مجلهٔ پژوهشی دانشگاه اصفهان(علوم پایه)
جلد سی و سوم ـ شماره ٤ ـ سال١٣٨٧
صص٣٦-٢٧

اندازه کارائی مبتنی بر مؤلفه‌های به هم وابسته یک واحد تصمیم گیری در تحلیل پوششی داده‌ها

علیرضا امیر تیموری* و سهراب کرد رستمی**
* **گروه ریاضی کاربردی دانشگاه آزاد اسلامی واحد رشت**
** **گروه ریاضی کاربردی دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان**

چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها روشی برای اندازه‌گیری کارایی نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم گیری متجانس می‌باشد. در بسیاری از کاربردهای این تکنیک واحدهای تحت ارزیابی، خود به مؤلفه‌های کوچکتری تقسیم می‌شوند که هر کدام ورودی‌هائی را جهت تولید خروجی‌هائی مصرف می‌کنند. در این مقاله تحلیل کارایی حالتی را در نظر می‌گیریم که مؤلفه‌ها به هم وابسته‌اند از این جهت که قسمتی از خروجی‌های تولید شده توسط یک مؤلفه به عنوان ورودی برای مؤلفه بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. بنابراین هر مؤلفه دو دسته خروجی تولید می‌کند: دسته اول به طرف بیرون سیستم هدایت می‌شود و بخشی از خروجی‌های دسته دوم به عنوان ورودی برای مولفه بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. فرض کنید خروجی دسته دوم یک بردار k بعدی باشد. می‌خواهیم از بین این بردار k تائی، یک بردار r تائی $1 \leq r < k$ انتخاب و به عنوان ورودی برای مؤلفه بعدی مورد استفاده قرار دهیم. سؤال این است کدام انتخاب کارائی کل واحد تصمیم‌گیری را حداکثر می‌کند. در این مقاله کارائی مؤلفه‌ای واحدهای تصمیم گیری با توجه به وابستگی مذکور ارائه خواهد شد. به کمک یک مساله برنامه‌ریزی خطی مختلط صفر-یک، اندازه کارایی کلی و کارایی مولفه‌های واحد درچنین وضعیتی محاسبه خواهد شد. نشان داده می‌شود اندازه کارایی کلی ترکیب محدبی از کارایی مولفه‌ها است.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی خطی، تحلیل پوششی داده‌ها، کارائی.

Interdependent Component-Based Efficency Measurement in Data Envelopment Analysis

A.R. Teimoori* and S. Kurd Rostami**
* **Mathematics Department , Islamic Azad Unverdity of Rasht**
** **Mathematics Department , Islamic Azad Unverdity of Lahijan**

Abstract

In many real applications of data envelopment analysis(DEA), the decision making units(DMUs) may be separated into different components, in which each component consumes inputs to produce outputs. The idea of measuring efficiency relative to certain components of a DMU is not new. Färe and Grosskopf(1996) proposed the multi-stage production process. Cook et al.(2000) extended the usual DEA structure to one that determines the aggregate efficiency of DMUs accompanying with component measures. In our study, each component produces two types of outputs. The first one go onto the outside of the DMU and the second one can be used as inputs to the later component. The second output is a k-tuple vector and we would like to select an r-tuple sub-vector from this k-tuple vector to use as inputs to the later component to optimize the aggregate efficiency score. It is shown that the aggregate efficiency measure is a convex combination of the component measures.

Keywords: Linear programming, DEA, efficiency.

۱. مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها(DEA)[1] روشی غیر پارامتری برای تحلیل کارائی و کارائی سنجی است که نخستین بار توسط چارنز و همکاران[۴] معرفی شد. وجه تسمیه آن به این دلیل است که در این روش واحدهای تصمیم‌گیری[2] متجانس به کمک یک مرز تولید قطعه قطعه خطی پوشش داده می‌شوند. واحدهای تحت ارزیابی همسان هستند از این حیث که هر کدام ورودیهای یکسانی را جهت تولید خروجی‌های یکسان مصرف می‌کنند. DEA یک شاخص کارایی نابیشتر از یک برای هر واحد تصمیم‌گیری ارایه می‌کند. در بسیاری از کاربرد های واقعی تحلیل پوششی داده‌ها، واحد تحت ارزیابی به مؤلفه‌های کوچکتری تقسیم می‌شود که هر مؤلفه خود به تنهائی ورودی‌های متفاوتی را جهت تولید خروجی‌هائی مصرف می‌کند.

ایده کارائی چند مؤلفه‌ای نخستین بار توسط فار و گروسکوف [7] معرفی شد. آنها حالتی را معرفی کردند که در آن بردار خروجی تولید شده توسط یک مؤلفه به عنوان ورودی برای مؤلفه بعدی مورد استفاده قرار می‌گرفت. پس از آن کوک و همکاران[5,6] کارائی چند مؤلفه‌ای را در حالتی معرفی کردند که در آن هر مؤلفه یک واحد تصمیم‌گیری ورودی‌های متفاوتی را جهت تولید خروجی‌های مختلفی مصرف می‌کرد و یک منبع مشترک نیز وجود داشت که تمام مؤلفه‌ها در مصرف آن سهم داشتند. در روشی که فار و همکاران معرفی کردند تنها کارایی کلی واحدهای تصمیم‌گیری محاسبه می‌شد و توجهی به کارایی مؤلفه‌های سازای واحد تحت ارزیابی نشد. در روش ارائه شده توسط کوک و همکاران مؤلفه‌های هر واحد مستقل از یکدیگر بودند و حالت به هم وابستگی مؤلفه‌ها در نظر گرفته نشد. امیرتیموری و کردرستمی [۱و۲] اندازه کارایی مؤلفه ای با مؤلفه ها به هم وابسته را مورد مطالعه قرار دادند. آنها حالتی را در نظر گرفتند که در آن خروجیهای یک واحد تصمیم گیری به دو دسته تقسیم می شدند: یک دسته به سمت بیرون سیستم هدایت شدند و تمام خروجیهای دسته دوم به عنوان ورودی برای مولفه بعدی مورد استفاده قرارگرفتند. دراین حالت تصمیم گیرنده باید تمام خروجی‌ها رابه عنوان ورودی مولفه بعدی مورد استفاده قرار دهد و اصلاً بحث انتخاب مطرح نیست.

1- Data Envelopment Analysis
2- Decision Making Units

در این مقاله اندازه کارایی مؤلفه‌ای را در حالتی مورد مطالعه قرار می‌دهیم که در آن مؤلفه‌ها به هم وابسته‌اند، به این ترتیب که بخشی از خروجی‌های تولید شده توسط یک مؤلفه به عنوان ورودی برای مؤلفه بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای هر واحد تصمیم‌گیری دو نوع شاخص کارایی ارائه خواهد شد: کارایی کلی و کارایی مؤلفه‌ای. نشان داده می‌شود که کارایی کلی هر واحد تصمیم‌گیری به صورت ترکیبی محدب از کارایی مؤلفه‌های آن است.

یک مثال بسیار ساده از کاربرد چنین وضعیتی را می‌توان در بانک‌ها به عنوان واحدهای تصمیم‌گیری مشاهده کرد. فرض کنید یک شعبه بانکی یک واحد تصمیم‌گیری و مولفه‌های آن دو بخش خدمات و وام‌ها باشند. پرسنل بخش خدمات را می‌توان به عنوان یک ورودی درنظر گرفت. یکی از خروجی‌های این بخش نیز می‌تواند تعداد مشتریان اعم از اعتباری و عادی باشند. تصمیم‌گیرنده می‌خواهد از بین مشتریان اعتباری بعضی از آنها را به عنوان متقاضی استفاده از تسهیلات به بخش وامها اعزام کند. به طور طبیعی باید مشتریانی انتخاب شوند که پرداخت وام به آنها منجربه ایجاد مطالبات معوق نشود. این انتخاب به چه صورت انجام شود تا کارایی کلی شعبه بیشینه شود؟

سازماندهی بخش‌های بعدی مقاله به صورت زیر است:

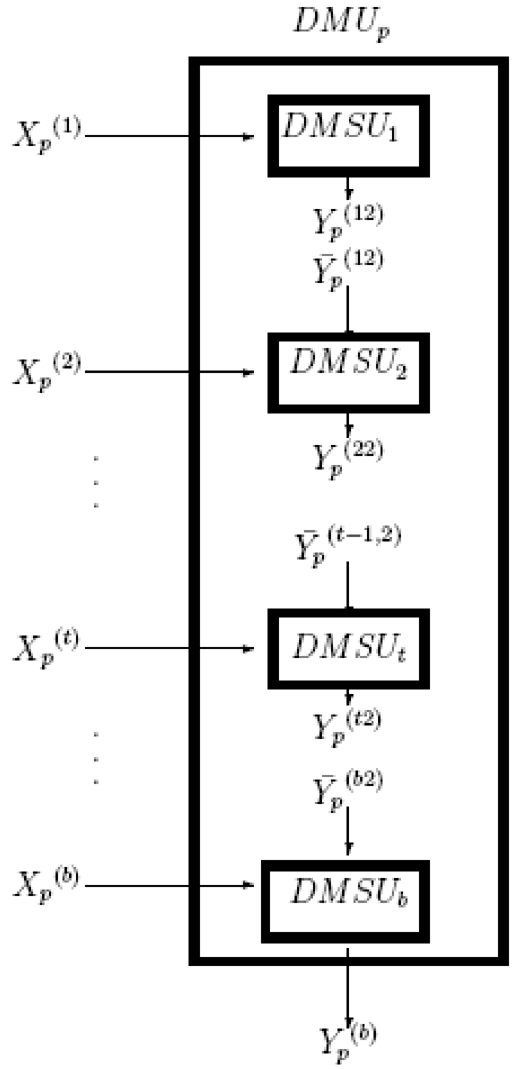
در بخش بعدی یک تعریف کلی از مساله ارائه خواهد شد. مدل اندازه‌گیری کارایی و شیوه به دست آوردن آنها در بخش سوم و چهارم معرفی می‌شوند. روش ارائه شده روی یک مجموعه از داده‌های تصنعی شامل ۲۰ واحد تصمیم گیری هر کدام با دو مؤلفه اجرا خواهد شد. نتیجه گیری در بخش ششم آمده است.

۲. تعریف ها و تشریح ابعاد مساله

فرض کنید n واحد تصمیم‌گیری برای ارزیابی موجود است که هر کدام به b مؤلفه تقسیم می شوند. در حالت خاص DMU_o، $1 \le o \le n$ دارای مؤلفه‌های $DMSU_t$ [۱]، $1 \le t \le b$ می‌باشد. $DMSU_t$، $1 \le t \le b-1$ دو نوع خروجی $Y_o^{(t,1)}$ و $Y_o^{(t,2)}$ تولید می کند. بردار خروجی $Y_o^{(t,1)}$ به طرف بیرون سیستم می‌رود ولی خروجی $Y_o^{(t,2)}$ بخشی از ورودی‌های مولفه بعدی را فراهم می‌کند. می‌خواهیم از بردار k بعدی $Y_o^{(t,2)}$، یک بردار r تائی، $1 \le r < k$ انتخاب کرده و به عنوان ورودی به مؤلفه $DMSU_{t+1}$ ارسال کنیم.

این زیر بردار انتخاب شده از $Y_o^{(t,2)}$ را $\overline{Y}_o^{(t,2)}$ می‌نامیم. خروجی تولید شده توسط $DMSU_b$ را $Y_o^{(b)}$ می‌نامیم. $DMSU_t$ ، $2 \le t \le b$ دو نوع ورودی $X_o^{(t)}$ و $\overline{Y}_o^{(t-1,2)}$ را مصرف می‌کند. ورودی مصرف‌شده توسط $DMSU_1$ را $X_o^{(1)}$ می‌نامیم. ورودی های $X_o^{(t)}$ ، $1 \le t \le b$ از بیرون سیستم وارد مؤلفه‌ها می‌شوند. شکل(۱) فرآیند فوق را تشریح می‌کند. نکته حائز اهمیت این است که برای بردار $\overline{Y}_o^{(t-1,2)}$ انتخاب‌های مختلفی وجود دارد و تعداد این انتخاب‌ها نیز $\binom{k}{r}$ است. در مدلی که ارائه خواهد شد، $\overline{Y}_o^{(t-1,2)}$ به گونه‌ای انتخاب می‌شود که اندازه کارایی کلی واحد تحت ارزیابی بیشینه شود.

1- Decision Making Sub-unit



شکل(۱): فرایند مصرف وتولید یک واحد تصمیم‌گیری ومولفه‌های سازای آن

با توجه به شکل(۱) بردارهای وزنی برای ورودیها و خروجی‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$m^{(t,1)}$: بردار وزن خروجی‌های $Y_o^{(t,1)}$، $(1 \le t \le b-1)$،

$m^{(t,2)}$: بردار وزن خروجی‌های $Y_o^{(t,2)}$، $(1 \le t \le b-1)$،

$m^{(b)}$: بردار وزن خروجی‌های $Y_o^{(b)}$،

$V^{(t)}$: بردار وزن ورودی‌های $X_o^{(t)}$ ، $(1 \le t \le b)$،

$W^{(t-1)}$: بردار وزن ورودی‌های $\bar{Y}_o^{(t-1,2)}$، $(2 \le t \le b)$،

$D^{(t-1)} = diag(d_{11}^{(t-1)}, d_{22}^{(t-1)}, \ldots, d_{kk}^{(t-1)})$: ماتریس قطری که درایه‌های قطر آن صفر یا یک هستند.

۳. اندازه کارائی مؤلفه‌ای و کلی

هماهنگ با ادبیات تحلیل پوششی داده‌ها وتئوری کارایی‌سنجی که کارائی را به صورت نسبت مجموع توزین شده خروجی‌ها به مجموع توزین شده ورودی‌ها در نظر می‌گیرد، با در نظر گرفتن شکل(۱)، اندازه

کارائی مؤلفه‌های واحد تحت ارزیابی o را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e_o^{(1)} = \frac{m^{(1,1)}Y_o^{(1,1)} + m^{(1,2)}Y_o^{(1,2)}}{V^{(1)}X_o^{(1,1)}}$$

$$e_o^{(t)} = \frac{m^{(t,1)}Y_o^{(t,1)} + m^{(t,2)}Y_o^{(t,2)}}{V^{(t)}X_o^{(t)} + D^{(t-1)}W^{(t-1)}Y_o^{(t-1,2)}} \ ,$$
$$d_{11}^{(t-1)} + \mathbf{K} + d_{kk}^{(t-1)} = r \ , \quad 2 \le t \le b-1$$

$$e_o^{(b)} = \frac{m^{(b)}Y_o^{(b)}}{V^{(b)}X_o^{(b)} + D^{(b-1)}W^{(b-1)}Y_o^{(b-1,2)}} \ ,$$
$$d_{11}^{(b-1)} + \mathbf{K} + d_{kk}^{(b-1)} = r,$$

برای این نمایش‌های کارائی‌های مؤلفه‌ای، بردارهای وزنی m ، V و W و نیز متغیرهای دودوئی $d_{ii}^{(t)}$ به گونه‌ای تعین خواهند شد که این اندازه‌های کارائی در بهترین وضعیت محاسبه شوند. $d_{ii}^{(t)} = 1$ به این معنی است که i امین مؤلفه بردار خروجی $Y_o^{(t,2)}$ به عنوان ورودی برای مؤلفه $t+1$-ام مورد استفاده قرار گیرد. با توجه به شکل(۱) و با در نظر گرفتن کارائی‌های مؤلفه‌ای، اندازه کارائی کلی DMU_o را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e_o^{(a)} = \frac{\sum_{t=1}^{b-1} m^{(t,1)}Y_o^{(t,1)} + \sum_{t=1}^{b-1} m^{(t,2)}Y_o^{(t,2)} + m^{(b)}Y_o^{(b)}}{\sum_{t=1}^{b} V^{(t)}X_o^{(t)} + \sum_{t=2}^{b} D^{(t-1)}W^{(t-1)}Y_o^{(t-1,2)}} \ ,$$
$$d_{11}^{(t-1)} + \mathbf{K} + d_{kk}^{(t-1)} = r \ , \quad 2 \le t \le b$$

وجود محدودیت $\sum_{i=1}^{k} d_{ii}^{(t-1)} = r \ , \quad d_{ii}^{(t-1)} \in \{0,1\}$ موجب می‌شود تنها r خروجی از k خروجی $Y_o^{(t-1,2)}$ به عنوان ورودی برای مؤلفه tام مورد استفاده قرار گیرد.

۴. محاسبه $e_o^{(a)}$ و $e_o^{(t)}$

شاخص‌های کارائی تعریف شده در بالا مبتنی بر متغیرهای دودوئی $d_{ii}^{(t-1)}$ هستند که نقش تعین کننده‌ای در انتخاب بخشی از خروجی‌های یک مؤلفه به عنوان ورودی برای مؤلفه بعدی دارند . در مدلی که ارائه خواهد شد این متغیرهای دودوئی و بردارهای وزنی به گونه ای انتخاب می‌شوند که اندازه کارائی کلی واحد تحت ارزیابی بیشینه شود به شرطی که این شاخص برای تمام واحدها و تمام مؤلفه‌ها نابیشتر از یک باشد. برای این منظور مساله برنامه‌ریزی ریاضی زیر را حل می‌کنیم:

$$Max \quad e_o^{(a)}$$
$$s.t. \quad e_j^{(a)} \le 1 \ , \quad j = 1, \mathbf{K}, n \ ,$$

$$e_j^{(t)} \le 1 \ , \quad t = 1, \mathbf{K}, b \ , \quad j = 1, \mathbf{K}, n \ , \qquad (۱)$$

$$d_{11}^{(t-1)} + \mathbf{K} + d_{kk}^{(t-1)} = r \ , \quad t = 2, \mathbf{K}, b \ ,$$

$$d_{ii}^{(t-1)} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \mathbf{K}, k \ , \quad t = 2, \mathbf{K}, b \ ,$$

$$\left(m^{(t1)}, m^{(t2)}, m^{(b)}\right) \in \Omega_1 \ ,$$

$$\left(V^{(t)}, W^{(t-1)}\right) \in \Omega_2 .$$

مجموعه‌های Ω_1 و Ω_2 نواحی اطمینان را نشان می‌دهند که به نوعی محدودیت‌های اعمال شده بر وزنها را نشان می‌دهند [۸] (به عنوان مثال

$$\Omega_1=\left\{\left(m^{(t,1)},m^{(t,2)},m^{(b)}\right):\quad \left(m^{(t,1)},m^{(t,2)},m^{(b)}\right)\geq 0\right\}$$

و $\Omega_2=\left\{\left(V^{(t)},W^{(t-1)}\right):\quad \left(V^{(t)},W^{(t-1)}\right)\geq 0\right\}$).

تعریف(۱) : DMU_o کارای کلی است اگر و تنها اگر $e_o^{(a)}=1$ باشد.

تعریف(۲) : DMU_o در tامین مؤلفه کاراست اگر و تنها اگر $e_o^{(t)}=1$ باشد.

قضیه : اندازه کارائی کلی $e_o^{(a)}$ ترکیب محدبی از اندازه کارائی مؤلفه ای $e_o^{(t)}$ هاست .

اثبات : l_t ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$l_1=\frac{V^{(1)}X_o^{(1)}}{\sum_{t=1}^{b}V^{(t)}X_o^{(t)}+\sum_{t=2}^{b}D^{(t-1)}W^{(t-1)}Y_o^{(t-1,2)}},$$

$$l_t=\frac{V^{(t)}X_o^{(t)}+D^{(t-1)}W^{(t-1)}Y_o^{(t-1,2)}}{\sum_{t=1}^{b}V^{(t)}X_o^{(t)}+\sum_{t=2}^{b}D^{(t-1)}W^{(t-1)}Y_o^{(t-1,2)}},$$
$$2\leq t\leq b-1$$

$$l_b=\frac{V^{(b)}X_o^{(b)}+D^{(b-1)}W^{(b-1)}Y_o^{(b-1,2)}}{\sum_{t=1}^{b}V^{(t)}X_o^{(t)}+\sum_{t=2}^{b}D^{(t-1)}W^{(t-1)}Y_o^{(t-1,2)}}.$$

با توجه به تعریف فوق ، به آسانی می‌توان دید

$$\sum_{t=1}^{b}l_t=1,\quad l_t\geq 0,\ e_o^{(a)}=\sum_{t=1}^{b}l_t e_o^{(t)},$$

بنابراین اندازه کارائی کلی $e_o^{(a)}$ ترکیب محدبی از اندازه کارائی مؤلفه‌ای $e_o^{(t)}$ ها است. [برای جزییات بیشتر[۲] را ببینید.]

به عنوان نتیجه قضیه فوق، DMU_o کاراست اگر و تنها اگر در تک تک مؤلفه‌ها کارا باشد. همچنین با توجه به این که $e_o^{(a)}$ ترکیب محدبی از $e_o^{(t)}$ ها است، محدودیت‌های $e_j^{(t)}\leq 1,\ t=1,\ldots,b$، محدودیت $e_j^{(a)}\leq 1$ را ایجاب می‌کنند. لذا می‌توان اولین دسته از محدودیت‌های مساله(۱) را حذف کرد. بنابراین مدل(۱) به صورت زیر باز نویسی می‌شود:(توجه کنید تنها محدودیت‌های نا منفی بر وزن‌ها در نظر گرفته شده اند)

$$\begin{aligned}
&Max\quad e_o^{(a)}\\
&\quad s.t.\quad e_j^{(t)}\leq 1,\quad t=1,\ldots,b,\quad j=1,\ldots,n,\\
&d_{11}^{(t-1)}+\ldots+d_{kk}^{(t-1)}=r,\quad t=2,\ldots,b,\quad (۲)\\
&d_{ii}^{(t-1)}\in\{0,1\},\quad i=1,\ldots,k,\quad t=2,\ldots,b,\\
&\left(m^{(t1)},m^{(t2)},m^{(b)}\right)\geq 0,\ \left(V^{(t)},W^{(t-1)}\right)\geq 0.
\end{aligned}$$

مدل(۲) یک مساله برنامه‌ریزی خطی کسری است. با استفاده از تبدیل چارنز و کوپر [۳] مدل(۲) را می توان از حالت کسری خارج کرد. برای این منظور قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{\sum_{t=1}^{b}V^{(t)}X_o^{(t)}+\sum_{t=2}^{b}D^{(t-1)}W^{(t-1)}Y_o^{(t-1,2)}}=r$$ ،

$rV=\overline{V}$ ، $rm=\overline{m}$ و $rW=\overline{W}$.

بنابراین مدل(۲) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$Max \quad \sum_{t=1}^{b-1} \overline{m}^{(t1)} Y_o^{(t1)} + \sum_{t=1}^{b-1} \overline{m}^{(t2)} Y_o^{(t2)} + \overline{m}^{(b)} Y_o^{(b)}$$

$$s.t. \quad \sum_{t=1}^{b} \overline{V}^{(t)} X_o^{(t)} + \sum_{t=2}^{b} D^{(t-1)} \overline{W}^{(t-1)} Y_o^{(t-1,2)} = 1,$$

(۳)

$$\overline{m}^{(1,1)} Y_j^{(1,1)} + \overline{m}^{(1,2)} Y_j^{(1,2)} \le (\overline{V}^{(1)} X_j^{(1)},$$

$$\overline{m}^{(t,1)} Y_j^{(t,1)} + \overline{m}^{(t,2)} Y_j^{(t,2)} \le (\overline{V}^{(t)} X_j^{(t)} + D^{(t-1)} \overline{W}^{(t-1)} Y_j^{(t-1,2)}),$$

$$for \ , t = 2, \ldots, b-1 \ and \ j,$$

$$\overline{m}^{(b)} Y_j^{(b)} \le (\overline{V}^{(b)} X_j^{(b)} + D^{(b-1)} \overline{W}^{(b-1)} Y_j^{(b-1,2)}),$$

$$d_{11}^{(t-1)} + \ldots + d_{kk}^{(t-1)} = r, \quad t = 2, \ldots, b,$$

$$d_{ii}^{(t-1)} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \ldots, k, \quad t = 2, \ldots, b,$$

$$\overline{m}^{(t1)}, \overline{m}^{(t2)}, \overline{V}^{(t)}, \overline{W}^{(t)} \ge 0, \quad for \ all \ t.$$

نظر به اینکه $d_{ii}^{(t)}$ و $\overline{W}^{(t)}$ متغیر هستند، مدل(۳) به خاطر وجود عبارت $D^{(t-1)}\overline{W}^{(t-1)}$ به وضوح غیر خطی است، همچنین متغیرهای دودوئی $d_{ii}^{(t-1)}$ به این دلیل ظاهر شدند که از بردار k- بعدی $Y_o^{(t-1,2)}$، r مؤلفه به عنوان ورودی برای مولفه بعدی انتخاب شوند. به روشی دیگر این هدف را می‌توان به صورت زیر برآورده کرد:

مجموعه محدودیت‌های زیر را در نظر بگیرید :

$$0 \le w_i^{(t-1)} \le M d_{ii}^{(t-1)}, \quad \sum_{i=1}^{k} d_{ii}^{(t-1)} = r,$$

$$d_{ii}^{(t-1)} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

که در آن M یک عدد مثبت به قدرکافی بزرگ است و $W^{(t-1)} = \left(w_1^{(t-1)}, \ldots, w_k^{(t-1)}\right)$. اگر $d_{ii}^{(t-1)} = 0$ پس $w_i^{(t-1)} = 0$ و لذا i-امین مؤلفه بردار $Y_o^{(t-1,2)}$ به عنوان ورودی برای مؤلفه بعدی در نظر گرفته نمی‌شود. اما اگر $d_{ii}^{(t-1)} = 1$، با توجه به ماهیت بیشینه‌سازی تابع هدف، i-امین مؤلفه بردار $Y_o^{(t-1,2)}$ به عنوان ورودی برای مولفه بعدی ارسال خواهد شد. وجود محدودیت $\sum_{i=1}^{k} d_{ii}^{(t-1)} = r$ نیز موجب می‌شود همواره $k-r$ مؤلفه از بردار وزن $W^{(t-1)}$ برابر صفر باشد و این مطلوب ماست. بنابراین می‌توان مساله(۳) را با یک مساله برنامه‌ریزی خطی صحیح مختلط به صورت زیر جایگزین نمود:

$$e_o^{(a)} = Max \quad \sum_{t=1}^{b-1} \overline{m}^{(t1)} Y_o^{(t1)} + \sum_{t=1}^{b-1} \overline{m}^{(t2)} Y_o^{(t2)} + \overline{m}^{(b)} Y_o^{(b)}$$

$$s.t. \quad \sum_{t=1}^{b} \overline{V}^{(t)} X_o^{(t)} + \sum_{t=2}^{b} \overline{W}^{(t-1)} Y_o^{(t-1,2)} = 1,$$

(۴)

$$\overline{m}^{(1,1)} Y_j^{(1,1)} + \overline{m}^{(1,2)} Y_j^{(1,2)} \le (\overline{V}^{(1)} X_j^{(1)},$$

$$\overline{m}^{(t,1)} Y_j^{(t,1)} + \overline{m}^{(t,2)} Y_j^{(t,2)} \le (\overline{V}^{(t)} X_j^{(t)} + \overline{W}^{(t-1)} Y_j^{(t-1,2)}),$$

$$for \ j, t = 2, \ldots, b-1,$$

$$\overline{m}^{(b)} Y_j^{(b)} \le (\overline{V}^{(b)} X_j^{(b)} + \overline{W}^{(b-1)} Y_j^{(b-1,2)}),$$

$$d_{11}^{(t-1)} + \ldots + d_{kk}^{(t-1)} = r, \qquad t = 2, \ldots, b,$$

$$0 \le w_i^{(t-1)} \le M d_{ii}^{(t-1)},$$

$$d_{ii}^{(t-1)} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \ldots, k, \quad t = 2, \ldots, b,$$

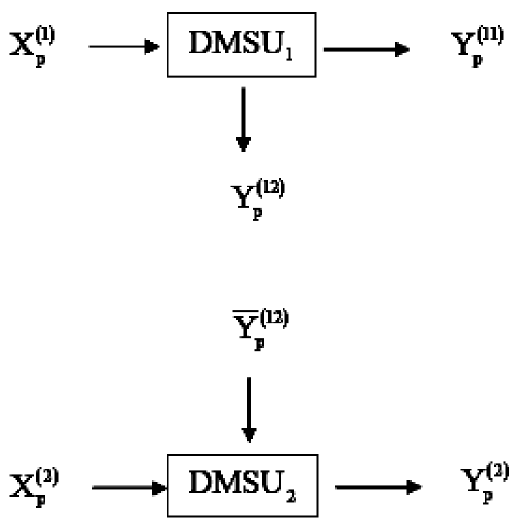
$$\overline{m}^{(t1)}, \ \overline{m}^{(t2)}, \ \overline{V}^{(t)}, \ \overline{W}^{(t-1)} \ge 0, \quad for \ all \ t.$$

مجدداً در مساله(۴)، DMU_o کارای کلی است اگر و تنها اگر $e_o^{(a)} = 1$. در غیر اینصورت DMU_o ناکارای کلی است. به وضوح اگر DMU_o کارای کلی باشد در تمام مولفه‌ها کارا است و در صورت ناکارایی

حداقل در یک مولفه ناکارا است. در چنین وضعیتی می‌توان با کاهش ورودی‌ها و افزایش خروجی‌ها به مقدار مشخص، آن را کارا نمود. برای تعیین میزان تعدیل ورودی‌ها و خروجی‌ها می‌توان ازشکل دوآل پیوسته مساله(۴) و قیمت‌های سایه استفاده نمود.

۵. یک مثال

فرض کنید ۲۰ واحد تصمیم‌گیری مورد نظر هستند و هر واحد دارای ۲ مؤلفه می‌باشد. ورودی‌ها و خروجی‌های هر مؤلفه DMU_p در شکل(۲) آمده است.



شکل(۲): فرایند مصرف و تولید یک واحد با دو مولفه

$Y_p^{(1,2)}$ برداری دو بعدی است. می‌خواهیم از بین دو خروجی بردار $Y_p^{(1,2)}$ از مؤلفه اول، یک خروجی را انتخاب و به عنوان ورودی برای مؤلفه دوم مصرف کنیم به طوری که با این انتخاب، کارائی مؤلفه‌ها و کارائی کل واحد تصمیم‌گیری بیشینه شود. شاخص‌های ورودی و خروجی برای این ۲۰ واحد تصمیم‌گیری در جدول ۱ آمده است.

ستون دوم و سوم جدول(۲) شیوه انتخاب یکی از دو مؤلفه بردار $Y_p^{(1,2)}$ را نمایش می‌دهد که باید به عنوان ورودی برای مؤلفه بعدی مورد استفاده قرار گیرند. ستون چهارم جدول نتایج کارائی کل واحدهای تصمیم‌گیری را با توجه به انتخاب مذکور نشان می دهد. اندازه کارایی مولفه‌ها در ستون‌های پنجم و ششم آمده است. در واحد تصمیم‌گیری اول، اولین مؤلفه از بردار $Y_p^{(1,2)}$ به عنوان ورودی انتخاب می‌شود و با این انتخاب کارائی کل واحد تصمیم‌گیری اول 0/8120 و کارایی مولفه‌های آن به ترتیب 0/7600 و 0/8500 محاسبه می‌گردد.

در واحد تصمیم‌گیری سوم، دومین مؤلفه از بردار مذکور انتخاب می‌شود و با این انتخاب کارائی کل واحد تصمیم‌گیری سوم ۱ محاسبه می‌گردد. در این ارزیابی یازده واحد تصمیم‌گیری کارای کلی ظاهر شدند. برای اجرای مدل‌ها و تحلیل نتایج از نرم افزار GAMS(Professional version) استفاده شده است. با توجه به تعداد شاخص‌ها و تعداد واحدهای تصمیم‌گیری، کل زمان اجرای برنامه کمتر از پنج ثانیه بوده است که این نشان از پایین بودن بارمحاسباتی مدل پیشنهاد شده دارد.

جدول ۱ : مقادیر کمی ورودی‌ها و خروجی‌ها

	$DMSU_1$			$DMSU_2$	
DMU_j	$X_j^{(1)}$	$Y_j^{(1,1)}$	$Y_j^{(1,2)}$	$X_j^{(2)}$	$Y_j^{(2)}$
1	12 8	26	2 17	50	5 2 4
2	15 9	45	4 18	62	6 1 8
3	17 1	31	8 20	58	8 5 9
4	10 7	44	7 30	59	1 8 6
5	18 5	47	2 18	60	4 7 3
6	11 9	29	3 28	63	7 9 5
7	12 7	36	6 12	64	8 6 7
8	19 3	40	1 11	58	6 5 1
9	20 9	37	1 14	69	3 4 5
10	17 4	29	4 25	63	2 2 2
11	13 7	30	7 30	64	7 3 8
12	17 2	41	2 29	67	8 6 7
13	19 1	50	5 21	58	4 9 9
14	12 9	38	3 24	50	3 8 6
15	13 3	40	6 18	61	9 7 3
16	19 7	27	9 27	62	8 4 6
17	20 9	26	8 21	53	2 5 5
18	20 6	43	7 23	69	1 3 4
19	17 1	35	2 20	57	4 8 7
20	20 3	44	5 18	68	1 7 6

اجرای مدل(۴) منجر به نتایجی می‌شود که در جدول ۲ خلاصه شده‌اند.

جدول ۲ : نتایج کارائی

واحد	$d_1^{(1)}$	$d_2^{(1)}$	کارایی کلی	کارایی مولفه اول	کارایی مولفه دوم
۱	۱	۰	.۸۱۲۰	.۷۶۰۰	.۸۵۰۰
۲	۱	۰	.۹۸۱۱	۱	.۹۵۰۱
۳	۰	۱	۱	۱	۱
٤	۱	۰	۱	۱	۱
٥	۰	۱	.۸۷٥۰	.۸۹٥۰	.۸٦۰۰
٦	۱	۰	۱	۱	۱
۷	۰	۱	۱	۱	۱
۸	۱	۰	۱	۱	۱
۹	۱	۰	۱	۱	۱
۱۰	۱	۰	.۷۷۳۷	.٥٤۰۰	.۹۳۷٥
۱۱	۱	۰	.۸۹٤٦	.٦۸۷٥	.۹۳۸۰
۱۲	۱	۰	۱	۱	۱
۱۳	۱	۰	۱	۱	۱
۱٤	۱	۰	۱	۱	۱
۱٥	۰	۱	۱	۱	۱
۱٦	۱	۰	.۹۰٦٦	.۹۱۰۰	.۸۱٥۰
۱۷	۱	۰	.٦٥٥۱	.۷۸٥۰	.٥۷٥۲
۱۸	۱	۰	.٦۸۳۱	.٤٤٤۳	.٦۹۳٥
۱۹	۱	۰	۱	۱	۱
۲۰	۰	۱	.۸٥۱٤	.۷۸۸٥	.۹٥٥٤

۶ . نتیجه

در این مقاله کارائی واحدهای تصمیم‌گیری در حالتی مورد مطالعه قرار گرفت که در آن واحدهای تصمیم‌گیری در درون خود به واحدهای کوچکتری (مؤلفه‌ها) تقسیم می‌شوند. مؤلفه‌های هر واحد تصمیم‌گیری دارای یک وابستگی خاص نسبت به یکدیگر می‌باشند به این ترتیب که از دو دسته خروجی تولید شده توسط مؤلفه‌ها ، دسته اول به سمت بیرون سیستم هدایت می‌شود، و بخشی از خروجی‌های دسته دوم می‌توانند به عنوان ورودی برای مؤلفه بعدی مورد استفاده قرار گیرند. به کمک یک مساله برنامه‌ریزی صفر و یک مختلط، اندازه کارائی کلی و کارائی مؤلفه‌های واحدهای تصمیم‌گیری در چنین وضعیتی محاسبه شدند. ثابت شد که اندازه کارائی کلی ترکیب محدبی از کارائی مؤلفه‌ها است.

منابع

1. A. R., S., Amirteimoori Kordrostami, DEA-like models for multi-component performance measurement. Applied Mathematics and Computation 163:735-743; (2005).

2. A. R., S., Amirteimoori Kordrostami, Measuring the efficiency of interdependent decision making sub-units in DEA. Applied Mathematics and Computation 173:847-855; (2006).

3. A., Charnes, and W. W. CooperProgramming with Linear Fractional functions. Naval Research Logistics Quarterly 9:181-186; (1992).

4. A., Charnes, W. W. Cooper, and E. RhodesMeasuring the Efficiency of Decision Making Units. European Journal of Operational Research, 2:429-444; (1978).

5. W. D., Cook, M., Hababou and H. J. H., TuenterMulti-component Efficiency Measurement and Shared Inputs in DEA: An Application to Sales and Service Performance in Bank Branches. Journal of Productivity Analysis, 4:209-224; (2000).

6. W. D., Cook, and R. H. GreenMulti-component efficiency measurement and core business identification in multiplant firms: A DEA model. European Journal of Operational Research, 157:540-551; (2004).

7. R., Färe, and S., GrosskopfProductivity and Intermediate Products: a Frontier Approach. Economic Letters, 50:65-70; (1996).

8. R. G., Thompson, L. N. Langemeier, C. T. Lee, E. Lee and R. M. ThrallThe Role of Multiplier Bounds in Efficiency Analysis with Application to Kansas Framing. Journal of Econometrics, 46:91-108; (1990).