مدل‌سازی برنامه‌ریزی تولید برای کمینه‌سازی ضایعات کابل

سهراب عفتی و محمد فکری

گروه ریاضی- دانشگاه تربیت معلم سبزوار

پست الکترونیکی: effati@sttu.ac.ir

چکیده

در این مقاله فرم کلی مسأله کارخانه کابل خودرو را بیان می‌کنیم. ابتدا مسأله را در فرم مسأله برنامه‌ریزی خطی از نوع متغیرهای آمیخته مدل‌سازی می‌کنیم. بعد آن را در فرم مسأله برنامه ریزی غیر خطی از نوع متغیرهای آمیخته مدل‌سازی کرده که مسأله مطرح در کارخانه کابل خودرو سبزوار حالت خاصی از مدل ذکر شده است. در نهایت جواب بهینه مسأله کابل خودرو سبزوار را در حالت‌های زیر: چهار نوع سیم با دو طول بهینه، سه نوع سیم با سه طول بهینه، چهار نوع سیم با سه طول بهینه و پنج نوع سیم با دو طول بهینه، به دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: *برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌ریزی غیرخطی، برنامه‌ریزی چندهدفی*

مقدمه

الگوریتم‌های جستجو برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیر خطی با متغیرهای آمیخته در [۱ و۲] پیشنهاد شده است. الگوریتم‌های پیشنهاد شده در [۳و۴] شامل یک جستجوی نسبی در رابطه با متغیرهای پیوسته و یک جستجوی نسبی در رابطه با متغیرهای گسسته می‌باشد. همچنین روش گرادیان مزدوج برای حل مسائل بهینه‌سازی در [۵] بیان شده است. در این مقاله مسأله کمینه‌سازی ضایعات در یک کارخانه کابل خودرو را تشریح می‌کنیم. چنین کارخانه‌ای، اقدام به تولید سالیانه انواع کابل‌های کنترل اتومبیل می‌نماید. در برنامه‌ریزی تولید، معمولاً کابل‌هایی که دارای تیراژ سالیانه بالاتری هستند، از اهمیت بیشتری برخوردارند. بنا به ضرورت، ابتدا در مورد چگونگی تولید این کابل‌ها و هدف مورد نظر این مسأله نکاتی ذکر می‌گردد. برای سهولت مجموعه‌های $I=\{1,...,n\}$ و $J=\{1,...,m\}$ را در نظر می‌گیریم، همچنین یادآور می‌شویم در این مقاله، منظور از طول نامتناهی، طول به قدر کافی بزرگ (به عنوان مثال ۱۰۰۰ متر) می‌باشد.

در ابتدای شروع به کار برای تولید کابل، مفتول‌ها وارد خط تولید می‌شوند و به وسیلهٔ دستگاه نورد ساز به شکل نورد در می آیند و نورد حاصله به دور قرقره‌هایی پیچیده می‌شوند. قطر نورد تولیدی با توجه به سیم نوع iام برای $i \in I$ متفاوت است.

در مرحلهٔ بعد، این قرقره‌ها که سیم‌های نورد شده به دور آن پیچیده شده‌اند، به محل دستگاه‌های کیسینگ[1] ساز برده می‌شوند. سپس سیم نورد شده وارد دستگاه کیسینگ ساز شده و کیسنیگ مورد نظر با توجه به نیاز موجود ساخته می‌شود.

1- Casing

Archive of SID

www.SID.ir

دستگاه کیسینگ ساز که کیسینگ‌های کابل کنترل اتومبیل را تولید می‌کند، به گونه‌ای طراحی شده است که طول کیسینگ تولیدی این دستگاه به متر بایستی در بازه معین $[l,u]$ باشد. در واقع طول کیسینگ تولیدی می‌تواند خارج از بازه $[l,u]$ نیز قرار بگیرد، اما در عمل برای تولید طول‌های کمتر از l متر به دلیل زمان‌بر بودن راه‌اندازی، تنظیمات دستگاه و استهلاک ناشی از روشن و خاموش شدن دستگاه این کار انجام نمی‌شود. همچنین برای تولید طول‌های بیشتر از u متر به دلیل پایین بودن کیفیت کیسینگ تولیدی و مشکلات ناشی از بزرگ کردن مسیر بافت کیسینگ، در عمل نیز از این کار خودداری می‌شود.

حال فرض کنید A طول کیسینگ تولیدی توسط این دستگاه کیسینگ ساز باشد؛ این کیسینگ‌ها برای کت شدن به دستگاه کت ساز برده می‌شوند. دستگاه‌های کت ساز فقط قادر به کت کردن کیسینگ‌هایی به طول نامتناهی می‌باشد، به این دلیل قبل از این که کیسینگ‌های به طول A وارد دستگاه کت ساز شوند، ابتدا به یکدیگر متصل شده تا یک طول نامتناهی به دست آید، به عبارت دیگر در این مرحله ما روکش‌هایی به طول نامتناهی داریم که در هر طول A یک سربند وجود دارد.

در مرحلهٔ بعد این روکش‌های نامتناهی را در دستگاه برش اتومات به طول‌های b_{S_i} $i \in I$، برش می‌زنیم. عمل برش به این صورت انجام می‌شود که ابتدا یک طول معلوم b_{S_i} $i \in I$، برای برش در دستگاه تثبیت می‌گردد و سپس سر روکش‌ها وارد دستگاه می‌شود. این دستگاه دارای مکنده‌هایی است که روکش را به داخل دستگاه می‌کشد و به اندازهٔ طول تثبیت شده برش می‌زند. ضخامت تیغهٔ برش تقریباً برابر c میلی‌متر می‌باشد، به عبارت دیگر در هر عمل برش c میلی‌متر از طول روکش کاسته می‌شود.

اما از معایب دستگاه برش این است که قادر به عبور سربندها از خود نمی‌باشد، به همین دلیل عملاً هنگامی که برش به محل سربند نزدیک می‌شود، دستگاه خاموش می‌گردد و محل سربند به طور دستی جدا می‌گردد و مجدداً روکش وارد دستگاه می‌شود و دستگاه روشن می‌گردد و این عمل در محل هر سربند تکرار می‌شود. تکه روکش‌هایی که به طور دستی در دستگاه برش اتومات جدا گردیده‌اند و دارای سربند می‌باشند جزء ضایعات خواهند بود.

هدف ما در این مسأله پیدا کردن m طول بهینه کیسینگ $j \in J$, A_j در بازه $[l,u]$ می‌باشد که پس از برش به طول‌های b_{S_i} و به تعداد k_{S_i} برای $i \in I$ کمترین ضایعات را داشته باشیم.

تعاریف و اصطلاحات:

در ادامهٔ این بخش اصطلاحات مربوط به شرکت کابل خودرو را شرح می‌دهیم.

مفتول

سیم‌های فلزی با مقطع دایره‌ای شکل به طول نامتناهی را مفتول گویند.

پروفیل مفتول

به مفتول نورد شده یا تخت شده پروفیل مفتول گویند. پروفیل مفتول دارای مقطع مستطیل شکل است.

وایر[1]

سیم‌های بسیار نازک مفتول را وایر گویند.

استرند

استرند سیمی است که از رشته‌های وایر که به روش‌های خاصی به دور هم بافته شده‌اند تشکیل شده است.

1- Wire

Archive of SID

www.SID.ir

کیسینگ

کیسینگ به عنوان محافظ استرند در کابل کنترل عمل می‌نماید و معمولاً از طریق قطعات اتصال دو سر سیم بر روی خودرو تثبیت می‌گردد. با توجه به نحوهٔ قرار گرفتن استرند داخل روکش، مسیر اعمال نیرو در خودرو شکل داده می‌شود.

دستگاه کت[1]ساز

این دستگاه ویژه کت کیسینگ به وسیله مواد پلیمری است. در این دستگاه کیسینگ توسط کشنده‌های دستگاه از محل خاصی عبور کرده و لایه‌ای از پلیمر روی آن‌ها قرار می‌گیرد. در ترکیب این پلیمر درصدی از لاستیک نیز موجود می‌باشد.

کوت کیسینگ

در اکثر کابل‌ها، یک پوشش پلاستیکی برروی کیسینگ که عموماً از موادهای پولی‌پروپیلن[2]، پولی‌اتیلن[3] است، ایجاد می‌گردد که مانع از خوردگی کیسینگ می‌شود و همچنین از لحاظ رنگ با سایر اجزاء خودرو تناسب دارد. کت کیسینگ مورد نظر بایستی در دماهای پایین و بالا ۳۰- الی ۴۰- و ۸۵ الی ۹۵ نیز مقاوم باشد.

روکش

کیسینگ بعد از عمل کت، روکش نامیده می‌شوند.

سربند

در کیسینگ‌هایی که به طور منقطع تولید می‌گردند به منظور امکان کوت کیسینگ لازم است عمل اتصال بین کیسینگ‌ها به طور موقت انجام گیرد که این محل اتصال سربند نامیده می‌شود و در هنگام کوت سربندها با علائمی مشخص می‌گردند تا در هنگام برش در دستگاه برش اتومات مشخص شوند.

دستگاه‌های نورد

دستگاه‌های نورد به منظور فرم‌دهی مفتول خام اولیه که عموماً به صورت گرد (مقطع دایره) است، استفاده می‌شود و با توجه به میزان تغییر شکل مورد نیاز برای مفتول و دستگاه‌های به کار برده شده، با توجه به توانشان، متفاوت خواهند بود.

بررسی تعداد حالات مسأله در حالت خطی

ابتدا مسأله را در حالت کلی در m دسته بهینه مورد بررسی قرار می‌دهیم. می‌خواهیم تعداد m طول بهینه $j \in J, A_j$ ، ارائه دهیم تا موقعی که کیسینگ‌ها به طول‌های معین $j \in J, A_j$ ، تولید و به طول معین b_{S_i} و به تعداد k_{S_i} برای $i \in I$ برش زده می‌شوند، کمترین ضایعات را داشته باشیم. سوالی که می‌تواند مطرح شود این است که از بین این m تا روکش به طول بهینه $j \in J, A_j$ ، کدام طول معلوم از این n نوع سیم را برش بزنیم به طوری که پس از برش، ضایعات کمینه باشند. به عبارت دیگر ما بایستی برای هر یک (یا چند) از این n نوع سیم، یک طول بهینه A_j از m طول بهینه را مشخص کنیم به طوری که هنگام برش به طول‌های معلوم برای هر یک از این n نوع سیم، ضایعات حداقل باشد.

برای به دست آوردن هر یک از m طول بهینه $j \in J, A_j$ ، برای این n نوع سیم ما بایستی یک مسأله بهینه‌سازی خطی را، که قبلاً مدل‌سازی کرده‌ایم (و در ادامه توضیح داده می‌شود) حل کنیم. در واقع ما احتیاج داریم n نوع سیم را به m دسته تقسیم کنیم و سپس برای

1- Coat
2- Poly Propilen
3- Poly Etilen

Archive of SID

www.SID.ir

هر یک از این m دسته یک طول بهینه $j \in J, A_j$ را پیدا کنیم. نشان خواهیم داد که این طول‌های بهینه از حل یک مسألهٔ بهینه‌سازی خطی به دست می‌آید. به عبارت دیگر ما بایستی یک افراز از n نوع سیم به m دسته را مشخص کرده و برای یک جایگشت معلوم از این افراز یک مسأله بهینه‌سازی خطی را حل کنیم. یعنی بایستی به تعداد افرازهای غیر تکراری n نوع سیم به m دسته، مسائل بهینه‌سازی خطی را حل کرده و سپس کمینه مقدار تابع هدف را از بین جواب‌های این مسأله‌ها معین نمائیم تا متناظر با آن، افراز بهینه و m طول بهینه $j \in J, A_j$ مشخص گردد.

بررسی تعداد افرازهای n نوع سیم در m دسته

در ابتدا تعداد افرازهای n نوع سیم را در m دسته بهینه را مورد بررسی قرار می‌دهیم، تعداد این افرازها برابر تعداد جواب‌های غیر تکراری طبیعی معادلهٔ $x_1 + x_2 + ... + x_m = n$ می‌باشد [۹]. فرض کنید $(\hat{x}_1,...,\hat{x}_m)$ یک جواب معادله فوق باشد، که معادل با یک افراز به m دسته در نظر گرفته می‌شود. تعداد جایگشت‌های مربوط به این افراز برابر است با:

$$\binom{n}{\hat{x}_1,...,\hat{x}_m} = \frac{n!}{\hat{x}_1!...\hat{x}_m!} \qquad (۱)$$

و اگر $k_1, k_2, ..., k_r$ تا از مؤلفه‌های جواب $(\hat{x}_1,...,\hat{x}_m)$ با هم برابر باشند، تعداد جایگشت‌ها این افراز برابر است با:

$$\frac{\binom{n}{\hat{x}_1,...,\hat{x}_m}}{k_1!k_2!...k_r!} = \frac{\frac{n!}{\hat{x}_1!...\hat{x}_m!}}{k_1!k_2!...k_r!} \qquad (۲)$$

و تکرار این افراز برابر:

$$\frac{m!}{k_1!k_2!...k_r!} \qquad (۳)$$

اما با توجه به ماهیت مسأله، ما به جایگشت‌های غیر تکراری افرازهای n نوع سیم به m دسته نیاز داریم، به عبارت دیگر برای هر افراز $(\hat{x}_1,...,\hat{x}_m)$ ما فقط به یک جایگشت از این افراز نیاز داریم و بقیه جایگشت‌های این افراز برای ما تکرارهای بیهوده هستند، و تعداد تکرارهای بیهوده این افراز نیز برابر است با:

$$\left(\frac{m!}{k_1!k_2!...k_r!} - 1\right) \frac{\binom{n}{\hat{x}_1,...,\hat{x}_m}}{k_1!k_2!...k_r!} \qquad (۴)$$

برای توضیح بیشتر در مورد فرمول‌های (۱) الی (۴) به مرجع [۹] ارجاع شود. به عنوان مثال برای ۱۰ نوع سیم و ۴ دسته تعداد افرازها و تکرارهای بیهوده در جدول زیر با توجه به روابط فوق محاسبه شده است.

جدول ۱- تعداد افرازها و تکرارهای بیهوده برای ۱۰ نوع سیم و ۴ دسته

(x_1, x_2, x_3, x_4)	تکرار جواب	تعداد افرازهای سیم‌ها	تعداد تکرارهای بیهوده
(۱ ۱ ۱ ۷)	۴	۱۲۰	۳۶۰
(۱ ۱ ۲ ۶)	۱۲	۱۲۶۰	۱۳۸۶۰
(۱ ۱ ۳ ۵)	۱۲	۲۵۲۰	۲۷۷۲۰
(۱ ۱ ۴ ۴)	۶	۱۵۷۵	۷۸۷۵
(۱ ۲ ۲ ۵)	۱۲	۳۷۸۰	۴۱۵۸۰
(۱ ۲ ۳ ۴)	۲۴	۱۲۶۰۰	۲۸۹۸۰۰
(۱ ۳ ۳ ۳)	۴	۲۸۰۰	۸۴۰۰
(۲ ۲ ۲ ۴)	۴	۳۱۵۰	۹۴۵۰
(۲ ۲ ۳ ۳)	۶	۶۳۰۰	۳۱۵۰۰
مجموع		۳۴۱۰۵	۴۱۸۳۰۵

در جدول ۱ تعداد افرازهای سیم‌ها، تعداد مسائل برنامه‌ریزی خطی است که بایستی حل شود تا از بین

Archive of SID

www.SID.ir

آن‌ها جواب بهینه مسأله انتخاب شود، یعنی برای ده نوع سیم با چهار طول بهینه بایستی ۳۴۱۰۵ مسأله برنامه‌ریزی خطی حل شود.

مدل‌سازی مسألهٔ کابل خودرو در حالت خطی

مسألهٔ کارخانه کابل خودرو را به صورت یک مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی با متغیرهای آمیخته مدل‌سازی می‌کنیم. در ابتدا به مدل‌سازی تابع هدف پرداخته و سپس به بررسی و مدل‌سازی قیدهای هر مسأله می‌پردازیم. آنگاه مدل کلی خطی مسأله را ارائه می‌دهیم.

مدل‌سازی تابع هدف مسأله در حالت خطی

تابع هدف مسأله کارخانه کابل خودرو را با توجه به شرایط فعلی موجود مدل‌سازی می‌کنیم.

برای این مدل‌سازی فرض کنید تعداد سیم‌ها برابر n بوده و تعداد m دسته مورد درخواست باشد. بدین منظور یک افراز معلوم n نوع سیم به m دسته را در نظر می‌گیریم، به طوری که N_{A_1} مجموعهٔ سیم‌های دستهٔ اول دارای N_1 سیم، N_{A_2} مجموعه سیم‌های دسته دوم دارای N_2 سیم،... و N_{A_m} مجموعه سیم‌های دسته m ام دارای N_m سیم باشد.

همچنین فرض می‌کنیم سیم‌های دستهٔ اول به صورت $S_{i_1} \in \{1,2,...,n\}$ برای $i=1,2,...,N_1$، دستهٔ دوم به صورت $S_{i_2} \in \{1,2,...,n\}$ برای $i=1,2,...,N_j$، ... و دستهٔ m ام به صورت $S_{im} \in \{1,2,...,n\}$ برای $i=1,2,...,N_m$ باشد، به عبارت دیگر با توجه به این افراز معلوم داریم:

$$n(N_{A_j}) = N_j, \quad j=1,...,m$$

$$\bigcap_{j=1}^{m} N_{A_j} = \phi$$

$$\bigcup_{j=1}^{m} N_{A_j} = \{1,...,n\}$$

که در $n(N_{A_j})$ نشان‌دهندهٔ تعداد عضوهای مجموعهٔ N_{A_j} است. ما بایستی مسأله را طوری مدل‌سازی کنیم که m طول بهینه $A_1, A_2, ..., A_m$ به‌دست آید، به طوری که هنگام برش سیم‌های مجموعه N_{A_1} با طول A_1، سیم‌های مجموعهٔ N_{A_2} با طول A_2، ... و سیم‌های مجموعهٔ N_{A_m} با طول A_m و به تعداد مورد نیاز سالیانه‌شان کمترین ضایعات را داشته باشیم.

بدین منظور فرض می‌کنیم $n_{S_{i_1}}$ برای $i=1,2,...,N_1$ تعداد سیم‌های کامل به دست آمده سیم نوع S_{i_1} با طول A_1، $n_{S_{i_2}}$ برای $i=1,2,...,N_2$ تعداد سیم‌های کامل به دست آمده سیم نوع S_{i_2} با طول A_2، ... و $n_{S_{im}}$ برای $i=1,2,...,N_m$ تعداد سیم‌های کامل به دست آمده سیم نوع S_{im} با طول A_m پس از برش باشند.

لذا ما بایستی برای هر سیم $S_{i_1} \in N_{A_1}$ عبارت $f_{i_1} = |A_1 - n_{S_{i_1}}(b_{S_{i_1}} + c)|$، $i=1,2,...,N_1$، برای هر سیم $S_{i_2} \in N_{A_2}$ عبارت $f_{i_2} = |A_2 - n_{S_{i_2}}(b_{S_{i_2}} + c)|$، $i=1,2,...,N_2$، ... و برای هر سیم $S_{im} \in N_{A_m}$ عبارت $f_{im} = |A_m - n_{S_{im}}(b_{S_{im}} + c)|$ $i=1,2,...,N_m$ را مینیمم کنیم.

به عبارت دیگر ما با مسأله بهینه‌سازی چند هدفی زیر روبرو هستیم:

$$Min \quad \underset{i=1,2,...,N_1}{f_{i_1}}, \quad \underset{i=1,2,...,N_2}{f_{i_2}}, ..., \quad \underset{i=1,2,...,N_m}{f_{im}} \qquad (5)$$

اما از طرف دیگر سیم‌هایی که دارای تولید سالیانه بیشتری هستند قاعدتاً دارای اهمیت بیشتری می‌باشند، لذا برای این منظور ما برای هر یک از این n نوع سیم یک ارزش یا وزن را در نظر می‌گیریم که این وزن به طول سیم مورد نظر و تعداد سالیانه آن بستگی دارد. اگر w_{S_i} وزن مربوط به سیم نوع i ام با طول b_{S_i} و تعداد تولید سالیانهٔ k_{S_i} برای $i=1,2,...,n$، باشد، داریم:

Archive of SID

www.SID.ir

$$w_{S_i} = \frac{b_{S_i} k_{S_i}}{\sum_{i=1}^{n} b_{S_i} k_{S_i}}, \quad i = 1,2,...,n \qquad (۶)$$

پس با توجه به وزن سیم‌ها و استفاده از بهینه‌سازی چند هدفی از روش تابع مطلوبیت [۶] و از آن جا که نمی‌دانیم کدام نوع سیم را با کدام طول بهینه برش بزنیم، لذا برای به دست آوردن m طول بهینه $A_1, A_2, ..., A_m$ ما بایستی عبارت

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{N_j} | A_j - n_{S_{ij}} (b_{S_i} + c) | w_{S_i} \qquad (۷)$$

را مینیمم سازیم.

مدل‌سازی قیدهای مسأله در حالت خطی

حال به بررسی قیدهای مسأله می‌پردازیم. همان طور که قبلاً اشاره شد طول کیسینگ‌های تولیدی بایستی در بازه $[l,u]$ باشد، لذا قید معادل آن به صورت $l \le A_j \le u \;\; j = 1,2,...,m$ است، و همچنین با توجه به این که تعداد سیم‌های کامل به دست آمده از هر طول بهینه بایستی عددی صحیح مثبت باشد، پس قید معادل آن به صورت:

$$n_{S_{ij}} = \left[\frac{A_j}{b_{S_i} + c} \right], \quad i = 1,2,...,N_j, \quad j = 1,2,...,m \qquad (۸)$$

می‌باشد، یا با توجه به خواص جزء صحیح می‌توان این قید را به صورت:

$$n_{S_{ij}} \le \frac{A_j}{b_{S_i} + c} < n_{S_{ij}} + 1, \quad i = 1,2,...,N_j, \quad j = 1,2,...,m \qquad (۹)$$

لذا مسألهٔ بهینه‌سازی خطی برای یک جایگشت معلوم به صورت زیر در می‌آید:

$$Min \;\; \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{N_j} | A_j - n_{S_{ij}} (b_{S_i} + c) | w_{S_i} \qquad (۱۰)$$

که در آن

$$l \le A_j \le u, \quad j = 1,2,...,m$$

$$n_{S_{ij}} \le \frac{A_j}{b_{S_i} + c} < n_{S_{ij}} + 1, \quad i = 1,2,...,N_j, \quad j = 1,2,...,m$$

$$n_{S_{ij}} \in Z^+, \quad i = 1,2,...,N_j, \quad j = 1,2,...,m$$

برای حل این مسأله برنامه‌ریزی خطی به مراجع [۶ و ۷] رجوع کنید.

مدل‌سازی غیر خطی مسأله کارخانهٔ کابل خودرو

مسألهٔ کمینه‌سازی ضایعات در کارخانهٔ کابل خودرو را به صورت یک مسأله برنامه‌ریزی غیر خطی با متغیرهای آمیخته مدل‌سازی می‌کنیم. در ابتدا به مدل‌سازی تابع هدف، سپس به بررسی و مدل‌سازی قیدهای هر مسأله پرداخته و سپس مدل کلی غیر خطی مسأله را ارائه می‌دهیم.

مدل‌سازی غیر خطی تابع هدف مسأله

تابع هدف مسأله با توجه به شرایط فعلی موجود به صورت زیر مدل‌سازی می‌شود.

مجدداً فرض کنید n نوع سیم موجود است و بخواهیم m دسته با طول‌های بهینه $A_1, A_2, ..., A_m$ و همچنین یک جایگشتی معلوم از این n نوع سیم را به m دسته را به دست آوریم، به طوری که هنگام برش سیم‌های این جایگشت معلوم با طول‌های بهینه $A_1, A_2, ..., A_m$ کمترین ضایعات حاصل گردد. بدین منظور متغیر دودویی (صفر-یک) N_{ij} برای $i = 1,2,...,n$ ، $j = 1,2,...,m$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$N_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر سیم } i \text{ام برای برش با طول بهینه } A_j \text{ انتخاب شود} \\ 0 & \text{اگر سیم } i \text{ام برای برش با طول بهینه } A_j \text{ انتخاب نشود} \end{cases}$$

همان طور که قبلاً نیز اشاره شد، بایستی عبارت:

$$f_{ij} = | A_j - n_{S_{ij}} (b_{S_i} + c) | \qquad (۱۱)$$

Archive of SID

www.SID.ir

را برای $j = ۱,۲,...,m$ ، $i = ۱,۲,...,n$ کمینه سازیم، به عبارت دیگر با کمینه‌سازی توابع چند هدفی به صورت زیر روبرو هستیم:

$$Min \underset{i=۱,۲,...,n}{f_{i۱}}, \underset{i=۱,۲,...,n}{f_{i۲}}, ..., \underset{i=۱,۲,...,n}{f_{im}} \quad (۱۲)$$

با توجه به ارزش هر نوع سیم و این که کدام نوع سیم را با کدام طول بهینه برش بزنیم، از روش تابع مطلوبیت [۶] برای بهینه‌سازی چند هدفی به صورت زیر استفاده می‌کنیم، یعنی عبارت:

$$\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{m} N_{ij} \,|\, A_j - n_{S_{ij}}(b_{S_i} + c) \,|\, w_{S_i} \quad (۱۳)$$

را مینیمم می‌سازیم، که در آن A_j طول بهینه j ام برای $j = ۱,۲,...,m$ ، b_{S_i} طول سیم iام برای $i = ۱,۲,...,n$ ، $n_{S_{ij}}$ تعداد سیم‌های کامل به دست آمده پس از برش سیم iام با طول بهینه A_j و w_{S_i} وزن سیم iام، برای $i = ۱,۲,...,n$ می‌باشند و c ضخامت تیغهٔ برش بر حسب میلی‌متر است.

مدل‌سازی قیدهای مسأله

با توجه به این که تعداد سیم‌های کامل به دست آمده از هر طول بهینه بایستی صحیح مثبت باشند پس قید معادل آن به صورت:

$$n_{S_{ij}} = \left[\frac{N_{ij}A_j}{b_{S_i} + c}\right], \quad j = ۱,۲,...,m, \quad i = ۱,۲,...,n \quad (۱۴)$$

می‌باشد، یا به طور معادل با توجه به خواص جزء صحیح می‌توان این قید را به صورت:

$$n_{S_{ij}} \le \frac{N_{ij}A_j}{b_{S_i} + c} < n_{S_{ij}} + ۱, \quad j = ۱,۲,...,m, \quad i = ۱,۲,...,n \quad (۱۵)$$

نوشت.

اما از آن جا که سیم iام، $i = ۱,۲,...,n$ فقط بایستی در یک دستهٔ بهینه j ام، $j = ۱,۲,...,m$ قرار بگیرد (به عبارت دیگر هر سیم iام، $i = ۱,۲,...,n$ فقط بایستی با یک طول بهینه A_j برش زده شود) پس قید معادل آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\sum_{j=۱}^{m} N_{ij} = ۱, \quad i = ۱,...,n \quad (۱۶)$$

از طرف دیگر بایستی حداقل یک نوع سیم از بین n نوع سیم برای برش به ازای هر طول بهینه A_j، $j = ۱,۲,...,m$ را انتخاب کنیم. بنابراین قید معادل آن به صورت:

$$۱ \le \sum_{i=۱}^{n} N_{ij} \le n - (m-۱), \quad j = ۱,...,m \quad (۱۷)$$

است، و همچنین بایستی همه n نوع سیم برای برش با طول‌های بهینه A_j ، $j = ۱,۲,...,m$ انتخاب شوند، لذا قید معادل آن به صورت:

$$\sum_{j=۱}^{m}\sum_{i=۱}^{n} N_{ij} = n \quad (۱۸)$$

است.

همان طور که قبلاً نیز اشاره شد طول کیسینگ‌های تولیدی بایستی در بازه $[l,u]$ باشد، لذا قید معادل آن به صورت:

$$l \le A_j \le u, \quad j = ۱,۲,...,m \quad (۱۹)$$

است.

مدل کلی مسأله بهینه‌سازی در حالت غیر خطی

با توجه به آن‌چه که گفته شد مدل مسألهٔ بهینه‌سازی غیرخطی با متغیرهای آمیخته به صورت زیر است:

$$Min \sum_{j=۱}^{m}\sum_{i=۱}^{n} N_{ij} \left| A_j - n_{S_{ij}}(b_{S_i} + c) \right| w_{S_i}$$

به طوری که

$$n_{S_{ij}} \le \frac{N_{ij}A_j}{b_{S_i} + c} < n_{S_{ij}} + ۱, \quad j = ۱,۲,...,m, \quad i = ۱,۲,...,n$$

Archive of SID

www.SID.ir

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} N_{ij} = n$$

$$\sum_{j=1}^{m} N_{ij} = 1, \quad i = 1,...,n$$

$$1 \le \sum_{i=1}^{n} N_{ij} \le n-(m-1), \quad j = 1,...,m \qquad (20)$$

$$l \le A_j \le u, \quad j = 1,...,m$$

$$N_{ij} = 0 \ or \ 1, \quad i = 1,...,n, \quad j = 1,...,m$$

$$n_{ij} \in Z^+, \quad i = 1,...,n, \quad j = 1,...,m$$

که در آن متغیرها و پارامترهای مسأله همان گونه که قبلاً ذکر شد؛ به صورت زیر معرفی می‌گردند:

m تعداد دسته‌های بهینه (معلوم)، n تعداد انواع سیم‌ها (معلوم)، w_{S_i} وزن (ارزش) سیم iام (معلوم)، c قطر برش (معلوم)، b_{S_i} طول سیم iام (معلوم)، N_{ij} انتخاب سیم iام برای طول بهینه j ام (مجهول)، $n_{S_{ij}}$ تعداد سیم‌های کامل به دست آمده سیم iام در طول بهینه j ام (مجهول) و A_j طول بهینه کیسینگ j ام (مجهول) می‌باشد.

مدل کلی برای کارخانهٔ کابل خودرو سبزوار

کارخانهٔ کابل خودرو سبزوار اقدام به تولید سالیانه انواع کابل‌های کنترل اتومبیل می‌نماید. نوع کابل، طول و تعداد مورد نیاز سالیانه در جدول ۲ آورده شده است.

فرض کنیم پارامترها برای مسأله کارخانه کابل خودرو سبزوار با توجه به تعاریف اولیه $m=4$، $n=10$، $l=30$ و $u=35$ باشد. لذا مدل مسأله کابل خودرو به صورت زیر در می‌آید:

$$Min \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{10} N_{ij} \left| A_j - n_{S_{ij}}(b_{S_i}+c) \right| w_{S_{ij}}$$

که در آن

$$n_{S_{ij}} \le \frac{N_{ij}A_j}{b_{S_i}+c} < n_{S_{ij}}+1, \quad i = 1,...,10, \ j = 1,...,4$$

$$N_{ij} = 0 \ or \ 1, \quad i = 1,...,10, \ j = 1,...,4 \qquad (21)$$

$$\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{10} N_{ij} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{4} N_{ij} = 1, \quad i = 1,...,10$$

$$1 \le \sum_{i=1}^{10} N_{ij} \le 7, \quad j = 1,...,4$$

$$30 \le A_j \le 35, \quad j = 1,...,4$$

$$n_{ij} \in Z^+, \quad i = 1,...,10, \ j = 1,...,4$$

جدول ۲- اطلاعات مربوط برای انواع کابل‌های کارخانهٔ کابل خودرو سبزوار (طول و تعداد)

طول (b_{S_i})	تعداد (k_{S_i})	نوع کاربرد	نوع (S_i)
۱/۶۶۲	۱۱۰۰۰۰	ترمز دستی بهینه پیکان	۱
۱/۵۲۹	۱۰۰۰۰۰	ترمز شاخه اصلی پژو ۴۰۵	۲
۱/۴۷۳	۱۰۰۰۰۰	ترمز دست دولوکس	۳
۱/۳۹۳	۴۰۰۰۰	کلاچ پژو RD ۱۶۰۰	۴
۱/۸۶	۲۰۰۰۰	ترمز دستRD ۱۶۰۰	۵
۱/۰۶۲	۱۲۰۰۰	کلاچ پیکان	۶
۰/۶۸۷	۱۰۰۰۰	کلاچ پیکان کوتاه	۷
۰/۴۳	۳۰۰۰	کلاچ پیکان ۱۸۰۰	۸
۱/۶۶۵	۲۰۰۰	ترمز دست پیکان ۱۸۰۰ دست چپ	۹
۰/۶۱	۲۰۰۰	ترمز دست پیکان ۱۸۰۰ دست راست	۱۰

جواب‌ها در حالت خاص

در ادامه جواب مسألهٔ (۲۱) را برای حالات‌های خاص زیر به دست می‌آوریم. جواب این مسائل به وسیلهٔ نرم‌افزار لینگو[1] به دست آمده است.

برش چهار نوع سیم با دو طول بهینه

در این حالت چهار نوع سیم با طول‌های مختلف ۱/۶۲۲، ۱/۵۲۹، ۱/۴۷۳ و ۱/۳۹۳ با دو طول بهینه A_1 و A_2 برش زده می‌شوند. مقدار بهینه تابع هدف در تکرار ۱۲۶۱۶

1- Lingo Software

Archive of SID

www.SID.ir

برابر ۰/۱۴۸۲۵۸۰ به دست آمد، که ضایعات کل برش چهار نوع سیم با دو طول بهینه است. جواب‌های بهینهٔ این مسأله و مقادیر A_1 و A_4 در جدول زیر داده شده است.

جدول ۳- نتایج برش چهار نوع سیم با دو طول بهینه

مقدار	متغیر	مقدار	متغیر
۱	$N_{۴۲}$	۳۳/۹۰۲۰۰	A_1
۰	$n_{S_{۱۱}}$	۳۰/۰۰۰۰۰	A_4
۱۸	$n_{S_{۱۲}}$	۰	$N_{۱۱}$
۲۲	$n_{S_{۲۱}}$	۱	$N_{۱۲}$
۰	$n_{S_{۲۲}}$	۱	$N_{۲۱}$
۲۳	$n_{S_{۳۱}}$	۰	$N_{۲۲}$
۰	$n_{S_{۳۲}}$	۱	$N_{۳۱}$
۰	$n_{S_{۴۱}}$	۰	$N_{۳۲}$
۲۱	$n_{S_{۴۲}}$	۰	$N_{۴۱}$

در این مثال سیم نوع ۲ (ترمز شاخه اصلی پژو ۴۰۵) با طول ۱/۵۲۹، سیم نوع ۳ (ترمز دست دولوکس) با طول ۱/۴۷۳، با طول بهینه $A_1 = ۳۳/۹۰۲۰۰$، سیم نوع ۱ (ترمز دستی بهینه پیکان) با طول ۱/۶۶۲، و سیم نوع ۴ با طول ۱/۳۹۳، با طول بهینه $A_4 = ۳۰/۰۰۰۰۰$ برش زده می‌شوند.

برش سه نوع سیم با سه طول بهینه

در این حالت سه نوع سیم با طول‌های مختلف ۱/۶۲۲، ۱/۵۲۹ و ۱/۴۷۳ با طول سه بهینه A_1، A_2 و A_4 برش زده می‌شوند. مقدار بهینه تابع هدف در تکرار ۱۱۶۵ برابر صفر به دست آمد، که ضایعات کل برش سه نوع سیم با سه طول بهینه است. جواب‌های بهینهٔ این مسأله و مقادیر A_1، A_2 و A_4 در جدول زیر داده شده است.

جدول ۴- نتایج برش سه نوع سیم با سه طول بهینه

مقدار	متغیر	مقدار	متغیر
۱	$N_{۳۳}$	۳۱/۵۹۷۰۰	A_1
۱۹	$n_{S_{۱۱}}$	۳۰/۶۰۰۰۰	A_2
۰	$n_{S_{۱۲}}$	۳۰/۹۵۴۰۰	A_4
۰	$n_{S_{۱۳}}$	۱	$N_{۱۱}$
۰	$n_{S_{۲۱}}$	۰	$N_{۱۲}$
۲۰	$n_{S_{۲۲}}$	۰	$N_{۱۳}$
۰	$n_{S_{۲۳}}$	۰	$N_{۲۱}$
۰	$n_{S_{۳۱}}$	۱	$N_{۲۲}$
۰	$n_{S_{۳۲}}$	۰	$N_{۲۳}$
۲۱	$n_{S_{۳۳}}$	۰	$N_{۳۱}$
		۰	$N_{۳۲}$

در این مثال سیم نوع ۱ (ترمز دستی بهینه پیکان) با طول ۱/۶۶۲، با طول بهینه $A_1 = ۳۱/۵۹۷۰۰$، سیم نوع ۲(ترمز شاخه اصلی پژو ۴۰۵) با طول ۱/۵۲۹، با طول بهینه $A_2 = ۳۴/۹۲۳۰۰$ و سیم نوع ۳(ترمز دست دولوکس) با طول ۱/۴۷۳، با طول بهینه $A_4 = ۳۰/۹۵۴۰۰$ برش زده می‌شوند.

برش چهار نوع سیم با سه طول بهینه

در این حالت چهار نوع سیم با طول‌های مختلف ۱/۶۲۲، ۱/۵۲۹، ۱/۴۷۳ و ۱/۳۹۳ با سه طول بهینه A_1، A_2 و A_4 برش زده می‌شوند. مقدار بهینه تابع هدف در تکرار ۱۵۴۶۹ برابر ۰/۰۰۶۷۱۶۰۰ به دست آمد، که ضایعات کل برش چهار نوع سیم با سه طول بهینه است. جواب‌های بهینه این مسأله و مقادیر A_1، A_2 و A_4 در جدول زیر داده شده است.

Archive of SID

www.SID.ir

جدول ۵- نتایج برش چهار نوع سیم با سه طول بهینه

متغیر	مقدار	متغیر	مقدار
A_1	۳۰/۶۰۰۰۰	$N_{۴۳}$	۰
A_2	۳۴/۹۲۳۰۰	$n_{S_{11}}$	۰
A_3	۳۰/۹۵۴۰۰	$n_{S_{12}}$	۲۱
N_{11}	۰	$n_{S_{13}}$	۰
N_{12}	۱	$n_{S_{21}}$	۲۰
N_{13}	۰	$n_{S_{22}}$	۰
N_{21}	۱	$n_{S_{23}}$	۰
N_{22}	۰	$n_{S_{31}}$	۰
N_{23}	۰	$n_{S_{32}}$	۰
N_{31}	۰	$n_{S_{33}}$	۲۱
N_{32}	۰	$n_{S_{41}}$	۰
N_{33}	۱	$n_{S_{42}}$	۲۵
N_{41}	۰	$n_{S_{43}}$	۰
N_{42}	۱		

در این مثال سیم نوع ۲ (ترمز شاخه اصلی پژو ۴۰۵) با طول ۱/۵۲۹ با طول بهینه $A_1 = ۳۰/۶۰۰۰۰$ ، سیم نوع ۱ (ترمز دستی بهینه پیکان) با طول ۱/۶۶۲، سیم نوع ۴ (کلاچ پژو RD ۱۶۰۰) با طول ۱/۳۹۳، با طول بهینه $A_2 = ۳۴/۹۲۳۰۰$ و سیم نوع ۳ (ترمز دست دولوکس) با طول ۱/۴۷۳، با طول بهینه $A_3 = ۳۰/۹۵۴۰۰$ برش زده می‌شوند.

برش پنج نوع سیم با دو طول بهینه

در این حالت پنج نوع سیم با طول‌های مختلف ۱/۶۲۲، ۱/۵۲۹، ۱/۴۷۳، ۱/۳۹۳ و ۱/۸۶ با دو طول بهینه A_1 و A_2 برش زده می‌شوند. مقدار بهینه تابع هدف در تکرار ۲۱۷۳۸ برابر ۰/۰۹۲۸۲۸۰۰ به دست آمد، که ضایعات کل برش پنج نوع سیم با دو طول بهینه است. جواب‌های بهینه این مسأله و مقادیر A_1 و A_2 در جدول زیر داده شده است.

جدول ۶- نتایج برش پنج نوع سیم با دو طول بهینه

متغیر	مقدار	متغیر	مقدار
A_1	۳۳/۹۰۲۰۰	$N_{۵۲}$	۰
A_2	۳۴/۹۲۳۰۰	$n_{S_{11}}$	۲۱
N_{11}	۰	$n_{S_{12}}$	۰
N_{12}	۱	$n_{S_{21}}$	۲۲
N_{21}	۱	$n_{S_{22}}$	۰
N_{22}	۰	$n_{S_{31}}$	۲۳
N_{31}	۱	$n_{S_{32}}$	۰
N_{32}	۰	$n_{S_{41}}$	۰
N_{41}	۰	$n_{S_{42}}$	۲۵
N_{42}	۱	$n_{S_{51}}$	۱۸
N_{51}	۱	$n_{S_{52}}$	۰

در این مثال سیم نوع ۱ (ترمز دستی بهینه پیکان) با طول ۱/۶۶۲، سیم نوع ۲ (ترمز شاخه اصلی پژو ۴۰۵) با طول ۱/۵۲۹، سیم نوع ۳ (ترمز دست دولوکس) با طول ۱/۴۷۳ و سیم نوع ۵ (ترمز دست پژو RD ۱۶۰۰) با طول ۱/۸۶۰، با طول بهینه $A_1 = ۳۳/۹۰۲۰۰$، و سیم نوع ۴ (کلاچ پژو RD ۱۶۰۰) با طول ۱/۳۹۳، با طول بهینه $A_2 = ۳۴/۹۲۳۰۰$ برش زده می‌شوند.

نتیجه‌گیری

در این مقاله ما مسأله کارخانه کابل خودرو را در حالت‌های خطی و غیر خطی از نوع متغیرهای آمیخته مدل‌سازی کردیم و تعداد مسائل برنامه‌ریزی خطی لازم برای به دست آوردن جواب بهینه در این مدل‌ها با

Archive of SID

www.SID.ir

یکدیگر مقایسه شدند، که نشان‌دهندهٔ اهمیت حل مسائل برنامه‌ریزی غیر خطی در مقابل مسائل برنامه‌ریزی خطی می‌باشد. واضح است که در مدل‌سازی غالب مسائل موجود در صنعت و جامعه، از نوع مدل‌های غیر خطی است. مسأله مطرح در کارخانه کابل خودرو سبزوار حالت خاصی از مدل مذکور می‌باشد که جواب بهینه مسأله کابل خودرو سبزوار در حالت‌های خاص به دست آمده است.

مراجع

[1] Audet, C. and Dennis, J.E., Pattern Search Algorithms for Mixed Variable Programming, SIAM Journal on Optimization, 11 (2001) 573-594.

[2] Abramson, M.A., Pattern Search Algorithms for Mixed Variable General Constrained Optimization Problems, Ph.D. Thesis. Department of Computational and Applied Mathematics, Rice University, (2002).

[3] Lewis R.M. and Torczon, V., Pattern search methods for linearly constrained minimization, SIAM Journal on Optimization, 10, 3 (2000) 917-941.

[4] Grippo, L. and Lucidi, S., A globally convergent version of the Polak-Ribiere conjuate gradient method, Mathematical Programming, 78 (1997) 375-391.

[5] Gilbert, J.C. and Nocedal, J., Global convergence of conjugate gradient methods foroptimization. SIAM Journal on Optimization, 2, 1 (1992) 21-24.

[۶] اس. اس. رائو، بهینه‌سازی (تئوری و کاربرد)، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، مهر ۱۳۷۳.

[۷] ریچارد، ال، بوردن، ج، دوگلاس فیزر، آلبرت. سی. رینولدز، آنالیز عددی، ققنوس، تهران، ۱۳۷۹.

[۸] مختار، س، بازارا، جان، جی. جارویس، حنیف. دی. شرالی، برنامه‌ریزی خطی، نشر کتب دانشگاهی، تهران، پاییز ۱۳۷۸.

[۹] بهبودیان، جواد، آمار و احتمال مقدماتی، آستان قدس رضوی، مشهد، پاییز ۱۳۷۷.

Archive of SID

www.SID.ir