{n\pi x}{S}dx.$$

با مشتق‌گيري مستقيم از (۵) و با اتكـا بـه قـضاياي آنـاليز نتيجه مي‌شود:

$$Y_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}K_n\Big(\int_0^t C_nQ_n(\tau)\cos(K_n(t-\tau))d\tau - A_n\sin(K_nt)+B_n\cos(K_nt)\Big)\sin\frac{n\pi x}{S} \quad (۶)$$

چـون $g_1(x),g_2(x)\in L_2[0,S]$ پـس داراي بـسط فوريـه سينوسي زير خواهند بود ([۸]):

$$Y(x,T)=g_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{S}\ ,$$
$$Y_t(x,T)=g_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{S} \quad (۷)$$

كه در آن براي ...، ۳، ۲، ۱ = n داريم:

$$a_n=\frac{2}{S}\int_0^S g_1(x)\sin\frac{n\pi x}{S}dx\ ,$$
$$b_n=\frac{2}{S}\int_0^S g_2(x)\sin\frac{n\pi x}{S}dx$$

از تساوي روابط (۵) و (۶) با (۷) براي t=T، معادلات زير براي n = ۱، ۲، ۳، ... نتيجه مي‌شود:

$$\int_{0}^{T} C_n \sin K_n(T-t)Q_n(t)dt + A_n \cos K_nT + B_n \sin K_nT = a_n;$$

$$\int_{0}^{T} C_n \cos K_n(T-t)Q_n(t)dt - A_n \sin K_nT + B_n \cos K_nT = C_nb_n.$$

با ضرب طرفين تساويهاي فوق به ترتيب در $x= \sin K_nT- \cos K_nT$ و $Z= \sin K_nT+\cos K_nT$ و سپس جمع و ساده سازي، داريم:

$$\int_{0}^{T} C_n(\sin K_nt + \cos K_nt)Q_n(t)dt = A_n - B_n + a_nX + \frac{b_n}{K_n}Z; \quad n = 1, 2, 3, ...$$

با تعريف $\gamma_n = A_n - B_n + a_nX + \frac{b_n}{K_n}Z$ و جايگذاري $Q_n(t)$ در فوق خواهيم داشت:

$$\int_{0}^{T}\int_{0}^{S} \frac{2C_n}{S}(\sin K_nt + \cos K_nt)\sin\frac{n\pi x}{S}u(x,t)dxdt = \gamma_n; \quad n = 1, 2, 3, ...$$

چون $\frac{C_n}{S} = \frac{1}{na\pi}$ تعريف مي‌كنيم:

$$\psi_n(t,x,u(x,t)) = \frac{2}{na\pi}(\sin K_nt + \cos K_nt)\sin\frac{n\pi x}{S}u(x,t)$$

بنابراين برقراري معادله ديفرانسيل با مشتقات جزئي (۱) همراه با شرايط اوليه، مرزي و انتهايي (۲) و (۳)، با برقراري تساويهاي انتگرالي زير معادل است:

$$\int_{0}^{T}\int_{0}^{S} \psi_n(t,x,u(x,t))dxdt = \gamma_n; \quad n = 1, 2, 3, ...$$

(۸)

دگرديسي به فضاي اندازه ها

در حالت كلي مساله كنترل بهينه بيان شده در بخشهاي پيشين ممكن است جواب نداشته باشد و يا حتي در صورت وجود جواب، دست‌يابي به آن به سادگي امكان پذير نباشد. براي اطمينان از غلبه بر اين مشكلات، به گسترش فضاي جواب به فضايي بزرگتر و داراي اطمينان خاطر نسبت به وجود جواب و دست يافتني بودن آن اقدام خواهي نمود. هر كنترل $u \in u$، يك تابعي خطي مثبت روي $c(\Omega)$ را بصورت

$$\Lambda_u(F): F \to \int_0^T \int_0^S F(t,x,u(x,t))dxdt, \quad \forall F \in C(\Omega)$$

تعريف مي‌كند. اكنون بنا به قضيه نمايش ريس اندازه بورل مثبت منحصر بفردي مانند μ_u در $M^+(\Omega)$ وجود دارد كه براي هر $F \in C(\Omega)$ داريم

$$\int_{0}^{T}\int_{0}^{S} F(t,x,u(x,t))dxdt = \int_{\Omega} F(t,x,u(x,t))d\mu_u \equiv \mu_u(F).$$

(۹)

بنابراين كمينه سازي تابعي (۴) روي u با كمينه سازي $I(\mu_u)=\int_\Omega f_0 d\mu_u \equiv \mu_u(f_0)$ روي مجموعه‌اي از اندازه‌هاي μ_u، متناظر با كنترلهاي قابل قبول u، كه در روابط زير نيز صدق مي‌كنند معادل مي‌باشند:

$$\mu_u(\psi_n)=\gamma_n, \qquad n=۱,۲,۳,.... \qquad (۱۰)$$

اما تبديل $u \to \Lambda_u \equiv \mu_u$ يك به يك است (نظير [۱۲])؛ پس مجموعه تصويرهاي همه كنترلهاي قابل قبول مساله با مجموعه همه اندازه‌هاي رادن مثبتي كه در روابط (۹) صدق مي‌كنند معادل است. بنابراين تمام مشكلات قبلي مساله كلاسيك هنوز موجودند و در ماهيت آنها تغييري ايجاد نشده است. اكنون جهت غلبه بر اين مشكلات مجموعه تصاوير تحت تبديل فوق را گسترش داده و اين مساله غير كلاسيك را در نظر مي‌گيريم: از ميان تمام اندازه‌هاي رادن مثبت عضو $Q \subset M^+(\Omega)$، در جستجوي اندازه μ^* هستيم آنچنانكه روابط (۹) را برقرار نموده و كمينه ساز تابع $\mu \to \mu(f_0)$ باشد. (در اصل كمينه سازي را روي زير مجموعه اندازه‌هاي مثبت μ انجام مي‌دهيم كه فقط در روابط (۹) صدق كنند نه اينكه لزوماً از قضيه نمايش ريس حاصل شده باشند.) اندازه‌هاي موجود در Q داراي خواصي هستند كه از تعريف كنترلهاي قابل قبول نتيجه شده و بصورت زير مي‌توانند در نظر گرفته شوند:

۱) اين اندازه‌ها بايستي در رواط (۹) صدق كنند، يعني
$\mu(\psi_n)=\gamma_n\ ,\ \forall n=$ = ۱، ۲، ۳، ...

۲) فرض كنيم $G \in C_1(\Omega)$ دلخواه باشد، ($C_1(\Omega)$ فضاي همه توابع مستقل از u است) در اين صورت اندازه‌هاي موجود در Q بايستي در رابطه
$$\mu(G)=\int_\Omega G d\mu=\int_0^T\int_0^S G(t,x,u(x,t))dxdt \equiv aG$$
صدق كنند.

لذا مجموعه $Q \subset M^+(\Omega)$ مي‌تواند بصورت $Q=S_1 \cap S_2$ تعريف مي‌گردد: كه

$S_1=\{\mu:\mu(\psi_n)=\gamma_n, n=1,2,3,...\}$

و $S_2=\{\mu:\mu(G)=a_G, G\in C_1\}(\Omega)\}$

اكنون با مجهز كردن فضاي $M^+(\Omega)$ به توپولوژي ضعيف ستاره، گزاره زير را داريم:

گزاره ۱: اگر فضاي $M^+(\Omega)$ به توپولوژي ضعيف – ستاره مجهز شود آنگاه Q فشرده است و بعلاوه تابع $\mu \to \mu(f_0)$ كه مجموعه Q را به **R** مي‌نگارد، پيوسته است.

اثبات: مشابه گزاره نظير در [۱۲] است.

اكنون چون $\mu \to \mu(f_0)$ تابعي خطي و پيوسته روي مجموعه فشرده Q است پس اينفيمم خود را در Q اختيار مي‌كند. اين واقعيت مبين آن است كه مساله كمينه سازي غير كلاسيك زير كه توسيع يافته مساله كمينه سازي كلاسيك (۴) با توجه به روابط (۱) الي (۳) است، در فضاي اندازه‌هاي رادن مثبت، داراي كمينه سازي كلي نظير μ^* مي‌باشد:

$$\begin{aligned} &Minimize: \quad \mu(f_0) \\ &Subject\ to: \quad \mu(\psi_n)=\gamma_n \quad , n=۱,۲,۳,...; \\ &\qquad\qquad \mu(G)=a_G \quad , G\in C_۱(\Omega). \end{aligned} \qquad (۱۱)$$

جواب مساله فوق جوابي كلي است زيرا Q مجموعه‌اي توسيع يافته از U است. از اين رو خواهيم داشت: $\inf_{\mu\in Q} I(\mu) \le \inf_{\mu\in u} I(u)$. همچنين (۱۱) يك مساله از نوع برنامه‌ريزي خطي (نامتناهي) است؛ زيرا تمام عبارات برحسب اندازه مجهول μ خطي است، لذا قادريم كه تمام تواناييهاي آناليز خطي براي حل بهره برگيريم (حتي اگر

تابع هدف مساله اصلي بشدت غير خطي باشد) و اين از مزاياي بارز اين روش است.

باوجود اثبات وجود وجود اندازه بهينه μ^* توسط گزاره (۱)، به دست آوردن آن هنوز چندان ساده نيست؛ زيرا علاوه بر اينكه تعداد قيود در (۱۱) نامتناهي هستند، فضاي جواب مساله يعني Q، نيز نامتناهي است. ليكن هردوي اين عوامل با توجه به خواص اندازه بهينه قابل تقريب هستند و با استفاده از تواناييهاي رياضي مي‌توان جوابي به قدر كافي نزديك به جواب بهينه را شناسايي نمود كه اين نيز از مزاياي اين روش است. در بخش بعدي به بيان فرآيند تقريب سازي خواهيم پرداخت.

۴ فرآيند تقريب كنترل بهينه با كنترلي قطعه‌اي ثابت

نشان داده شده است كه عمل اندازه بهينه، قابل تقريب با يك اندازه μ_u در $M^+(\Omega)\cap S_1\cap S_2$ متناظر با كنترل قابل قبول قطعه‌اي ثابت u است، زيرا اگر فرض كنيم كه Q_1 مجموعه همه اندازه‌هايي به شكل μ_u باشد، آنگاه بنا به [۵] (و يا [۱۲]) وقتي $M^+(\Omega)$ به توپولوژي ضعيف- ستاره مجهز شده باشد Q_1 در $M^+(\Omega)\cap S_1\cap S_2$ چگال است. يك پايه از همسايگي‌هاي بسته صفر در اين توپولوژي با مجموعه‌هايي به شكل $U_\epsilon=\{\mu:|\mu(F_n)|\le\epsilon, n=1,2,\dots,k+1\}$ كه $\kappa\in\mathbf{Z}^+$، $\epsilon>0$ و $F_n\in C(\Omega)$ مي‌تواند معرفي شود. بنابراين مي‌توان يك اندازه μ_u متناظر باكنترل قطعه‌اي ثابت در هر همسايگي ضعيف- ستاره از μ^* را بدست آورد. بخصوص اگر قرار دهيم: $F_1=f_0, F_2=\psi_1, F_3=\psi 2,\dots, F_{k+1}=\psi\kappa$، آنگاه كنترل قطعه‌اي ثابت $u_\kappa(\cdot,\cdot)$ را مي‌توان به گونه‌اي يافت بطوري كه براي هر $\epsilon>0$ و $n=1,2,\dots,\kappa$ داريم

$$\left|\int_\circ^T\int_\circ^S f_\circ(t,x,u_k(x,t))dxdt-\mu^*(f_\circ)\right|\le\epsilon,$$
$$\left|\int_\circ^T\int_\circ^S \psi_n(t,x,u_k(x,t))dxdt-\gamma_n\right|\le\epsilon.$$

بنابراين با استفاده از كنترل قطعه‌اي ثابت $u_\kappa(\cdot,\cdot)$، مي‌توان نظير ϵ دلخواه، مينيمم مقدار $\mu^*(f_0)$ را بدست آورد. اكنون فرض كنيد براي $\frac{\partial}{\partial t}Y_\kappa(x,T), x\in[0,S]$ به ترتيب حالت نهايي موج و مشتق آن باشند كه از جايگذاري $u_\kappa(\cdot,\cdot)$ در (۵) بدست آمده‌اند. نشان خواهيم داد كه اگر ϵ بقدر كافي كوچك و κ بقدر كافي بزرگ اختيار شوند، فاصله بين $g_1(\cdot)$ و $g_2(\cdot)$ به ترتيب با $Y_\kappa(x,T)$ و $\frac{\partial}{\partial t}Y_\kappa(x,T)$ در $L_2(\cdot,S)$ مي تواند از هر مقدار دلخواه كوچكتر شود (به بيان ديگر شرايط پاياني با بكارگيري u_κ با تقريب دلخواه برآورده مي‌شوند).

گزاره ۲: براي $\delta>0$، اعداد κ و $\epsilon>0$ را مي‌توان به گونه‌اي اختيار كرد كه :

الف) $\int_0^S (Y_\kappa(x,T)-g_1(x))^2dx\le\delta$

ب) $\int_0^S \left(\frac{\partial}{\partial t}Y_\kappa(x,T)-g_2(x)\right)^2dx\le\delta$

اثبات: كافي است شيوه بيان شده در [۵] براي اثبات قضيه نظير، به تشابه پيگيري شود.

۵ تقريب اندازه بهينه در دو گام

مساله كمينه سازي (۱۱) مساله‌اي از نوع برنامه‌ريزي خطي با بعد نامتناهي است كه در آن علاوه بر فضاي جواب، تعداد قيود نيز نامتناهي مي‌باشد. اكنون سعي خواهيم نمود تا جواب آنرا با جواب حاصل از حل يك مساله برنامه ريزي خطي متناهي تقريب نماييم. در گام اول تعداد قيود مساله را محدود مي‌كنيم. بدين منظور ابتدا از مجموعه S_1 تعداد M_1 محدوديت را انتخاب مي‌كنيم. براي S_2، ابتدا فرض مي‌كنيم مجموعه $\{G_i\}_{i=1}^\infty$ يك

مجموعـه چگـال و شـمارا در $C_1(\Omega)$ باشـد (مـثلاً چنـد جمله‌ایها به صورت $x^i t^j$). در این صورت هر تابع پیوسـته در این فضا را می‌تـوان بـا ترکیـب متنـاهي از ایـن توابـع تقریـب نمـود، لـذا قیـود دسـته دوم بـه صـورت $\mu(G_i)=a_i,(i=1,2,3,..)$ خواهند بود؛ جایي که a_i انتگـرال لبـگ G_i روي $[0,T]\times[0,s]$ مـي‌باشـد. بنـابراین، مطـابق گزارهٔIII.1 از [۱۲]، با انتخـاب تعـداد متنـاهي $M_۲$ از ایـن توابع (۱۱) را مي‌توان با جواب مساله زیر تقریب نمود:

$$\begin{aligned}&Minimize: && \mu(f_0)\\ &Subject\ to: && \mu(\psi_n)=\gamma_n, \quad n=1,2,3,...,M_1;\\ & && \mu(G_i)=a_i, \quad i=1,2,...,M_2.\end{aligned}$$

(۱۲)

در گام بعدي توجه داريم که اندازه بهينه μ^* مـساله فـوق بنا به [۱۲] داراي فـرم نمايـشي $\mu^*=\sum_{l=1}^{M_1+M_2}\alpha_l^*\delta(z_l^*)$ است جايي کـه $z_l^*\in\Omega$ ، $\alpha_l^*\geq 0$ ، $(l=1,2,...,M_1+M_2)$ و $\delta(t)$ اندازه اتمي يکاني با تکيه‌گاه t است. استفاده از ايـن شکل نمايش در بيان مـساله (۱۴) بـا توجـه بـه خاصـيت اندازه اتمـي موجـب مـي‌گـردد کـه مجهـولات مـساله از اندازه‌هاي رادن مثبـت، بـه دو دسـته ديگـر از مجهـولات مبدل گردند. آنها عبارتند از: ضرايب $\{\alpha_l^*\}_{L=1}^{M_1+M_2}$ و تکيـه گاههاي $\{z_l^*\}_{L=1}^{M_1+M_2}$. روبيو در [۱۲] بيان مي‌کند که اندازه بهينه مي‌توانـد بـا انـدازه $\upsilon^*=\sum_{l=1}^{M_1+M_2}\alpha_l^*\delta(z^l)$ تقريـب گـردد، کـه در آن $\alpha_l^*\geq 0$ ضـرايب حقيقـي مجهـول و $z^l=(t^l,x^l,u^l)$ مقـاديري متعلـق بـه يـك زيـر مجموعـه چگال و شمارايي چون W از Ω مي‌باشند که مقـادير z_l^* توسط آنها تقريب مي‌گردد. بنابراين اگر تعداد N از عناصر W را در يك گسسته‌سازي بـه عنـوان گرههـاي z^l اختيـار شوند، مساله برنامه‌ريزي خطي فوق به شـکل زيـر تبـديل مي‌شود:

$$\begin{aligned}&Minimize: && \textstyle\sum_{l=1}^{N}\alpha_l f_0(z_l)\\ &Subject\ to: && \textstyle\sum_{l=1}^{N}\alpha_l\psi_n(z_l)=\gamma_n, \quad n=1,2,...,M_1;\\ & && \textstyle\sum_{l=1}^{N}\alpha_l G_i(z_l)=a_i, \quad i=1,2,...,M_2;\\ & && \alpha_l\geq 0, \quad l=1,2,...,N.\end{aligned}$$

(۱۳)

گاهي در عمل مشاهده شده است که مسائل برنامه‌ريـزي خطي به شکل فوق براي انتخابهاي G_iها، جوابهاي شـدني ندارند؛ مثلاً وقتي که انتخاب صرف توابـع چنـد جملـه‌اي باشد ([۱۲] صفحات ۵۳-۵۴). براي غلبه بـر ايـن مـشکل احتمالي و همچنين به منظور توانـايي در شناسـايي کنتـرل بهينه بصورت تابعي قطعه‌اي ثابـت پـس از تعيـين انـدازه بهينه، مي‌توان مانند [۱۲] و [۵] انتخـاب خاصـي را انجـام داد. فرض کنيد بازه‌هاي $[0,T]$ و $[0,S]$ به m_1 و m_2 قسمت مـساوي تقـسيم شـوند بطـوري کـه $M_2=m_1m_2$. براي $i=1,2,...,m_1$ و $j=1,2,...,m_2$ ، $I_{ij}=[\frac{T(i-1)}{m_1},\frac{T_i}{m_1})\times[\frac{S(j-1)}{m_2},\frac{S_j}{m_2})$ اختيـار مـي‌کنـيم؛ بـا فرض $z=(t,x,u)\in W$ تعريف مي‌کنيم؛

$$f_{ij}(z)=\begin{cases}1 & z\in I_{ij}\\ 0 & z\notin I_{ij}.\end{cases}$$

لذا مقادير سمت راست قيود دسته دوم بـراي ايـن گونـه انتخاب توابع براي هر i و j بصورت زير خواهند بود:

$$a_{ij}=a_{f_{ij}}=\int_0^T\int_0^S f_{ij}(z)\,dx\,dt=\int_{\frac{T(i-1)}{m_1}}^{\frac{Ti}{m_1}}\int_{\frac{S(j-1)}{m_2}}^{\frac{Sj}{m_2}}dx\,dt=\frac{TS}{m_1m_2}$$

توجه شود که گرچه توابع f_{ij} پیوسته نیستند ولي موارد زير را مد نظر خواهيم داشت:

۱) هر کدام از توابع f_{ij} ، ($j=1,2,...,m_2$ ، $i=1,2,...,m_1$) حد دنباله‌اي از توابع پيوسته و مثبتي نظير $\{f_{ijk}\}$ مي‌باشد؛ پس اگر μ يك اندازه رادن مثبت در $M^+(\Omega)$ باشد داريم $\mu(f_{ij})=\lim_{k\to\infty}\mu(f_{ijk})$ ([۱۳]).

۲) مجموعه اين توابع را براي تمام اعداد صحيح و مثبت m_1 و m_2 در نظر مي‌گيريم؛ ترکيبات خطي اين توابع قادرند که هر تابع بصورت $G\in C(\Omega)$ را بخوبي تقريب نمايند ([۱۳]).

با انتخاب تعداد $M_2=m_1m_2$ از اين توابع براي دسته دوم قيود، مساله (۱۳) به شکل زير در مي‌آيد:

$$\begin{aligned}
&Minimize: && \textstyle\sum_{l=1}^{N}\alpha_l f_0(z_l) && \\
&Subject\ to: && \textstyle\sum_{l=1}^{N}\alpha_l\psi_n(z_l)=\gamma_n, && n=1,2,...,M_1;\\
& && \textstyle\sum_{l=1}^{N}\alpha_l f_{ij}(z_l)=a_{ij}, && i=1,2,...,m_1,\\
& && && j=1,2,...,m_2;\\
& && \alpha_j\geq 0, && j=1,2,...,N.
\end{aligned}$$

(۱۴)

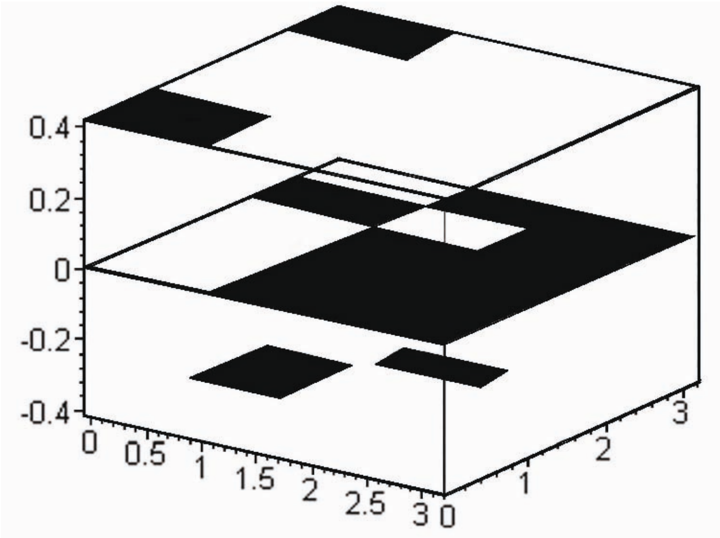
اکنون با استفاده از جوابهاي $\{\alpha_1^*,\alpha_2^*,...,\alpha_N^*\}$ حاصل از حل مساله برنامه‌ريزي خطي متناهي (۱۴) قادر خواهيم بود مانند الگوريتم ارايه شده در [۱۲] کنترل بهينه را با استفاده از اندازه حاصل، بوسيله يك تابع قطعه‌اي ثابت تقريب نماييم.

نتايج عددي

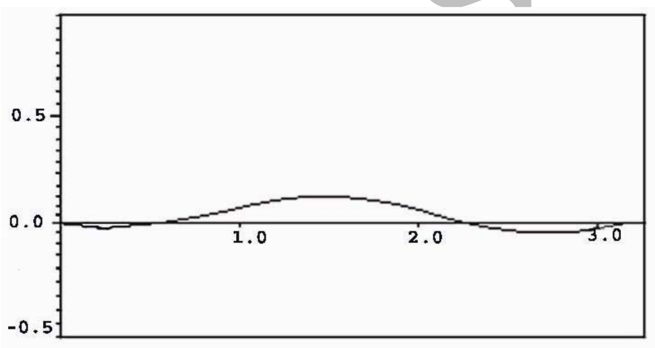
اکنون قادريم تا با ارايه چند مثال عددي کارايي روش بيان شده را بررسي نماييم. در هر يك از مثالها علاوه بر ارايه نتايج حاصله، با مقايسه وضعيت نهايي موجود موج با وضعيت مطلوب نهايي آن نمودي از کارايي روش را نيز مشاهده خواهد شد.

مثال ۱

تار مرتعش از موارد مطرح در بحثهاي موج در اکثر کتابهاي رياضي و مهندسي مي‌باشد. سيم نازکي به طول π را که در نقاط مرزي ثابت نگه داشته شده است،درنظر بگيريد. فرض کنيد در زمان $t=0$ در وضعيت سينوسي و سرعت آن صفر باشد. هدف يافتن نيرويي است که (از خارج) بر سيم وارد شده و در زمان π، وضعيت و سرعت آن را به گونه‌اي صفر کند که کمترين مقدار انرژي نيز مصرف شود. اگر در نقطه x و زمان t نيروي $u(x,t)$ بر سيم وارد شود، مي‌دانيم که ارتعاشات سيم به صورت موجي است که با معادله‌اي نظير (۱) بيان مي‌شود. مساله بالا را مي‌توان بعنوان يك مساله کنترل بهينه در نظر گرفت. با توجه به مفروضات مساله، $f(x)=\sin(x)$، $h(x)=0$، $Y(0,t)=Y(\pi,t)$، $g_1(x)=g_2(x)=0$ و تابع هدف مساله $\int_0^\pi\int_0^\pi u^2(x,t)dxdt$ مي‌باشد (يعني $f_0=u^2$). براي حل ابتدا بازه‌هاي $[0,T]$ ، $[0,S]$، [۱، ۱-] را بترتيب به $m_1=9$، $m_2=9$ و $m_3=11$ قسمت مساوي تقسيم مي‌کنيم؛ سپس از هر زير بازه يك نقطه به طور دلخواه برمي‌گزينيم. با اختيار $M_1=2$ و $M_2=m_1m_2=81$ مساله برنامه ريزي خطي با ۸۳ محدوديت و ۸۹۱ متغير بصورت زير حاصل مي‌شود:



شكل ۱- كنترل بهينه



شكل ۲- وضعيت موج در انتهاي بازة زماني

$$Minimize: \quad \sum_{l=1}^{891} u_l^2 \ \alpha_l$$

$$Subject\ to: \quad \sum_{l=1}^{891} (\tfrac{2}{\pi}) \sin x_l (\sin t_l + \cos t_l) u_l \ \alpha_l = 1;$$

$$\sum_{l=1}^{891} (\tfrac{1}{\pi}) \sin 2x_l (\sin 2t_l + \cos 2t_l) u_l \ \alpha_l = 0;$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{11} = \tfrac{\pi^2}{18};$$

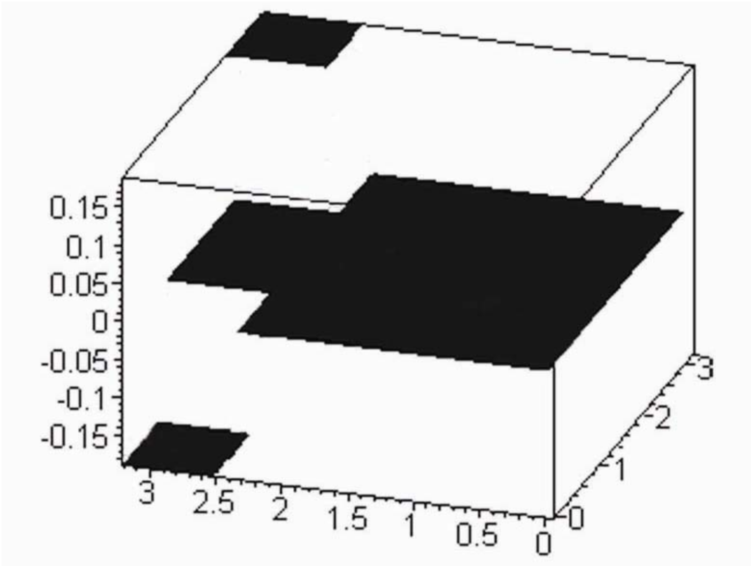
$$\alpha_{12} + \alpha_{13} + \ldots + \alpha_{22} = \tfrac{\pi^2}{18};$$

$$\vdots$$

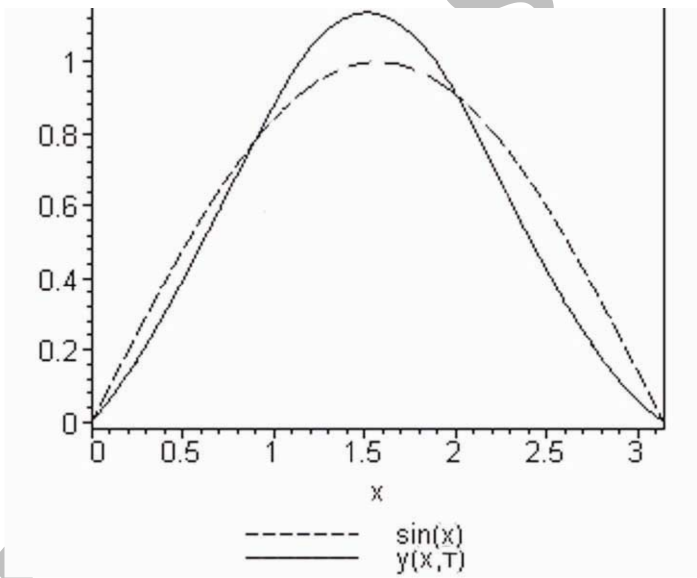
$$\alpha_{881} + \alpha_{882} + \ldots + \alpha_{891} = \tfrac{\pi^2}{18};$$

$$\alpha_l \geq 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, 891.$$

مساله برنامه‌ريزي خطي فوق را با استفاده از روش سيمپلكس اصلاح شده در زير برنامه DLPRS از كتابخانه IMSL نرم افزار Fortran۹۰ حل شده است. مقدار بهينه تابع هدف ۲/۰۹۰۲۴۸۸*$۱۰^{-۱۳}$ بدست مي‌آيد. سپس با استفاده از α_l^*هاي بدست آمده، تابع كنترل تقريباً بهينه محاسبه و رسم گرديده است (شكل۱). همچنين وضعيت موج در زمان انتهايي (يعني $Y(x,\pi)$) را با استفاده از كنترل بهينه حاصل و پانزده جمله اول جواب معادله موج (۵) تقريب شده است؛ تقريب حاصل همراه با وضعيت انتهايي داده شده جهت مقايسه رسم گرديده‌اند (شكل ۲). لازم به يادآوري است كه مثال مشابه براي سيستم موج همگن با كنترل مرزي در ([۵]) حل شده كه مقدار بهينه



شکل ۳- کنترل بهینه

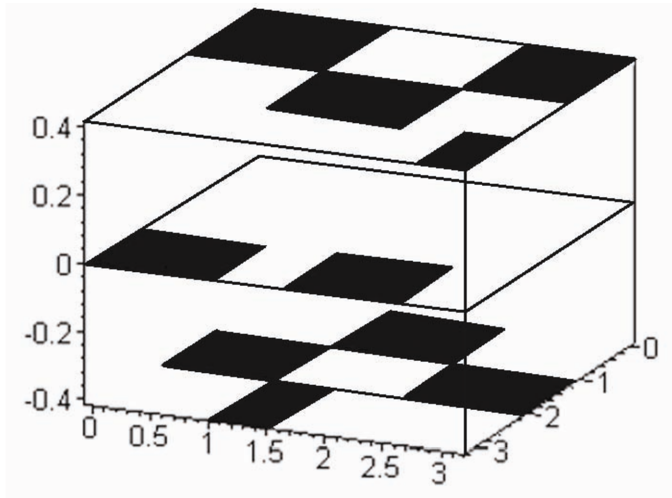


شکل ۴- وضعیت موج در انتهاي بازهٔ زماني

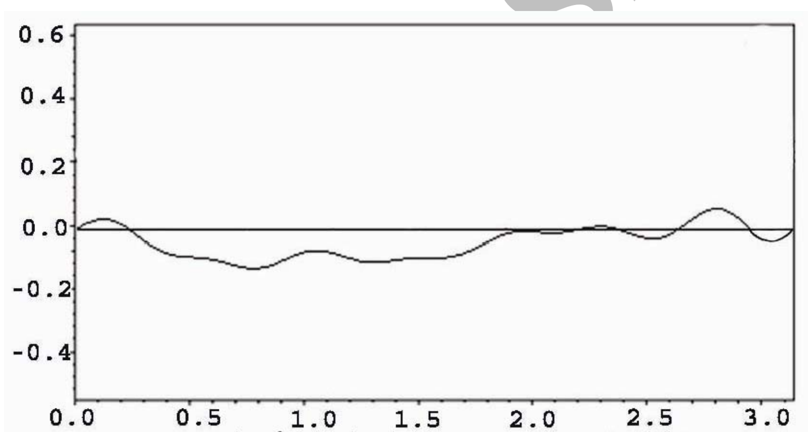
تابع هدف در آنجا ۰/۳۹۵۷۱۴ بوده است.

مثال ۲

این بار معادله موج (۱) با شرایط اولیه بصورت $Y_t(x,0)=h(x)=\sin(x), Y(x,0)=f(x)=0$ و شرایط مرزي $Y(0,t)=Y(\pi,t)=0$ را در نظر مي‌گیریم. دوباره هدف تعیین نیرویي (کنترلي) است که باید بر موج وارد شود تا در زمان π وضعیت موج سینوسي و سرعت آن صفر شده به گونه‌اي که کمترین مقدار انرژي مصرف شود. پس از حل از روش ذکر شده، مقدار تابع هدف مساله ۰/۲۸۵۶۰۰۲۲۶۷۸۲۹۳۲ بدست آمد. کنترل بهینه و وضعیت موج در زمان π (مطلوب و موجود) مطابق شکلهاي (۳) و (۴) مي‌باشند.



شكل ۵- كنترل بهينه



شكل ۶- وضعيت موج در انتهاي بازهٔ زماني

مثال ۳

فرض كنيد $h(x) = \cos(2x), f(x) = 1 - 2\cos(3x)$ و شرايط مرزي براي (۱) بصورت $Y(0,t) = Y(\pi,t) = 0$ باشند. براي تعيين نيروي (كنترل) وارد بر تار كه در زمان π وضعيت و سرعت آن را صفر كرده و سيستم كمترين مقدار انرژي را مصرف كند، مطابق روش ارايه شده به حل مي‌پردازيم. مقدار بهينه نيرو ۱/۲۵۶۶۳۷۵۰۶۱۸۸ و تابع مبين آن در شكل (۵) نمايش داده شده است. همچنين در شكل (۶) وضعيت موجود نهايي موج با وضعيت مطلوب آن مقايسه گرديده است.

نتيجه‌گيري

بدنبال روند موفقيت آميز حل مسايل كنترل بهينه در سيستمهاي مختلف با بكارگيري اندازه‌ها، اين مقاله نيز توانست بر اين مبنا به حل مسايل كنترل بهينه هدايت شده توسط معادله موج خطي غيرهمگن با كنترل دروني وابسته به زمان و مكان بپردازد. در اين راستا از خواص جواب كلاسيك سيستم بهره برده و مي‌توان اذعان داشت كه به نوعي جواب (مسير) و كنترل بهينه همزمان بدست مي‌آيند.

علاوه بر تواناييهاي ذكر شده در ساير منابع كه در اينجا نيز برقرار است،مثالها نيز مويد آن است كه با وجود محدوديتهاي عددي و تقريبهاي اعمال شده، بدون توجه به خطي يا غير خطي بودن تابع هدف، روش در تعيين مقدار بهينه و دستيابي به وضعيت مطلوب از توان بالايي برخوردار است. بدين ترتيب سيستمهاي كلي‌تري نسبت به [۱] از طريقي ساده‌تر به شيوه ذكر شده قابل حل مي‌باشند.

منابع

1. S. A., Alavi, A. V. Kamyad, and M. H., Farahi, The Optimal control for an inhomogeneous wave problem with inernal control and their numerical. Bulletin of the Iranian Math. Soc., vol 23, No 2, (1997).
2. S. A., Alavi, A. V. Kamyad, and M. H., Farahi, Optimal control of an inhomoge- neous heat problem by using measure theory. Iranian J. Science, pp 57-78, (2000).
3. J., A., Fakharzadeh, Finding the optimal domain of a nonlinear wave optimal control system by measure. J. Applied Math. Comput., 13, (2003).
4. M. H., Farahi, The Boundary Control of the Wave Equation. PhD thesis, Dept. of Applied Mathematical Studies, Leeds University, (1996).
5. M. H., Farahi, J. E. Rubio, and D. A., Wilson, The optimal control of the linear wave equation. INT. Journal of Control, vol 63, (1996).
6. R. Heberman, Elementary Applied Partial Differential Equation. Prentice-Hall,Inc, (1983).
7. A. V., Kamyad, J. E. Rubio, and D. A., Wilson, Optimal control of the Multidi- mentional diffusion equation. JOTA , 70, (1991).
8. E. K., Keryszing, Advanced Engineering Mathematics. John Wiley & Sons (4th ed.), (1979).
9. J. E. Lagnese, and G., Leugering, A posterior error estimates in time-domain decomposition of final value optimal control of the acostic wave equation. SIAM Journal, (2002).
10. L., Miller, Escape function conditions for the observation, control and stabilization of the wave equation. SIAM Journal, (2003).
11. M. M., Miranda, M. Z. Gary, and M. A., Rincon, An approximation of exact control for the wave equation. SIAM Journal, (2003).
12. J. E., Rubio, Control and Optimization: the linear treatment of nonlinear problems. Manchester University Press, Manchester, (1986).
13. W., Rudin, Real and Complex Analysis. McGraw-Hill series in higher mathematics (3ed edition), (1987).

۱۴. تهمتني، فرامرز و ارجائي، غلامحسين. ديباچه‌اي بر نظريه معادلات ديفرانسيل. انتشارات دانشگاه شيراز، چاپ اول، ۱۳۷۹.