

حل کلی مسأله دامنه بهینه برای یک سیستم سهموی با استفاده از اندازه‌ها

علیرضا فخارزاده جهرمی و فرامرز رستمی*

گروه ریاضی - دانشگاه صنعتی شیراز

*گروه ریاضی - دانشگاه شهید چمران اهواز

پست الکترونیکی: a_fakharzadeh@sutech.ac.ir

چکیده

حل مسأله طراحی شکل بهینه یک سیستم کنترلی سهموی، تعریف شده با زوج عناصر هندسی درون و مرز ناحیه به کمک روش نشانیدن، هدف این مقاله می‌باشد. ابتدا شکل کلاسیک معادلات سهموی، همراه با شرایط مورد نظر را به معادلاتی انتگرالی تبدیل می‌کنیم. سپس در نمایش جدید، مسأله را بر مبنای مفاهیم نظریه اندازه‌ها به مسأله‌ای از نوع کمینه‌سازی یک تابعی بر مجموعه‌ای از اندازه‌های رادن مثبت مبدل می‌سازیم. این مسأله با استفاده از تقریب مناسب و گسسته‌سازی فضا، به مسأله‌ای از نوع برنامه‌ریزی خطی متناهی قابل تبدیل و حل است. جواب‌های حاصل قادرند به صورت همزمان دامنه و کنترل (نزدیک) بهینه را معرفی نمایند. مثال‌های عددی نیز ارائه و با این روش حل گردیده است.

واژه‌های کلیدی: معادله سهموی، اندازه رادن، طراحی شکل بهینه، روش نشانیدن

مقدمه و معرفی مسأله

نظریه طراحی شکل بهینه علاوه بر حساب تغییرات با نظریه‌های بهینه‌سازی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و حل عددی آن در ارتباط مستقیم می‌باشد. پیشرفت‌های علم ریاضی به صورت عام و این شاخه از ریاضیات به صورت خاص، سبب شده است که امروزه بتوانیم از توپولوژی، آنالیز مدرن، آنالیز حساسیت، نظریه اندازه‌ها و دانش‌های جدید ریاضی-کامپیوتر نیز به عنوان دیگر شاخه‌های مورد استفاده در طراحی شکل بهینه نام ببریم. استفاده از روش‌های کنترل بهینه در حل مسائل

طراحی شکل برای اولین بار در سال ۱۸۷۲ توسط لیونز [۱] صورت گرفت و از آن به بعد دانشمندان زیادی در این زمینه کار کرده‌اند و روش‌های گوناگونی ارائه داده‌اند. یکی از روش‌های کارآیی که در این زمینه ارائه گردیده، روش نشانیدن می‌باشد. این روش بر اساس ایده‌ای از یانگ در [۲] بنا شده است. در سال ۱۹۷۷ برای اولین بار روش نشانیدن به وسیله ویلسون و ربیو برای حل مسأله‌ای از کنترل که بر اساس معادله انتشار تعریف شده است، به کار گرفته شد. سپس این روش به صورت یک نظریه توسط ربیو در سال ۱۹۸۶ تنظیم و در [۳] معرفی گردید.

که در معادله فوق n بردار نرمال خروجی در نقاط مرزی،
 $v: \partial D \times (0, T) \rightarrow V$ برای مجموعه کراندار V تابع
اندازه‌پذیر لبگ به عنوان تابع کنترل سیستم،
 $f: (0, T) \times R \rightarrow R$ تابع پیوسته داده شده و
 $H: (0, T) \times R \rightarrow R$ تابعی معلوم می‌باشد. برای راحتی
قرارداد می‌کنیم:

$$Q_T \equiv D \times (0, T), \Gamma_T \equiv \partial D \times (0, T), D_T \equiv D \times \{T\}, \\ D_0 \equiv D \times \{0\}.$$

بنا به کراندار u و مشتقات اول آن، مجموعه‌های
کراندار $U \subset R$ و $U' \subset R^r$ موجود می‌باشند که $u \in U$
و $\nabla u \in U'$.

فرض کنید f_0 و f_1 دو تابع پیوسته، نامنفی و حقیقی بوده
و همچنین ثابت‌های h' و h'' چنان موجود باشند که
برای هر $f_0(x, t, u, \nabla u) \leq h' |u| + h'' \|\nabla u\|_E$
اکنون می‌توان مسئله
 $(x, t, u, \nabla u) \in Q_T \times U \times U'$ کلاسیک طراحی شکل بهینه‌ای که حل آن از روش
نشانده (شکل-اندازه) هدف این مقاله است را چنین
معرفی کرد:

$$\text{Minimize: } J(D, \partial D, u, v) = \int_{Q_T} f_0(x, t, u, \nabla u) dx dt \\ + \int_{\Gamma_T} f_1(s, t, u(s, t), v(s, t)) ds dt$$

Subject to:

$$u_t(x, t) = \nabla u(x, t) + f(t, u(x, t)), \quad \forall (x, t) \in Q_T \\ u(x, 0) = \xi_0(x), \quad u(x, T) = \xi_1(x) \quad (4) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n|_{\Gamma_T} = H(t, u) + v(s, t).$$

لازم به ذکر است که تابع هدف در نظر گرفته شده،
کلی‌ترین حالت ممکن برای این دسته مسائل است.

تعریف ۱: چهارتایی $(D, \partial D, u, v)$ را قابل قبول نامند
اگر و فقط اگر u یک جواب کراندار مسئله سهموی (۱)
الی (۳) بر D باشد. مجموعه همه چهارتایی‌های قابل
قبول را با F نمایش می‌دهیم.

به دنبال آن این روش به صورت متناوب توسط محققانی
چون ربیو، فراهی، وحیدیان‌کامیاد و رادلف در مقالات
متعدد مربوط به مسائل کنترلی مورد استفاده قرار گرفت.
ربیو به دنبال آن این روش را برای مسائل متضمن
معادلات بیضوی، اعم از خطی و غیر خطی، به کار گرفت
[۴].

در سال ۱۹۹۹ فخارزاده و ربیو برای اولین بار
این روش را برای حل مسائل طراحی شکل بهینه به کار
بردند (روش جدید، شکل-اندازه نامیده شد)؛ آنان در
ابتدا این روش را برای مسئله طراحی شکل بهینه در
مختصات قطبی معرفی کردند [۵] و سپس این روش را
به مختصات دکارتی نیز گسترش دادند. همچنین در همان
سال از این روش برای تعیین دامنه بهینه یک سیستم
کنترلی بیضوی در مختصات قطبی استفاده شد [۶].

این مقاله بر آن است تا بر مبنای روش نشانده
به تعیین بهترین منحنی ساده و بسته‌ای در مختصات قطبی
بپردازد که از نقطه مورد نظری گذشته، یک سیستم
سهموی با شرایط مرزی و شرایط اولیه داده شده در درون
آن برقرار بوده و در عین حال تابع هدف مفروضی را نیز
کمینه سازد. برای این منظور ابتدا به تشریح سیستم
سهموی مورد نظر می‌پردازیم.

فرض D ناحیه‌ای کراندار با مرز ∂D در
فضای R^r بوده و $u: D \times (0, T) \rightarrow R$ یک تابع
مشتق‌پذیر و کراندار در $(D \times (0, T)) \subset C^r$ باشد که مشتقات
جزیی اول آن کراندار بوده و در عین حال یک جواب
سیستم سهموی با شرایط اولیه و مرزی زیر نیز باشد:

$$u_t(x, t) = \Delta u(x, t) + f(t, u(x, t)); \quad (1) \\ (x \in D, 0 < t < T)$$

$$u(x, 0) = \xi_0(x), \quad u(x, T) = \xi_1(x); \quad (x \in D) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n|_{\partial D \times (0, T)} = H(t, u) + v(s, t); \quad (3)$$

$$u_y = u_r r_y + u_\theta \theta_x = \frac{y}{r} u_r + \frac{x}{r^2} u_\theta,$$

$$u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x = \frac{x}{r} u_r - \frac{y}{r^2} u_\theta$$

لذا برای هر تابع u که دارای مشتقات مراتب اول باشد، خواهیم داشت:

$$\nabla u = \left(\frac{x}{r} u_r - \frac{y}{r^2} u_\theta, \frac{y}{r} u_r + \frac{x}{r^2} u_\theta \right)$$

پس $\nabla u \cdot \nabla \varphi = u_r \varphi_r + \frac{1}{r^2} u_\theta \varphi_\theta$ و از رابطه (۵) نتیجه می‌شود:

$$\int_{Q^T} (-\varphi_t u(r, \theta, t) + \nabla_\varphi \nabla_u - \varphi f) r dr d\theta dt + \int_{\Gamma_T} \varphi(H(t, u) - v(s, t)) ds dt = \int_{D_0} \varphi \xi_1 r dr d\theta - \int_{D^T} \varphi \xi_1 r dr d\theta. \quad (6)$$

چون $u(x, T) = \xi_2$ ، $u(x, 0) = \xi_1$ و φ مستقل از t است پس:

$$\int_{Q^T} (-\varphi_t u + \nabla_\varphi \nabla_u - \varphi f - \frac{1}{T} \varphi(\xi_1 - \xi_2)) r dr d\theta dt + \int_{\Gamma_T} \varphi(H(t, u) - v(s, t)) ds dt = 0 \quad (7)$$

در حالت کلی پیدا کردن جواب مسأله کلاسیک کار ساده‌ای نیست و در حل آن ممکن است با مشکلاتی روبرو شویم؛ از جمله تهی بودن مجموعه F ، حتی اگر F ناتهی باشد امکان دارد جواب آن یک چهارتایی قابل قبول نباشد. همچنین ممکن است نوشتن شرایط لازم جهت وجود جواب در حالت کلی پیچیده و یا حتی غیرممکن باشد [۷].

با توجه به مشکلات یاد شده، به دنبال معرفی روشی هستیم که تا حد ممکن از معایب فوق بری باشد. مشاهده خواهد شد که روش نشانیدن، قادر به انجام چنین امری است.

در حالت کلی پیدا کردن یک جواب کلاسیک برای حالت عمومی مسأله (۴) مشکل می‌باشد [۷]؛ بنابراین سعی می‌کنیم که یک جواب ضعیف (تعمیم یافته) برای آن پیدا کنیم. از این رو به وسیله گزاره زیر مسأله را به شکلی دیگر نمایش می‌دهیم که دست‌یابی به جواب برای آن میسر باشد؛ اثبات آن را در [۸] مشاهده کنید.

گزاره ۱: اگر u یک جواب کلاسیک مسأله سهموی (۱) - (۳) باشد آنگاه برای هر $\varphi \in H^1(D)$ که $H^1(D)$ فضای سوبولف است) داریم:

$$\int_{Q^T} (-\varphi_t u + \nabla_\varphi \nabla_u - \varphi f) dx dt + \int_{\Gamma_T} \varphi(H(u, t) - v(s, t)) ds dt = \int_{D_0} \varphi \xi_1(x) dx - \int_{D^T} \varphi \xi_1(x) dx \quad (5)$$

اکنون، بنابر آنچه که گذشت، صورت جدید مسأله به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Minimize: } & J(D, \partial D, u, v) = \int_{Q^T} f_0(x, t, u, \nabla u) dx dt + \int_{\Gamma_T} f_1(s, t, u(s, t), v(s, t)) ds dt \\ \text{Subject to: } & \int_{Q^T} (-\varphi_t u + \nabla_\varphi \nabla_u - \varphi f) dx dt + \int_{\Gamma_T} \varphi(H(u, t) - v(s, t)) ds dt = \int_{D_0} \varphi \xi_1(x) dx - \int_{D^T} \varphi \xi_1(x) dx. \quad (\forall \varphi \in H^1(D)) \end{aligned}$$

از آنجا که در مختصات قطبی وقتی $r \geq 0$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$ باشد، آنگاه منحنی $r = r(\theta)$ یک منحنی ساده است (یعنی بین نقاط اولیه و انتهایی، خود را قطع نمی‌کند)؛ لذا در بخش بعد به بیان مسأله طراحی شکل بهینه در مختصات پرداخته می‌شود.

بیان مسأله در دستگاه مختصات قطبی

فرض $J = [0, 2\pi]$ و قرارداد می‌کنیم که مجموعه‌های $W \subset R$ و $A \subset R$ کراندار باشند. از تبدیلات دستگاه‌های مختصات قطبی و دکارتی، خواهیم داشت:

گزاره ۲: انتقال $(\lambda_u, \mu_v) \mapsto (D, \partial D, u, v)$ از F به زوجی از نگاشت‌های خطی (λ_u, μ_v) تعریف شده در (۱۰) یک به یک است. اثبات: مشابه با اثبات قضیه (۳-۳-۲) از [۱۰] است.

همچنین بنا به فوق اکنون تابع هدف نیز بر حسب اندازه‌های مجهول (λ_u, μ_v) قابل بیان است:

$$\text{Minimize: } i(\lambda_u, \mu_v) = \lambda_u(f_0) + \mu_v(f_1 \sqrt{r^2 + \omega^2}) \quad (11)$$

که در آن

$$\lambda_u(f) \equiv \int_{\Omega} f d\lambda_u$$

$$\mu_v(g) \equiv \int_{W'} g d\mu_v \quad \text{و}$$

بنا به گزاره ۱، تصویر تمام چهارتابی‌های قابل قبول در F تحت انتقال فوق را نیز می‌توان با F نمایش داد. یک به یک بودن انتقال، نشان می‌دهد که در اصل تغییری در ماهیت فضا ایجاد نشده است و صرفاً صورت نمایش مسئله عوض شده است. بنابراین تمام مشکلات قبلی همچنان به قوت خود باقی است. برای چیره شدن بر این مشکلات، فضای تعریف مسئله را گسترش می‌دهیم. و از میان زوج اندازه‌های رادن مثبت (λ, μ) در $M^+(\Omega) \times M^+(W')$ که در رابطه (۱۰) صدق می‌کند، آن زوج اندازه‌هایی را جستجو می‌کنیم که تابعی $i(\lambda, \mu)$ را کمینه سازد. پس این کمینه‌سازی روی مجموعه بزرگ‌تری از زوج اندازه‌های قابل قبول، انجام می‌گیرد و لذا کلی است.

شناسایی زوج بهینه

قرارداد می‌کنیم:

$$F_{\varphi} \equiv (-\varphi_t u + \nabla_{\varphi} \nabla_u - \varphi f - \frac{1}{T} \varphi (\xi_1 - \xi_2)) r$$

انتقال مسأله به مسأله‌ای از فضای اندازه‌ها

هر جواب ضعیف u از (۴) تابعی مثبت، کراندار و خطی Λ_u زیر را بر $\Omega = D \times (0, T) \times U \times U'$ معرفی می‌کند:

$$\Lambda_u: F \rightarrow \int_{Q^T} F(\theta, r, t, u, \nabla u) dr d\theta dt, \quad (8)$$

$$\forall F \in C(\Omega)$$

فرض $\dot{r}(\theta) = \omega$ (که $\omega \in W$ کنترل مصنوعی مبین شکل بوده و W مجموعه‌ای کراندار در \mathbb{R} می‌باشد)، آنگاه هر تابع کنترل v که در (۳) صدق کند، تابعی مثبت، کراندار و خطی زیر را در $W' = D \times (0, T) \times V \times W$ تعریف می‌کند:

$$\Gamma_u: G \rightarrow \int_{J \times (0, T)} G(\theta, t, r, \omega, u) d\theta dt \equiv \int_{\Gamma_r} \frac{1}{\sqrt{r^2 + \omega^2}} G ds dt, \quad \forall G \in C(W'). \quad (9)$$

بر اساس قضیه نمایش ریس (۹) تابعی‌های فوق به ترتیب دو اندازه رادن یکتا و مثبت λ_u, μ_v را چنین معرفی می‌کنند [۳]:

$$\Lambda_u(F) = \int_{Q^T} F(\theta, r, t, u, \nabla u) dr d\theta dt = \int_{\Omega} F d\lambda_u; \quad F \in C(\Omega)$$

$$\Gamma_u(G) = \int_{J \times (0, T)} G(\theta, r, \omega, u, \nabla u) d\theta dt = \int_{W'} G d\mu_v; \quad G \in C(W'). \quad (10)$$

بنابراین هر چهارتابی قابل قبول $(D, \partial D, u, v) \in F$ می‌تواند مانند یک زوج اندازه (λ_u, μ_v) در زیرمجموعه مناسبی از $M^+(\Omega) \times M^+(W')$ تلقی شود و لذا تبدیل:

$$(D, \partial D, u, v) \in F \rightarrow (\lambda_v, \mu_u) \in M^+(\Omega) \times M^+(W')$$

به وجود خواهد آمد.

$$\mu(f(\theta, r, \omega)) = Ta_f, \quad \forall f \in C_1(\tilde{W}). \quad (17)$$

اما نظر به خواص هندسی مجهولات مسأله و این که منحنی ساده و بسته ∂D مرز D است به دلیل ارتباط ∂D و D ، ارتباطی نیز بین دو اندازه λ و μ موجود است که باید به نوعی در یافتن زوج بهینه مد نظر قرار گیرد. از این رو برای هر $\rho, \tau \in C^1(J \times A)$ از قضیه استوکس [۱۱] خواهیم داشت:

$$\int_D \left(\frac{\partial}{\partial r}(r\rho) - \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \right) dr d\theta = \int_J (\tau\omega + \rho r) d\theta. \quad (18)$$

حال اگر از طرفین رابطه فوق نسبت به t انتگرال بگیریم، رابطه زیر نتیجه می‌گردد:

$$\int_{D \times (0, T)} \left(\frac{\partial}{\partial r}(r\rho) - \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \right) dr d\theta dt = \int_{J \times (0, T)} (\tau\omega + \rho r) d\theta dt$$

پس برای هر ρ و τ دلخواه، این رابطه را می‌توان بر حسب اندازه‌های λ و μ چنین نمایش داد:

$$\lambda \left(\rho + r \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \right) - \mu(\tau\omega + \rho r) = 0$$

$$\rho, \tau \in C^1(J \times A)$$

همچنین می‌دانیم که تابع ∇u گرادیان تابع u می‌باشد و ارتباط این دو باید همواره لحاظ گردد، خصوصاً وقتی که با گسسته‌سازی و انتخاب مقادیر برای این دو در محاسبات عددی مسأله مواجه هستیم. بنابراین:

$$\int_D (u \nabla \phi + \nabla u \nabla \phi) r dr d\theta = \int_{\partial D} \phi u ds; \quad \phi \in H^1(D)$$

اگر از طرفین رابطه بالا بر حسب t انتگرال بگیریم، داریم:

$$\int_{D \times (0, T)} (u \nabla \phi + \nabla u \nabla \phi) r dr d\theta = \int_0^T \int_{\partial D} \phi v ds dt$$

$$= \int_{J \times (0, T)} \phi v \sqrt{r^2 + \omega^2} d\theta dt$$

این رابطه بر حسب μ و λ چنین قابل نمایش است:

و $G_\phi = \phi(H(t, u) - v(s, t))\sqrt{r^2 + \omega^2}$ پس رابطه (۷) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\lambda(F_\phi) + \mu(G_\phi) = 0, \quad \phi \in H^1(D) \quad (13)$$

حال اگر $B \in R^2$ یک گوی باز و شامل مجموعه $J \times A$ باشد، آنگاه برای هر $\phi \in C^1(B)$ مطابق [۳] تعریف می‌کنیم:

$$\phi^g(\theta, r, \omega) = \phi_r(\theta, r)\omega + \phi_\theta(\theta, r) \quad (14)$$

و با انتگرال‌گیری از آن روی $J \times (0, T)$ خواهیم داشت:

$$\int_{J \times (0, T)} \phi^g(\theta, r(\theta), \omega(\theta)) d\theta dt = T\delta(\phi)$$

اختلاف مقدار ϕ در نقاط ابتدا و انتهای ∂D است. پس داریم:

$$\mu(\phi^g(\theta, r, \omega)) = T\delta(\phi), \quad \forall \phi \in C^1(B). \quad (15)$$

حال یک حالت ویژه از (۱۴) را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای هر $\psi \in D(J)$ تعریف می‌کنیم:

$$\psi^g(\theta, r(\theta), \omega(\theta)) = r(\theta)\psi'(\theta) + \omega(\theta)\psi(\theta)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_{J \times (0, T)} \phi^g(\theta, r(\theta), \omega(\theta)) d\theta dt = T \int_J (r\psi(\theta))' d\theta$$

$$= T [r(\theta)\psi(\theta)]_0^\pi = 0$$

زیرا $\psi(\pi) = \psi(0) = 0$. بنابراین:

$$\mu(\psi^g) = 0, \quad \forall \psi \in D(J^0) \quad (16)$$

با فرض $\tilde{W} = J \times A \times W$ ، توابع دلخواه دیگری از $C^1(B)$ را که فقط به متغیر θ بستگی دارند در نظر می‌گیریم. همچنین برای $f \in C_1(\tilde{W})$ تعریف می‌کنیم $\phi(\theta, r, \omega) = f(\theta)$ بنابراین:

$$\int_{J \times (0, T)} f d\theta dt = T \int_J f d\theta = Ta_f$$

که در آن a_f انتگرال $f(0, r, \omega)$ روی $J = [0, \pi]$ می‌باشد. لذا:

الف) برای اولین دسته از قیود (۲۰)، توابع $\{\phi_i : i = 1, 2, \dots, M_1\}$ در $C'(B)$ را به صورت چند جمله‌ای‌هایی از r و θ مانند: $r, \theta, r^\nu, \theta^\nu, r\theta^\nu, r^\nu\theta, \dots$

انتخاب می‌کنیم [۳].

ب) برای دسته دوم از قیود (۲۰) توابع $\psi_j = \sin(2\pi j\theta)$ یا $\psi_j = 1 - \cos(2\pi j\theta)$ در $D(J^\circ)$ در نظر می‌گیریم و سپس دنباله توابع $X_h (h = 1, 2, \dots, M_1)$ را به صورت زیر معرفی می‌کنیم: $X_h = r\psi'(\theta) + \omega\psi(\theta)$. مجموعه این توابع در $D(J^\circ)$ تام است [۳].

ج) برای دسته سوم از قیود (۲۰)، توابع را به صورت تابع مشخصه یعنی $f_s(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta \in J_s \\ 0 & \theta \notin J_s \end{cases}$ را اختیار می‌کنیم، به طوری که برای $s = 1, 2, \dots, M_2$

$J_s = \left[\frac{2\pi(s-1)}{M_2}, \frac{2\pi s}{M_2} \right]$ تعداد تقسیمات بازه J می‌باشد. در اینجا باید توجه داشت که هر چند توابع f_s پیوسته نمی‌باشند اما هر کدام از توابع f_s و f_{sk} مثبت $s = 1, 2, \dots, M_2$ و $k = 1, 2, \dots, M_2$ حد دنباله‌ای از توابع پیوسته و می‌تواند هر تابع پیوسته را تقریب نمایند [۱۲].

د) در $H^1(D)$ دنباله توابع $\{\phi_n\}_{n \geq 1}$ با $\phi_n = r^n \cos(n\theta)$ یا $\phi_n = r^n \sin(n\theta)$ را انتخاب می‌کنیم؛ در [۶] نشان داده شده که این توابع در $H^1(D)$ تام هستند.

حال با در نظر گرفتن تعداد متناهی تابع از هر یک از مجموعه‌های تام ذکر شده، مسأله زیر که تعداد قیود آن متناهی است حاصل می‌شود؛ این مسأله شکل جدید تقریب شده از مسأله اصلی می‌باشد که یک مسأله از نوع برنامه‌ریزی خطی نیمه متناهی است.

$$\lambda(ru\nabla\phi + \nabla u\nabla\phi) = \mu(\phi\nu\sqrt{r^\nu + \omega^\nu}), \quad (19)$$

$$\forall \phi \in H^1(D);$$

بنابراین به جای حل مسأله (۴) می‌توان جواب بهینه مسأله جدید زیر را در Q به دست آورد:

$$\text{Minimize : } i(\lambda, \mu) = \lambda(f_c) + \mu(f_1\sqrt{r^\nu + \omega^\nu})$$

$$\text{Subject to :}$$

$$\mu(\phi^*) = T\delta(\phi) \quad \forall \phi \in C'(B)$$

$$\mu(\psi^*) = 0 \quad \forall \psi \in D(J_c)$$

$$\mu(f) = Ta_f \quad f \in C(\bar{\omega}) \quad (20)$$

$$\lambda(F_\rho) + \mu(G_\rho) = 0 \quad \rho \in H^1(D)$$

$$\lambda(\rho + r\frac{\partial\rho}{\partial r} - \frac{\partial\tau}{\partial\theta}) - \mu(\tau\omega + \rho r) = 0 \quad \rho, \tau \in C^1(J \times A)$$

$$\lambda(u\nabla\phi + \nabla u\nabla\phi) = \mu(\phi\nu\sqrt{r^\nu + \omega^\nu}) \quad \phi \in H^1(D).$$

وجود جواب و چگونگی تقریب آن

قضیه ۱: زوج بهینه (λ^*, μ^*) از اندازه‌ها در مجموعه $Q \subseteq M^+(\Omega) \times M^+(\omega')$ آنچنان وجود دارد که:

$$\forall (\lambda, \mu) \in Q \quad i(\lambda^*, \mu^*) \leq i(\lambda, \mu)$$

اثبات: می‌توان به [۶] قضیه ۱ و یا [۳] قضیه ۲-۱ مراجعه کرد. □

علیرغم اثبات وجود جواب توسط قضیه فوق، تعیین آن به صورتی دقیق، به هیچ وجه امری ساده نیست. زیرا نه تنها تعداد قیود مسأله نامتناهی است، بلکه بعد واقعی فضای مسأله نیز نامتناهی است. لذا سعی خواهیم کرد جواب بهینه را به صورتی تقریبی (با تقریبی کاملاً مناسب) بیابیم. برای این منظور ابتدا با تقریب مناسب تعداد قیود و سپس با استفاده از گسسته‌سازی؛ تعداد مجهولات را به تعدادی متناهی تقریب می‌کنیم. سپس جوابی تقریباً بهینه را برای مسأله به دست خواهیم آورد. انتخاب تعداد متناهی از قیود، با انتخاب مجموعه‌های تام مناسب به شیوه زیر انجام می‌پذیرد:

بهینه (۲۱) باشد؛ از قضیه A.۵ در [۳] نتیجه می‌شود که اندازه‌های بهینه دارای فرم نمایشی:

$$\mu^* = \sum_{m=1}^M \beta_m^* \delta(Z_m^*), \quad \lambda^* = \sum_{n=1}^N \alpha_n^* \delta(z_n^*)$$

هستند که در آن برای هر $n = 1, 2, \dots, N$ و $m = 1, 2, \dots, M$ داریم $\alpha_n^* \geq 0$ و $\beta_m^* \geq 0$ و همچنین Z_m^* و z_n^* به ترتیب متعلق به زیرمجموعه‌های چگالی از Ω و W' می‌باشند. در اینجا M و N اعدادی صحیح و مثبت بوده و $\delta(z)$ یک اندازه اتمی واحد با تکیه‌گاه مجموعه منفرد $\{z\}$ می‌باشد.

بنابراین با در نظر گرفتن این شکل نمایش λ^* و μ^* ، مسأله (۲۱) معادل یک مسأله برنامه‌ریزی ریاضی ضرایب مجهول α_n^* و β_m^* بوده و تکیه‌گاه‌های مجهول $\{z_i^*\}_{i=1}^N$ و $\{Z_j^*\}_{j=1}^M$ به ترتیب از فضاهای Ω و W' می‌باشند. حال اگر بتوانیم تابع $\lambda(f_i) + \mu(f_j) \rightarrow (\lambda, \mu)$ را فقط نسبت به ضرایب α_i^* و β_j^* کمینه سازیم در این صورت مسأله به یک مسأله برنامه‌ریزی خطی تبدیل خواهد شد. فرض $E_{W'}$ و E_{Ω} به ترتیب دو زیرمجموعه چگال شمارا از Ω و W' باشند، آنگاه با انتخاب تعداد متناهی از عناصر آن‌ها و با نتیجه گرفتن از قضیه ۳ فصل سوم [۳] و نمایش اندازه‌های λ و μ به صورت ترکیب خطی از اندازه‌های اتمی زیر نمایش داده می‌شوند. چنان که در آن نقاط z_n و Z_m به ترتیب از زیرمجموعه‌ای متناهی از مجموعه‌های شمارا و چگال $E_{W'}$ و E_{Ω} انتخاب شده‌اند.

$$\lambda = \sum_{n=1}^N \alpha_n \delta(z_n), \quad z_n \in E_{\Omega}; \quad (22)$$

$$\mu = \sum_{m=1}^M \beta_m \delta(Z_m), \quad Z_m \in E_{W'}$$

آنگاه جواب مسأله (۴) قابل تقریب با جواب حاصل از مسأله برنامه‌ریزی خطی متناهی زیر است:

$$\text{Minimize: } i(\lambda, \mu) = \lambda(f_0) + \mu(h_0 \sqrt{r^T + \omega^T})$$

Subject to:

$$\begin{aligned} \mu(\phi_k^g) &= T\delta(\phi) & k &= 1, 2, \dots, M_1 \\ \mu(X_l) &= 0 & l &= 1, 2, \dots, M_2 \\ \mu(f_s) &= Ta_s & s &= 1, 2, \dots, M_3 \\ \lambda(F_i) + \mu(G_i) &= 0 & i &= 1, 2, \dots, M_4 \\ \lambda(D_j) - \mu(E_j) &= 0 & j &= 1, 2, \dots, M_5 \\ \lambda(H_r) + \mu(I_r) &= 0 & r &= 1, 2, \dots, M_6 \end{aligned} \quad (21)$$

که در آن

$$D_j = ru \nabla \phi_j + r \nabla u \nabla \phi_j$$

$$E_j = -(\phi_j v \sqrt{r^T + \omega^T})$$

$$H_r = H_{ij} = \phi_i + r \frac{\partial \phi_i}{\partial r} - \frac{\partial \phi_i}{\partial \theta}$$

$$F_i = F_{\phi_i}, \quad G_i = G_{\phi_i}$$

$$I_r = I_{ij} = -(\phi_j \omega + \phi_i r)$$

قضیه زیر نشان می‌دهد که وقتی M_i ها برای $i = 1, 2, \dots, 6$ به سمت بی‌نهایت میل کند، جواب مسأله (۲۱) به جواب مسأله (۲۰) میل می‌کند. اثبات قضیه به صورت مشابه نظیر آن است که در [۳] ذکر شده است.

قضیه ۲: برای عددهای صحیح $i = 1, 2, \dots, 6$ ، M_i فرض کنید Q_M مجموعه همه زوج‌های

$$(\lambda, \mu) \in M^+(\Omega) \times M^+(W')$$

باشد که در قیده‌های مسأله (۲۰) صدق می‌کنند. اگر M_i ها برای $i = 1, 2, \dots, 6$ به سمت بی‌نهایت میل کنند، آنگاه:

$$\inf_{Q_M} i(\lambda, \mu) \rightarrow \inf_Q i(\lambda, \mu).$$

گرچه در (۲۱) تعداد قیود متناهی است اما فضای جواب دارای بعد نامتناهی است. بنابراین در گام دوم تقریب، جواب مسأله را با جواب یک مسأله برنامه‌ریزی خطی متناهی تقریب خواهیم نمود. اگر (λ^*, μ^*) یک جواب

فرم دلخواه در می‌آید. هدف یافتن بهترین شکل هندسی در فضای دو بعدی، و اعمال بهترین کنترل (مثلاً به صورت انرژی گرمایی) بر مرز آن است چنان که اگر این ماده مذاب را به آن شکل قالب‌گیری کنیم، بعد از مدت زمان معین T ثانیه، دمای آن به b درجه سانتی‌گراد برسد. به علاوه تمایل داریم که تا حد امکان انرژی گرمایی وارد شده بر مرز، کمترین مقدار باشد. از این رو اختیار می‌کنیم $f_0 = 0$ و $f_1 = v$. همچنین با توجه به اختیار مسأله، فرض می‌کنیم؛ $u(x, 0) = a = 2$ ، $u(x, T) = b = 1$ ، $T = 2$ ، $U = [0, 2]$ ، $J = [0, 2\pi]$ ، $A = [0, 1]$. مساحت داده شده را برابر ۲ و نقطه ثابت را $(0, 0/5) = (2\pi, 0/5)$ در نظر می‌گیریم.

آنگاه با انتخاب $U_1 = U_2 = [-0/5, 0/5]$ ، $V = [0, 1]$ و $W = [-0/3, 0/3]$ به حل مسأله بر مبنای روش شرح داده شده می‌پردازیم.

توجه داریم که در مختصات قطبی $\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} u_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} u_\theta$ و فرض شده که $\nabla u = u_1 u_\theta + u_2 u_r$ باشد. از آنجا که منبع انرژی گرمایی ما صرفاً بیرونی است، لذا منبع انرژی گرمایی درونی وجود نخواهد داشت، پس $f = 0$ می‌باشد. برای حل مسأله مجموعه‌های $J, A, (0, T), V$ و W را به ترتیب به ۸، ۱۰، ۱۰، ۵ و ۱۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. سپس از هر جزء بازه یک نقطه را به طور دلخواه برمی‌گزینیم.

بنابراین فضای $W' = J \times A \times (0, T) \times V \times W$ را با $Z_m = (\theta_m, r_m, t_m, v_m, \omega_m)$ گره $M = 4 \times 10^4$ گسسته‌سازی کرده‌ایم.

همچنین هر کدام از مجموعه‌های U_1, U_2 و U_3 را به ۵ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و در نتیجه

$$\text{Minimize: } \sum_{n=1}^N \alpha_n f_0(z_n) + \sum_{m=1}^M \beta_m f_1(Z_m) \sqrt{r_m^2 + \omega_m^2}$$

Subject to:

$$\sum_{m=1}^M \beta_m \phi_k^g(Z_m) = T \delta \phi_k \quad k=1, 2, \dots, M_1$$

$$\sum_{m=1}^M \beta_m X_l(Z_m) = 0 \quad l=1, 2, \dots, M_2$$

$$\sum_{m=1}^M \beta_m f_s(Z_m) = T a_s \quad s=1, 2, \dots, M_3 \quad (23)$$

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n F_i(z_n) + \sum_{m=1}^M \beta_m G_i(Z_m) = 0 \quad i=1, 2, \dots, M_4$$

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n D_j(z_n) + \sum_{m=1}^M \beta_m E_j(Z_m) = 0 \quad j=1, 2, \dots, M_5$$

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n H_r(z_n) + \sum_{m=1}^M \beta_m I_r(Z_m) = 0 \quad r=1, 2, \dots, M_6$$

$$\alpha_n \geq 0 \quad n=1, 2, \dots, N$$

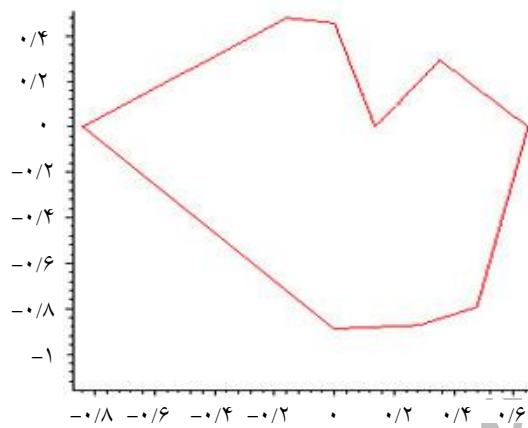
$$\beta_m \geq 0 \quad m=1, 2, \dots, M.$$

که در آن $Z_m = (\theta_m, r_m, t_m, \omega_m, v_m) \in W'$ و $z_n = (\theta_n, r_n, t_n, u_n, u_r) \in \Omega$ این مسأله در صورت معین بودن Z_m و z_n ها با نرم افزارهای مختلف ریاضی قابل حل است. لذا پس از حل، همان‌گونه که در فصل سوم [۱۰] نیز توضیح داده شده است، به استخراج تابع کنترل بهینه در بین داده‌ها می‌پردازیم.

مثال های عددی

مثال ۱: ماده مذاب معینی که از کوره با دمای a درجه سانتی‌گراد خارج می‌شود، می‌تواند به صورت‌های مختلفی در نظر گرفته شود. به عنوان نمونه در کارخانه‌های صنایع پلاستیکی تولید کننده ظروف یکبار مصرف و یا ظروف پلاستیکی محافظ غذا (نظیر آنچه که در سرویس‌های هواپیمایی کاربرد دارد)، ابتدا پلاستیک حرارت داده می‌شود و به صورتی بسیار نرم و با قابلیت انعطاف بالا در می‌آید. چنین ورقه‌ای می‌تواند به عنوان یک مایع (ماده مذاب) در نظر گرفته شود. آنگاه در کارخانه این مایع مذاب با استفاده از قالب و دمیدن هوا برش خورده و به

در صفحه مختصات قطبی مشخص می‌کنیم. از اتصال این نقاط به وسیله پاره‌خط‌هایی که دو نقطه متوالی حاصل را به هم وصل می‌کنند (خطوط شکسته) شکل دامنه (تقریباً) بهینه که به وسیله مجموعه‌ای از پاره‌خط‌ها به نمایش درآمده است، حاصل می‌گردد. دامنه (تقریباً) بهینه را در شکل ۲ نشان داده‌ایم.

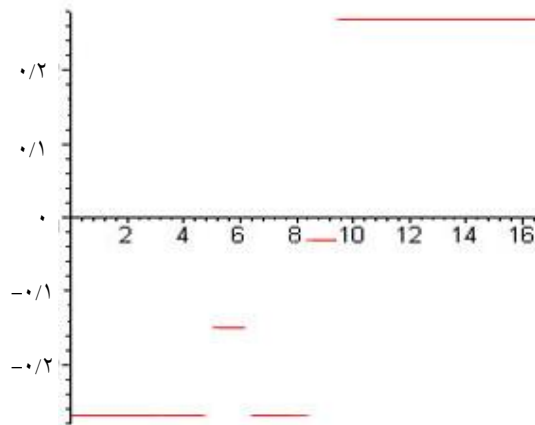


شکل ۲- شکل بهینه مثال ۱

مثال ۲: فرض می‌کنیم مساحت داده شده برابر ۱ و $T = 1$, $f_0 = u^2$, $f_1 = v$. همچنین مجموعه‌های کراندار را برای این مثال به صورت زیر انتخاب می‌کنیم: $U = [0, 2]$, $J = [0, 2\pi]$, $W = [-0.3, 0.3]$ و $A = V = U_1 = U_r = [0, 1]$ آنگاه همانند مثال ۱ به حل مسأله می‌پردازیم. مسأله برنامه‌ریزی خطی نظیر (۲۳) که برای این مسأله بر پا می‌شود، دارای ۲۶ قید و ۱۸۰۰۰۰ متغیر می‌باشد. مقدار بهینه برای تابع هدف برابر 0.1257742060146306 حاصل شد. آنگاه کنترل مصنوعی تقریباً بهینه و شکل تقریباً بهینه را همان‌گونه که در مثال قبل شرح داده شد، به دست آوردیم. این کنترل و دامنه بهینه حاصل به ترتیب در شکل‌های ۳ و ۴ نمایش داده شده‌اند.

فضای $N = 10^5$ را با $\Omega = J \times A \times (0, T) \times U \times U_1 \times U_r$ گره $z_n = (\theta_n, r_n, t_n, u_n, u_{1n}, u_{rn})$ می‌سازیم. با انتخاب $M_1 = 2, M_2 = 6, M_3 = 8, M_4 = 6$ یک مسأله برنامه‌ریزی خطی با ۲۶ محدودیت و ۱۴۰۰۰۰ متغیر نظیر (۲۳) حاصل می‌شود.

آنگاه با استفاده از روش سیمپلکس اصلاح شده که در زیر برنامه DDLPRS از کتابخانه IMSL نرم‌افزار ۶ Visual Fortran آمده است، مسأله فوق حل گردید. مقدار تقریباً بهینه تابع هدف برابر 0.9784436583803488 به دست آمد. همچنین با استفاده از مقادیر بهینه α_i^* ها و β_j^* ها به دست آمده، تابع کنترل مصنوعی (تقریباً) بهینه (مبین شکل) به صورت یک تابع قطعه‌ای ثابت معین گردید؛ شکل ۱ این تابع کنترل (تقریباً) بهینه را نشان می‌دهد.

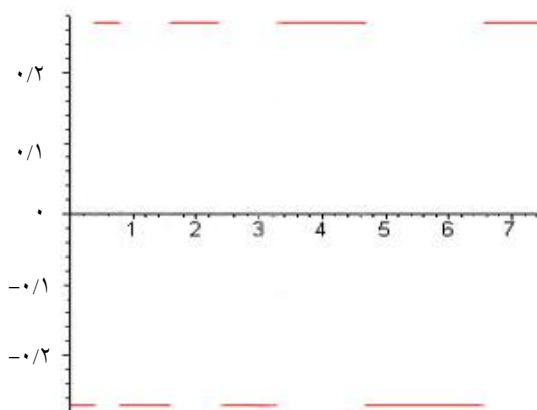


شکل ۱- تابع کنترل مصنوعی مبین شکل برای مثال ۱

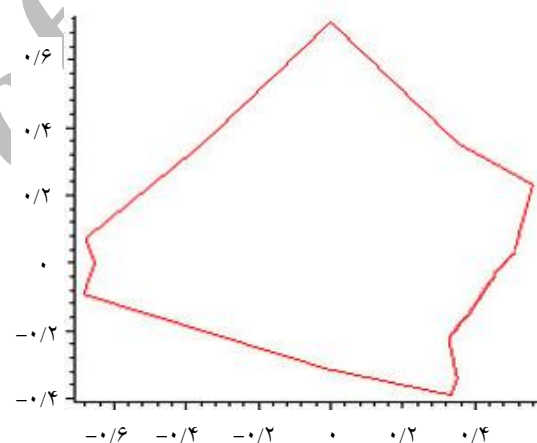
برای تعیین دامنه تقریباً بهینه، پس از تعیین ω_i ها و θ_i ها با فرض $r_0 = r_n$ و با استفاده از معادله تفاضلی $r_i = r_{i-1} + (\theta_i - \theta_{i-1})\omega_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ حاصل از رابطه $\omega = \dot{r}(\theta)$ مقادیر r_i , $i = 1, 2, 3, \dots, m$ نیز مشخص می‌شوند. سپس نقاط به دست آمده (θ_i, r_i) را

problems. Manchester University Press, Manchester, (1986).

- [4] Rubio, J.E., The global control of nonlinear elliptic equations. Journal of the Franklin Institute 330, 1 (1993) 29-35.
- [5] Fakharzadeh, A.J. and Rubio, J.E., Shape and Measures. IMA J. Math. Control and Inf., 16 (1999) 207-220.
- [6] Fakharzadeh, A.J. and Rubio, J.E., Global Solution of optimal shape design problem. AMS J. Math. Analysis and its Applications, 18, 1 (1999) 143-155.
- [7] Mikhailov, V.P., Partial Differential Equations. Moscow, MIR publ. (1978).
- [۸] خاکتاب، ع.، کنترل بهینه مرزی معادلات سهمی گون غیر خطی، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه فردوسی مشهد، شهریور ۱۳۷۸.
- [۹] اعلامپور ع. تعیین شکل بهینه در فضای دو بعدی بر مبنای نظریه اندازه و کنترل، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید چمران اهواز، ۱۳۸۱.
- [10] Leopold, F., Advanced Calculus. The Williams and Wilkins Company, USA, (1976).
- [11] Rubio, W., Principles of Mathematical Analysis (2nd ed.). New York: McGraw-Hill, (1976).
- [12] Rudin, W., Principles of Mathematical Analysis (2nd ed). New Delhi, Tata McGraw-Hill, (1983).



شکل ۳- تابع کنترل مصنوعی مبین شکل برای مثال ۲



شکل ۴- شکل بهینه مثال ۲

مراجع

- [1] Lions, J.L., Some Aspects of the Optimal Control of Distributed Parameters Systems. RESAM, SIAM, 6 (1972).
- [2] Young, L.C., Lectures On the Calculus of Variations and Optimal Control theory. W. B. Sanders Company, (1969).
- [3] Rubio, J.E., Control and Optimization: the linear treatment of nonlinear