کنترل تروریسم در صنعت جهانگردی از دیدگاه ریاضی

سیّد ابوالفضل علوی
گروه ریاضی- دانشگاه تربیت معلّم سبزوار
پست الکترونیکی: saalavi@sttu.ac.ir

چکیده

همیشه توریسم تأثیر مثبتی بر درآمد دولت و ایجاد اشتغال دارد. اما در بسیاری از کشورها عوامل متعددی، خصوصاً تروریسم باعث بی‌ثباتی درآمد صنعت جهانگردی شده است. دولت‌ها سعی می‌کنند با سرمایه‌گذاری در جهت گسترش مکان‌های توریستی و هزینه‌های اجرایی آن، سود ناشی از صنعت جهانگردی را افزایش دهند. از طرف دیگر، تروریست‌ها با اعمال خشونت بار سعی می‌کنند تا از تأثیر سرمایه‌گذاری جهانگردی بکاهند. هدف ما این است که سیستم کنترلی مدل فوق را به گونه‌ای طراحی کنیم تا دولت تصمیم گیرنده اصلی در طرح بوده و درآمد ناشی از این صنعت ماکزیمم شود. مسألهٔ کنترل بهینه فوق را به یک مسأله کنترل بهینه در نظریه اندازه تبدیل نموده،سپس آن را با یک مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی با بعد متناهی تقریب می‌زنیم با حل این مسأله، توابع کنترل بهینه تقریبی یا به عبارتی میزان سرمایه‌گذاری دولت در دو بخش امور زیر بنایی جهانگردی و هزینهٔ اجرایی- امنیتی مشخص می‌شود که با اجرای آن سود حاصل از این صنعت ماکزیمم خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: *صنعت جهانگردی، کنترل بهینه، نظریهٔ اندازه، اصل ماکزیمم پونتریاگین، برنامه‌ریزی خطی*

مقدمه

امروزه در بیش از صد کشور جهان صنعت جهانگردی نقش مهمی بر درآمد دولت، ایجاد اشتغال و تأمین ارز خارجی ایفا نموده و به عنوان صنعتی که تأثیرات چند بعدی دارد مطرح است بر طبق آمار رسمی سازمان جهانی وابسته به صنعت جهانگردی، در سال ۲۰۰۰ میلادی کشورهای فرانسه، اسپانیا، امریکا، ایتالیا و چین، به ترتیب با داشتن ۷۵، ۵۰، ۴۸، ۴۱/۵ و ۳۱/۲ میلیون نفر گردشگر به عنوان موفق‌ترین کشورهای جهان در صنعت جهانگردی بوده‌اند. لکن ایران با حدود یک میلیون جهانگرد در رده پایین‌ترین کشورها قرار دارد و این در حالی است که کشور ما در ردیف ۱۰ کشور اول جهان از نظر جاذبه‌های تاریخی و باستانی است [۱].

توجه به صنعت جهانگردی که نقش فزاینده‌ای در کشورهای رو به توسعه بازی می‌کند، از اوایل دهه هفتاد به عنوان راهی برای کاهش کسری بودجه، منبع ارز خارجی و ایجاد اشتغال مطرح است. به علاوه صنعت

جهانگردی وسیله‌ای برای نجات کشورها از اقتصاد تک بعدی در نظر گرفته می‌شود. به عنوان نمونه در کشور مصر، تأثیرات مستقیم و غیرمستقیم اقتصادی صنعت جهانگردی ۱۱/۳ درصد از تولید ناخالص داخلی این کشور را به خود اختصاص می‌دهد. همچنین از سال ۱۹۹۲ تا ۱۹۹۶ هر ساله تعداد جهانگردان در اسرائیل ۲۰٪ افزایش داشته به طوری که در سال ۱۹۹۸ درآمد صنعت جهانگردی در اسرائیل ۲/۷ میلیارد دلار بوده که معادل ۷/۷ درصد کل صادرات این کشور را تشکیل داده است. اطلاعات مربوط به تعداد جهانگردان در کشور مصر، اسرائیل و ایران در نمودارهای (۱) تا (۳) ارائه شده است، برای مطالعه بیشتر پیرامون نقش صنعت جهانگردی در اقتصاد کشورها می‌توان به منابع [۲ و ۳] مراجعه نمود.

تروریسم به صورت بین‌المللی و درون مرزی از سال ۱۹۸۰ به عنوان یک حقیقت با زندگی مردم عجین شده است. فعالیت‌های خشونت‌آمیز در مقاصد جهانگردی تأثیر منفی بر صنعت گردشگری دارند. در بیشتر موارد خشونت می‌تواند برای یک دوره کوتاه یا طولانی به صنعت جهانگردی آسیب برساند. برای مطالعه پیرامون تاریخچه روابط بین خشونت و جهانگردی می‌توان به منابع [۴، ۵ و ۶] مراجعه نمود.

اخیراً توجه زیادی به عوامل بی‌ثباتی در درآمد توریسم شده است؛ عوامل متعددی مانند بی‌ثباتی سیاسی کشورها، نوسانات نرخ ارز و تغییرات اصولی در قیمت محصولات باعث بی‌ثباتی در درآمد صنعت جهانگردی می‌شود، اما یکی از مهم‌ترین این عوامل برای کشورهای در حال توسعه و همچنین در منطقه خاورمیانه تروریسم و خشونت‌گرایی است. در حالی که تأثیر تروریسم بر صنعت جهانگردی شناخته شده است، اما تحقیقات پیرامون چگونگی این تاثیرات در مرحله ابتدایی است. در این مقاله ابتدا مدل ریاضی حاکم بر تأثیر خشونت در صنعت جهانگردی را توصیف نموده، سپس واکنش دولت در قبال آن را مشخص می‌نمائیم. برای تحقق این امر، یک سیستم کنترل بهینه طراحی می‌شود که در آن دولت تصمیم گیرنده اصلی در طرح بوده و ملاک ارزشی (تابعی هدف) در این سیستم این است که درآمد ناشی از صنعت جهانگردی ماکزیمم شود. حل سیستم کنترل بهینه فوق را با دو روش تحلیلی (استفاده از اصل ماکزیمم پونتریاگین) و عددی (استفاده از نظریه اندازه) مورد بررسی قرار می‌دهیم. استفاده از نظریه اندازه در حل مسائل کنترل بهینه کلاسیک، برای اولین بار توسط روبیو مورد استفاده قرار گرفت [۷]. نویسنده از نظریهٔ اندازه برای حل عددی معادلات دیفرانسیل مرتبه n−ام غیرخطی و مسائل کنترل بهینه مسائل حرارت و موج استفاده کرده است [۸، ۹، ۱۰ و ۱۱]. برای بررسی کاربردهای بیشتر از نظریه اندازه در زمینه های گوناگون می‌توان به منابع [۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵ و۱۶] مراجعه نمود. همچنین هارتل و همکارانش از اصل ماکزیمم برای حل مسائل بهینه‌سازی در سیستم‌های اقتصادی، بالاخص در صنعت جهانگردی استفاده نموده‌اند [۲۰].

بیان مسأله

همیشه هدف دولت این است که سود حاصل از صنعت جهانگردی را افزایش دهد. اگر تعداد جهانگردان را در زمان t به $x_1 = x_1(t)$ نمایش داده و فرض کنیم که سود ناشی از هر جهانگرد در واحد زمان، مقدار ثابت a باشد، آنگاه درآمد حاصل در یک واحد زمانی ax_1 خواهد بود. از طرفی هزینه‌های مربوط به جهانگردی شامل دو بخش می‌باشد که بخش اول آن مربوط به هزینه‌های سرمایه‌گذاری جهت جذاب‌تر نمودن کشور برای جهانگردان و گسترش امکانات توریستی است. میزان سرمایه‌گذاری دولت در این بخش را به $u_1 = u_1(t)$ و

هزینهٔ این نوع سرمایه‌گذاری‌ها، مانند هزینه‌های نگهداری، سرویس‌دهی وغیره را با $p(u_1)$ نمایش می‌دهیم. از طرف دیگر دولت در زمینه مدیریت و اجرای امنیت هزینه‌ای را متقبل می‌شود تا از فعالیت‌های تروریستی جلوگیری کند. هزینهٔ اجرایی در واحد زمان را با $u_2 = u_2(t)$ و مقدار ثابت b را هزینه مورد نیاز برای فعال نمودن یک واحد اجرایی (یا انتظامی)در رابطه با جلوگیری از فعالیت‌های تروریستی در نظر می‌گیریم. لذا بازیافت اقتصادی حاصل از صنعت جهانگردی دراین حالت عبارت است از:

$$F(t, x_1, x_2, u_1, u_2) = ax_1 - p(u_1) - bu_2,$$

که در آن $u_1(t)$ و $u_2(t)$ متغیرهای کنترل هستند.

هدف ما این است که بازیافت اقتصادی (سود) ماکزیمم شود. به عبارتی دیگر بایستی تابع هدف زیر را ماکزیمم نمود:

$$J = \int_0^\infty e^{-\delta t}(ax_1 - p(u_1) - bu_2)dt,$$

البته با محدودیت‌هایی که به آن اشاره خواهد شد توجه داریم که δ نرخ تخفیف زمانی نامیده می‌شود که برتری بازیافت اقتصادی در زمان اخیر را بر زمان آینده توجیه می‌نماید [۴].

گرچه تعداد گردشگران با افزایش سرمایه‌گذاری در بخش صنعت جهانگردی افزایش می‌یابد، اما وجود تروریست‌ها بوضوح حضور توریست‌ها را کاهش می‌دهد. فرض کنید $x_2 = x_2(t)$ نمایش تعداد تروریست‌ها باشد. تأثیر منفی تعداد تروریست‌ها بر اثر مثبت سرمایه‌گذاری در بخش جهانگردی را به کمک تابع $h(u_1, x_2)$ نمایش می‌دهیم که نمایانگر نرخ تغییرات جهانگردی نسبت به زمان است. بنابراین برای یک x_2 ثابت، تابع h تأثیرات لحظه‌ای سرمایه‌گذاری را روی تعداد جهانگردان بیان می‌کند.

به عنوان نمونه می‌توان تابع h را به صورت زیر انتخاب نمود:

$$h(u_1, x_2) = eu_1(N - x_2)$$

که در آن ضریب e و N اعداد ثابت و مثبتی هستند، همچنین N مقدار ماکزیمم احتمالی تروریست‌ها را بیان می‌کند.

اگر ضریب کاهش طبیعی جهانگردان را با عدد ثابت و مثبت d نمایش دهیم، نرخ تغییرات جهانگردان نسبت به زمان به وسیله معادله دیفرانسیل زیر بیان می‌شود:

$$x_1' = h(u_1, x_2) - dx_1.$$

در صنعت جهانگردی افزایش تعداد توریست‌ها، تأثیری مثبت روی تعداد تروریست‌ها دارد و میزان تغییرات تروریست‌ها نسبت به زمان متناسب با تعداد جهانگردان بوده که ما این نسبت را با e نمایش می‌دهیم و بدیهی است که $e > 0$. از طرف دیگر نرخ رشد تروریسم رابطه منفی (معکوس) با هزینه‌های اجرایی دارد. این ارتباط را به $q(u_2)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین نرخ تغییرات تروریست‌ها نسبت به زمان به صورت زیر است:

$$x_2' = ex_1 - q(u_2).$$

بدون شک سرمایه‌گذاری در بخش زیربنایی جهانگردی و هزینه نگهداری آن‌ها همواره با محدودیت‌هایی همراه است. به عبارت دیگر توابع کنترل محدود هستند. فرض کنید $[a_1, b_1]$ و $[a_2, b_2]$، به ترتیب بازه‌هایی باشند که توابع کنترل u_1 و u_2 مقادیر خود را از آن اختیار می‌کنند. آنگاه با احتساب همه موارد فوق مدل ریاضی حاکم بر سیستم جهانگردی فوق به صورت زیر است:

$$\text{Maximize}\int_{0}^{\infty} e^{-\delta t}(ax_1-p(u_1)-bu_2)dt \tag{1}$$

$$subject\ to: x_1'=h(u_1,u_2)-dx_1 \tag{2}$$

$$x_2'=ex_1-q(u_2) \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &x_1(0)=T_0,\ \ x_2(0)=N_0,\\ &\qquad a_1\le u_1\le b_1,\ \ a_2\le u_2\le b_2,\\ &\lim_{t\to\infty} x_1(t)=T_1,\qquad \lim_{t\to\infty} x_2(t)=N_1, \end{aligned} \tag{4}$$

که در آن T_0 و N_0 به ترتیب تعداد توریست‌ها و تروریست‌ها در لحظه شروع بررسی سیستم و همچنین T_1 و N_1 تعداد آن‌ها را در حالت مطلوب و ایده‌آل نمایش می‌دهند.

مدل فوق یک مسأله کنترل بهینه با کنترل‌های کراندار می‌باشد که در بخش بعد به ارائه راه حل تحلیلی آن، با استفاده از اصل ماکزیمم پونتریاگین می‌پردازیم. آنگاه در بخش پایانی با استفاده از نظریه اندازه یک حل عددی آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

حل مسأله

تابع هامیلتونی برای سیستم کنترلی (۱) الی (۴) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} H=ax_1-p(u_1)-bu_2+\lambda_1[h(u_1,x_2)-dx_1]\\ +\lambda_2[ex_1-q(u_2)] \end{aligned}$$

که در آن λ_1 و λ_2، ضرایب لاگرانژ در تابع هامیلتونی هستند. بنابه اصل ماکزیمم پونتریاگین یکی از شرایط لازم درجه اول برای به دست آوردن ماکزیمم عبارتند از:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial u_1}=-p'(u_1)+\lambda_1\frac{\partial h}{\partial u_1}(u_1,x_2)=0,\\ &\frac{\partial H}{\partial u_2}=-b-\lambda_2\, q'(u_2)=0. \end{aligned} \tag{5}$$

همچنین معادلات الحاقی [۱۹] عبارتند از:

$$\frac{\partial H}{\partial x_1}=d\lambda_1-a-e\lambda_2=\lambda_1' \tag{6}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_2}=-\lambda_1\frac{\partial h}{\partial x_2}=\lambda_2'. \tag{7}$$

توابع کنترل بهینهٔ $u_1(t)$ و $u_2(t)$، متغیرهای وضعیت بهینهٔ $x_1(t)$ و $x_2(t)$، همچنین متغیرهای الحاقی (ضرایب لاگرانژ) از شش معادلهٔ (۲)، (۳) و (۵) الی (۷) به‌دست می‌آیند که با محاسبهٔ توابع کنترل بهینه u_1 و u_2، میزان سرمایه‌گذاری دولت در امور زیربنایی جهانگردی (گسترش مکان‌های توریستی و جذاب‌تر نمودن آن‌ها و غیره)، هزینهٔ نگهداری ($p(u_1)$) و همچنین هزینه‌های سرمایه‌گذاری اجرایی- امنیتی به طور کامل مشخص می‌شوند که با اجرای آن سود ناشی از این صنعت ماکزیمم خواهد شد. بدون شک حل دستگاه شش معادله دیفرانسیل غیرخطی فوق به سادگی امکان پذیر نیست، لذا در بخش بعد ابتدا مسألهٔ کنترل بهینه (۱) الی (۴) را به یک مسأله کنترل بهینه در نظریه اندازه تبدیل می‌کنیم. آنگاه جواب مسأله جدید را با جواب یک مسأله برنامه‌ریزی خطی با بعد متناهی تقریب کرده و با حل آن توابع کنترل بهینهٔ تقریبی را به صورت قطعه‌ای ثابت برای مسأله اصلی به دست می‌آوریم.

تعیین کنترل تقریباً بهینه به کمک نظریه اندازه

فرض کنید:

$$\begin{aligned} &f_0(t,x,u)=e^{-\delta t}(ax_1-p(u_1)-bu_2),\\ &u(t)=(u_1(t),u_2(t)),\\ &x(t)=(x_1(t),x_2(t)),\\ &g_2(t,x,u)=ex_1-q(u_2),\\ &g_1(t,x,u)=-dx_1+h(u_1,x_2),\\ &x^1=(T_1,N_1),\\ &U=[a_1,\ b_1]\times[a_2,\ b_2],\ x_0=(T_0,\ N_0),\\ &g_0(t,x,u)=(g_1(t,x,u),\ g_2(t,x,u)), \end{aligned}$$

همچنین A را به عنوان حجره‌ای در $R^{۲}$ در نظر می‌گیریم به طوری که:

$$x(t) \in A. \quad \forall t \in [۰, \infty)$$

در این صورت مسألهٔ کنترل بهینه (۱) الی (۴) را می‌توان به صورت کلی زیر نمایش داد:

$$\text{Maximize} \int_{۰}^{\infty} f_{۰}(t,x,u)dt \quad (۸)$$

$$subject\ \ to: x' = g_{۰}(t,x,u) \quad (۹)$$

$$\underset{t\to\infty}{Lim}\, x(t) = x^{۱}, \quad x(۰) = x_{۰},\ u \in U, \quad (۱۰)$$

که در آن $f_{۰}$ و $g_{۰}$ توابعی پیوسته روی $\Omega = [۰, \infty) \times A \times U$ هستند. با تغییر متغیر $t = \tan(\frac{\pi\tau}{۲})$، $y(\tau) = x(\tan(\frac{\pi}{۲}\tau))$،

$$v(\tau) = u(\tan(\frac{\pi}{۲}\tau))$$

و انتخاب توابع f و g به صورت زیر:

$$f(\tau,y,v) = -f_{۰}[\tan(\frac{\pi\tau}{۲}), x(\tan(\frac{\pi\tau}{۲})), u(\tan(\frac{\pi\tau}{۲}))],$$

$$g(\tau,y,v) = \frac{\pi}{۲}[۱+\tan^{۲}(\frac{\pi\tau}{۲})]g_{۰}(\tan(\frac{\pi\tau}{۲}), x(\tan(\frac{\pi\tau}{۲})), u(\tan(\frac{\pi\tau}{۲}))],$$

مسأله کنترل بهینه فوق به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$Minimize \int_J f(\tau,y,v)d\tau \quad (۱۱)$$

$$subject\ to:$$

$$y' = g(\tau,y,v), \qquad \tau \in J = [۰, ۱) \quad (۱۲)$$

$$y(۰) = y_{۰}, \quad \underset{\tau\to ۱}{Lim}\, y(\tau) = y^{۱}, \quad v \in U, \quad (۱۳)$$

که در آن $y_{۰} = x_{۰}$ و $y^{۱} = x^{۱}$؛ همچنین f و g توابعی پیوسته روی $Q = J \times A \times U$ هستند. یادآور می‌شویم که انتخاب تغییر متغیر $t = \tan(\frac{\pi}{۲}\tau)$ منحصر بفرد نیست. به عنوان نمونه می‌توان آن را به صورت $t:[۰, ۱) \to [۰, \infty)$ با ضابطه $t = \frac{\tau}{۱-\tau}$ انتخاب نمود.

فرض کنید تابع کنترل $v(\tau): J \to U$ اندازه‌پذیر باشد، $y(۰)$ را یک مسیر برای $v(۰)$ می‌گویند در صورتی که مطلقاً پیوسته بوده و در سیستم کنترلی (۱۲) صدق نماید. در این صورت مدار-کنترل $s(۰) = (y(۰), v(۰))$ را یک زوج قابل قبول گویند. اگر v تابع کنترل و y یک مدار برای آن باشد به طوری که $y(۰) = y_{۰}$ و $\underset{\tau\to ۱}{Lim}\ \ y(\tau) = y^{۱}$، مجموعه همه زوج‌های قابل قبول را به W نمایش می‌دهیم. حال تابع $I: W \to R$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I(s) = \int_J f(\tau,y,v)d\tau$$

بنابراین مسأله کنترل بهینه (۱۱) الی (۱۳) به مسأله کنترل بهینه کلاسیک زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} &Minimize \quad I(s) \\ &subject\ to: s \in W \end{aligned} \quad (۱۴)$$

اکنون مسأله کنترل بهینه فوق را به یک مسأله کنترل بهینه در نظریه اندازه تبدیل می‌کنیم. فرض B یک مجموعه باز در $R^{۳}$ شامل $J \times A$ بوده و $C'(B)$ مجموعهٔ همه توابع پیوسته مشتق‌پذیر روی B باشد که خود و مشتقات جزئی مرتبه اول آن‌ها روی B کراندار هستند. برای هر $\phi \in C'(B)$ تابع ϕ^g را روی Q به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\phi^g(\tau,y,v) = \phi_y(\tau,y)g(\tau,y,v) + \phi_\tau(\tau,y)$$

در این صورت داریم:

$$\int_J \phi^g(\tau,\ y,\ v)d\tau = \phi(۱,\ y^{۱}) - \phi(۰,\ y_{۰}) \equiv \Delta\phi. \quad (۱۵)$$

در حالت خاص اگر $h(t,y,v)$ یک تابع حقیقی پیوسته روی Q باشد که فقط به زمان وابسته است آنگاه داریم:

$$\int_J h(\tau,y,v)\,d\tau = a_h, \tag{۱۶}$$

که درآن عدد a_h مقدار انتگرال لبگ تابع h روی J است.

اکنون فرض کنید J° نقاط درونی J و $D(J^\circ)$ فضای همه توابع حقیقی بی‌نهایت مرتبه مشتق‌پذیر با تکیه‌گاه فشرده در J° باشد. توابع ψ_j، $j=1,2$، را روی Q به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi_j(\tau,y,v) = y_j\varphi'(\tau)+g_j(\tau,y,v)\varphi(\tau) \qquad \forall\varphi\in D(J^\circ) \tag{۱۷}$$

که g_j و y_j برای $j=1,2$، به ترتیب، مؤلفه‌های توابع g و y در(۱۲) می‌باشند. در این صورت از انتگرال‌گیری جزء به جزء در رابطه (۱۷) خواهیم داشت:

$$\int_J \psi_j(\tau,y,v)\,d\tau = 0 \qquad j=1,2 \tag{۱۸}$$

معادلات (۱۵)، (۱۶) و (۱۸) خواص زوج‌های قابل قبول را بیان می‌کنند. اکنون نظیر هر زوج قابل قبول s، نگاشت:

$$\Lambda_s : F \to \int_J F(\tau,y,v)\,d\tau$$

که یک تابعی خطی مثبت بر فضای $C(Q)$ بوده که $C(Q)$ فضای توابع حقیقی پیوسته روی Q است. بنابراین نظیر هر زوج قابل قبول s، تابعی خطی مثبت نظیر Λ_s چنان موجود است که در خواص زیر صدق می‌کند:

$$\Lambda_s(\phi^g) = \Delta\phi, \quad \forall\phi\in C'(B); \tag{۱۹}$$

$$\Lambda_s(h) = a_h, \quad \forall h\in C_1(Q); \tag{۲۰}$$

$$\Lambda_s(\psi_j) = 0, \quad \forall\varphi_j\in D(J^\circ), \quad j=1,2 \tag{۲۱}$$

جایی که $C_1(Q)$ آن زیر فضایی از $C(Q)$ است که توابع فقط وابسته به زمان را شامل می‌باشد.

فرض کنید W_1 مجموعه همه تابعی‌های خطی مثبت روی $C(Q)$ باشد که در خواص (۱۹) الی (۲۱) صدق می‌کنند، بنا به قضیه نمایشی ریس[1] [۷] نظیر هر یک از این تابعی‌ها یک اندازه یکتای رادن مثبت روی Q چنان موجود است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\mu(\phi^g) = \Delta\phi, \quad \forall\phi\in C'(B); \tag{۲۲}$$

$$\mu(h) = a_h, \quad \forall h\in C_1(Q); \tag{۲۳}$$

$$\mu(\psi_j) = 0, \quad \forall\varphi_j\in D(J^\circ), \ j=1,2. \tag{۲۴}$$

مجموعه همه این چنین اندازه‌هایی را که در شرایط (۲۱) الی (۲۴) صدق می‌کنند به W_1 نمایش می‌دهیم. بنابراین با انتخاب تابعی خطی $\varphi: W_1\to R$ با ضابطه:

$$\varphi(\mu)=\int_Q f\,d\mu=\mu(f)$$

مسأله کنترل بهینه (۱۴) به مسأله بهینه‌سازی جدیدی در نظریه اندازه، یعنی مینیمم تابعی φ روی W_1 تبدیل می‌شود که برای حل آن قضیه زیر را داریم:

قضیهٔ ۱-۴: مسأله بهینه‌سازی یعنی:

$$\begin{aligned} &Minimize \quad \varphi(\mu) \\ &subject\ \ to: \mu\in W_1 \end{aligned} \tag{۲۵}$$

دارای جوابی مانند $\mu^*\in W_1$ می‌باشد (برهان قضیه فوق را می‌توان در فصل دوم [۷] مشاهده نمود).

بدیهی است که جواب مسأله کنترل بهینه (۲۵)، یعنی $\mu^*(f)$، همان جواب بهینه مسأله اصلی است که برای محاسبه مقدار تقریبی آن به صورت زیر عمل می‌کنیم.

1- Riesz representation theorem

در ابتدا طول هر یک از بازه‌های مربوط به مؤلفه‌های τ، $y_۱$، $y_۲$، $u_۱$ و $u_۲$ را به تعدادی زیربازه مساوی تقسیم می‌کنیم. در این صورت Q به N زیر حجره Q_j افراز می‌شود $(j=۱,۲,...,N)$. نقطه $Z_j=(\tau_j,y_{۱j},y_{۲j},u_{۱j},u_{۲j})$ را در ناحیه Q_i انتخاب می‌کنیم و فرض می‌کنیم $\sigma=\{Z_j,: j=۱,۲,...,N\}$، در این صورت σ یک زیرمجموعه تقریباً چگال در Q است. با انتخاب اعداد ثابت و به اندازه کافی بزرگ N، $M_۱$، $M_۲$ و $M_۳$ مقدار تقریبی برای $\mu^*(f_۰)$، جواب مسأله برنامه‌ریزی خطی با بعد متناهی زیر است (فصل چهارم از [۷]). بدیهی است که اگر $M_۱, M_۲, M_۳\to\infty$ آنگاه جواب مسأله اصلی با مسأله جدید یکی است.

$$Minimize \quad \sum_{j=۱}^{N}\alpha_j f(z_j), \tag{۲۶}$$

$$subject\ to:$$

$$\sum_{j=۱}^{N}\alpha_j \phi_j^g(z_j)=\Delta\phi_i, \quad i=۱,۲,...,M_۱, \tag{۲۷}$$

$$\sum_{j=۱}^{N}\alpha_j h_i(\tau_j)=a_i, \quad i=۱,۲,...,M_۲, \tag{۲۸}$$

$$\sum_{j=۱}^{N}\alpha_j \Psi_{ki}(z_j)=۰, \quad i=۱,۲,...,M_۳ \quad K=۱,۲ \tag{۲۹}$$

$$\alpha_j\ge ۰, \qquad j=۱,۲,...,M_۲ \tag{۳۰}$$

که در آن $a_i=\int_J h_i(\tau)dt$، برای $i=۱,۲,...,M_۲$. برای سادگی بیشتر در محاسبات می‌توان توابع h_i، ϕ_i و ψ_{ki} را به صورت زیر انتخاب نمود:

$$\phi_i=\begin{cases} y_۱^k & i=۲k-۱ \\ y_۲^k & i=۲k, \end{cases} \qquad i=۱,۲,...,M_۱,$$

$$h_i(\tau)=\begin{cases} ۱ & \tau\in[\frac{i-۱}{M_۲},\frac{i}{M_۲}) \\ & i=۱,۲,...,M_۲. \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

همچنین توابع φ_i، که از آن برای تعریف توابع ψ_{ki} در رابطه (۱۷) استفاده شده است را می‌توان به صورت زیر انتخاب نمود:

$$\varphi_i=\begin{cases} \sin(۲\pi k\tau) & i=۲k-۱ \\ ۱-\cos(۲\pi k\tau) & i=۲k \end{cases} \qquad i=۱,۲,...,M_۳.$$

با فرض $M=M_۱+M_۲+۲M_۳$، مسأله برنامه‌ریزی خطی با بعد متناهی (۲۶) الی (۳۰) دارای N متغیر و M مجهول می‌باشد. با حل آن و محاسبه ضرایب α_j برای $j=۱,۲,...,N$، می‌توان با روش پیشنهادی توسط روبیودر [۷] تابع کنترل تقریبی را به صورت تابعی قطعه‌ای ثابت محاسبه نمود.

در خاتمه یادآور می‌شویم که روش فوق(معروف به روش نشاندن) برای حل مسائل کنترل بهینه کلی‌تر وقتی که $y=(y_۱,y_۲,...,y_n)$ و $u=(u_۱,u_۲,...,u_m)$ باشند نیز به طور مشابه قابل تعمیم است.

مثال: مسأله بهینه‌سازی

$$Minimize \int_۰^{\infty}(\frac{۱}{۲}x_۱^۲+۲u^۲)dt,$$
$$subject\ to:$$
$$x_۱'(t)=x_۲(t),$$
$$x_۲'(t)=-x_۲(t)+u,$$
$$x_۱(۰)=x_۲(۰)=۰/۱,$$
$$\lim_{t\to\infty}x_۱(t)=\lim_{t\to\infty}x_۲(t)=۰,$$
$$|u|\le ۱;$$

بـا اسـتفاده از اصـل مـاکزیمم پونتریـاگین دارای جـوابی تحلیلی به صورت زیر است. [۱۷]

$$x_{۱}(t)=[۰/۱+(۰/۱+\frac{۰/۱}{\sqrt{۲}})t]\exp(\frac{-t}{\sqrt{۲}}),$$

$$x_{۲}(t)=[۰/۱-(۰/۱+\frac{۰/۱}{\sqrt{۲}})\frac{t}{\sqrt{۲}}]\exp(\frac{-t}{\sqrt{۲}}).$$

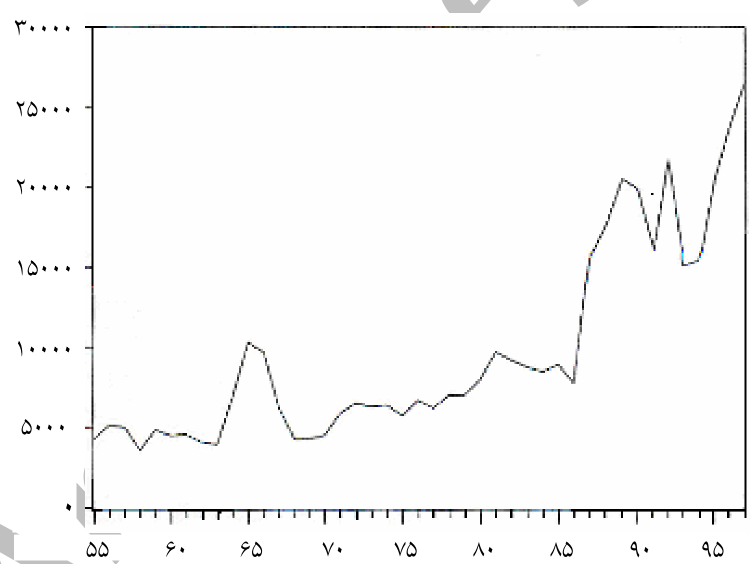
اکنون برای حل مسأله فوق بـا اسـتفاده از نظریـه اندازه، فرض می‌کنیم:

$$M_{۱}=۲,\ \ M_{۲}=۱۵,\ \ M_{۳}=۴,$$

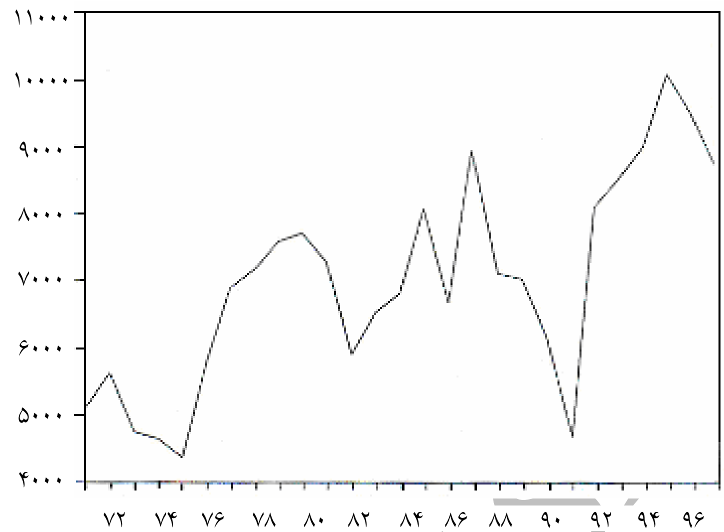
$$A=[۰,\ ۰/۱]\times[-۰/۱,\ ۰/۱],$$

$$U=[-۱,\ ۱]\ ,\quad J=[۰,\ ۰/۰۹۹]\ .$$

همچنین بازه J به ۱۵ و U را به ۱۰ قسمت و همچنـین حجره A را به ۱۰۰ قسمت مساوی تقسیم مـی‌کنـیم. لـذا نتیجه می‌شود $N=۱۵۰۰۰$. در این صورت با اسـتفاده از نظریه اندازه مقدار بهینه تابع ارزش(هدف) برابر بـا ۰/۱۱ بوده و نمودار توابع تقریبی کنتـرل و مـدارهای بهینـه در نمودارهای ۳ الی ۵ رسم شده‌اند [۱۸].

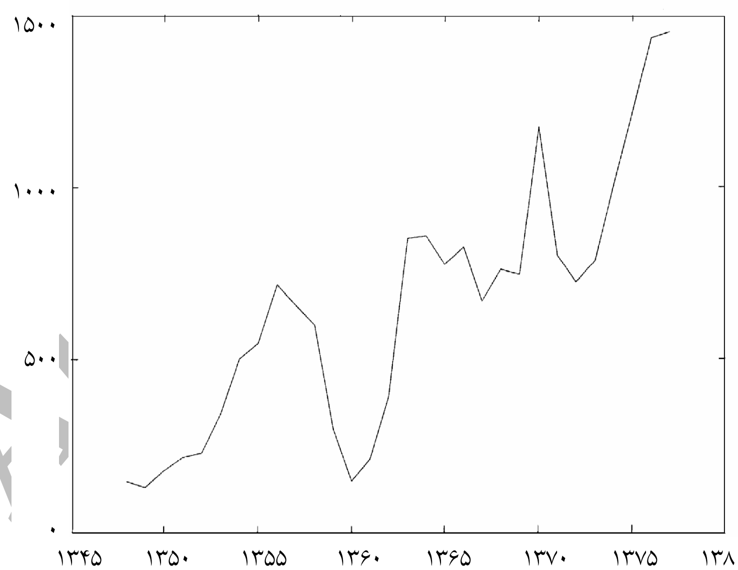


نمودار ۱- آمار ورود جهانگردان به مصر طی سال‌های ۱۹۵۵-۱۹۹۷ (به هزار نفر)
(منبع: بولتن اقتصادی سالانه بانک مصر [۳])



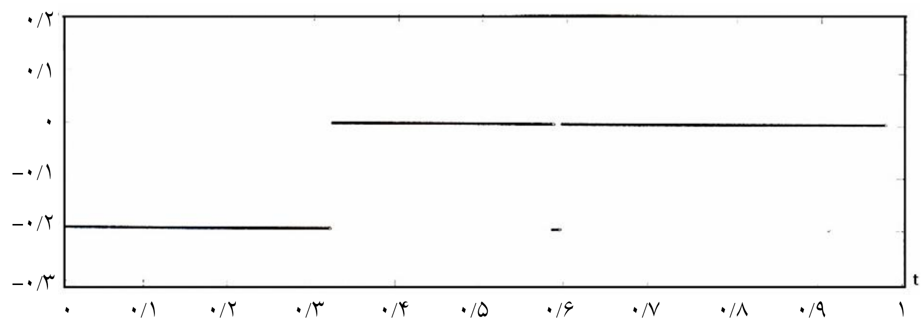
نمودار ۲- آمار ورود جهانگردان به اسرائیل طی سال‌های ۱۹۵۵- ۱۹۹۷

(منبع: وزارت جهانگردی اسرائیل [۳])

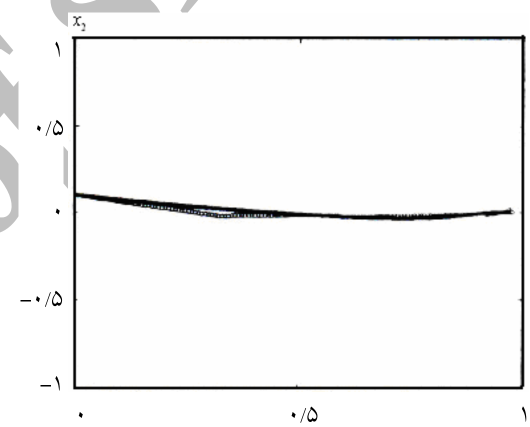


نمودار ۳- آمار ورود جهانگردان به ایران طی سال‌های ۱۳۴۸-۱۳۷۵(به هزار نفر)

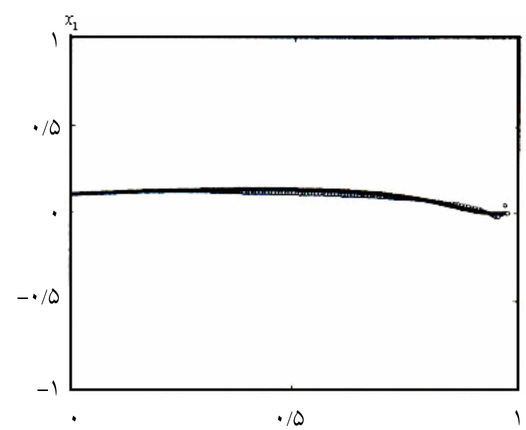
(منبع: بخش آمار و اطلاعات سازمان ایرانگردی و جهانگردی [۱])



نمودار ۴- کنترل بهینه تقریبی



نمودار ۵- جواب دقیق وتقریبی x_2



نمودار ۶- جواب دقیق وتقریبی x_1

مراجع

[۱] سینایی، و، گردشگری در ایران، عملکردها و چالش‌ها، مرکز پژوهش‌های مجلس شورای اسلامی، شماره ۶، ۱۳۸۲.

[2] Diamond, J., *"Tourism's Role in Economic Development: The Casse Reexamined"*. Economic Development and Culturoll Change, 25 (1977) 539-553.

[3] Edington, W. and Redman, M., *"Economics and Tourism Annals of Tourism"*. Research, 18 (1991) 41-56.

[4] Richter, L.K. and Waugh, W.L., *"Terrorism and Tourism as Logical companions"*. Tourism Management, (1986) 230-238.

[5] Conant, J., Clar, T., Burnett, J.J. and Zank, G., *"Terroism and Travel: Managing the Unmanageable"*. Journal of Travel Research, 26 (1988) 16-20.

[6] Ryan, C., *"Crime, Violence, Terrorism, and Tourism: An Aceidental or Intrinsic Relation ship?"*. Tourism Management, 14 (1993) 173-183.

[7] Rubio, J.E., *"Control and Optimization: The Linear Treatment of Nonlinear Problems"*. Manchester, Manchester University Press, (1986).

[8] Alavi, S.A., Kamyad, A.V. and Farahi, M.H., *"Optimal Control of an Inhomogeneous Heat Problem by Using Measure Theory"*. Iranian International Journal Science, 1 (2000) 59-78.

[9] Alavi, S.A., Kamyad, A.V. and Farahi, M.H., "Optimal *Control of an Inhomogeneous Vawe Problem With Internal Control and their Numerical"*. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 23 (1997) 9-36.

[10]Alavi, S.A., Kamyad, A.V. and Farahi, M.H., *"Solving Nonlinear Ordinary Differential Equation as a Control Problem by Using Measure Theory"*. Scientia Iranica, 7(2000) 62-69.

[11]Alavi, S.A., Kamyad, A.V. and Gachpazan, M., *"The Optimal Control for Bolza Problem by Using Measure Theory"*. International Journal of Engineering Seience, 12 (2001) 100-111.

[12]Alavi, S.A., The Optimal Control of an Inhomogeneous Wave and Heat Problem, Ph.D. Thesies, Ferdowsi University, (1999).

[13]Farahi, M.H., The boundary Control of the Wave Equation. Ph.D. Thesis, Leeds University, (1996).

[14]Farahi, M.H., Rubio, J.E. and Wilson, D.A., The Optinal Control of the Linear Wave Equation, International Journal of Control, 63 (1996) 833-848.

[15]Farahi, M.H., Rubio, J.E. and Wilson, D.A., The global Control of a Nonlinear Wave Equation, International Journal of Control, 65 (1996) 1-15.

[16]Kamyad, A.V., Rubio, J.E. and Wilson, D.A., The Optimal Control of the Multidimensional Diffusion Equation Journal of Optimization Theory and Applications, 70 (1991) 191-209.

[17]Treves, F., *"Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels"*. New York, Academic Press, (1967).

[18]Effati, S., Kamyad, A.V. and Kamyabi-Col, R.A., *"On Infinite-Horizon Optimal Control Problems"*. Journal of Analysis and Applications, 19, 1 269-278.

[19]Pinch, E.R., *"Optimal Control and the Calculus of Variations"*, Oxford Sci. Publ. (1995).

[20]Hartl, R.E. and Feichtinger, G., "Optimal Control of Economic Processes: Applications of the Maximum Principle in Economics, de Gruyter, Berlin. Germany, (1986).