

## مروری

نگرشی بر  $z$ -ایدآل‌ها از پیدایش تا به امروز

فریبرز آذرپناه

گروه ریاضی - دانشگاه شهید چمران اهواز

پست الکترونیکی: [azarpanah@ipm.ir](mailto:azarpanah@ipm.ir)

## چکیده

در این مقاله نگرشی بر مبحث " $z$ -ایدآل‌ها" با قدمت ۵۰ ساله داشته‌ایم. سیر تکاملی  $z$ -ایدآل‌ها را در هر حلقه و به ویژه در حلقه توابع پیوسته  $C(X)$  که معرفی مفهوم  $z$ -ایدآل از آن جا آغاز شده است مطالعه می‌کنیم. همه ویژگی‌های  $z$ -ایدآل‌ها و ارتباط آن‌ها با ایدآل‌های اول مطرح و بالاخره با چند واقعیت و نتیجه،  $z$ -ایدآل‌ها به عنوان پل‌های ارتباطی میان خواص توپولوژیکی فضای  $X$  و خواص جبری حلقه  $C(X)$  شناخته شده‌اند.

واژه‌های کلیدی:  $z$ -ایدآل،  $z^\circ$ -ایدآل،  $rez$ -ایدآل، ایدآل اول، ایدآل غیرعادی، حلقه توابع پیوسته،  $F$ -فضا، تقریباً  $P$ -فضا و  $\partial$ -فضا

## مقدمه

دیگری با کمک ابزار جبری نیز بیان کرد. در چنین وضعیتی است که می‌توان بین خواص جبری حلقه  $C(X)$  و خواص توپولوژیکی  $X$  ارتباط برقرار کرد که یکی از اهداف مهم مطالعه حلقه‌های توابع پیوسته است. یکی از این ایدآل‌ها با این ویژگی ممتاز،  $z$ -ایدآل است که ابتدا توسط کهلز [۳] و در حلقه‌های توابع پیوسته معرفی شد. ارتباط این ایدآل‌ها با ایدآل‌های مهم در حلقه‌ها مانند ایدآل‌های اول و ماکسیمال نیز توسط کهلز [۴ و ۵] ظاهر شد و سپس این ارتباط‌ها در مراجع [۶-۱۰] قوت بیش‌تری گرفت. در پیگیری خواص  $z$ -ایدآل‌ها متوجه می‌شویم که این دسته از ایدآل‌ها چه رفتار سازگار و زیبایی با ایدآل‌های اول دارند و زمانی که خواننده حاصل

شاید بتوان مراجع [۱ و ۲] را آغاز مطالعه حلقه‌های توابع پیوسته دانست. این حلقه‌ها را با  $C(X)$  نشان می‌دهیم که متشکل از توابع حقیقی روی فضاها کاملاً منظم و هاسدورف با دو عمل جمع و ضرب معمولی روی توابع هستند. علاوه بر ویژگی‌هایی جبری که هر حلقه‌ای داراست، این حلقه‌ها به واسطه ویژگی‌های توپولوژیکی‌شان اهمیت دارند. بسیاری از ایدآل‌ها را در این حلقه‌ها می‌توان به کمک مفاهیم توپولوژیکی ساخت که این امر در هر حلقه‌ای میسر نیست. این نوع ایدآل‌ها وقتی اهمیت پیدا می‌کنند که بتوان آن‌ها را در هر حلقه

پیوند این ایدآل‌ها را با ایدآل‌های اول و اولیه می‌بیند بی‌شک شگفت‌زده خواهد شد. شاید به جرأت بتوان گفت که هیچ دسته‌ای از ایدآل‌ها چنین خوش رفتار و مانوس بروز نکرده است. حال آن که با توجه به عمر کوتاه پنجاه ساله این ایدآل‌ها، بدون شک در آن‌ها هنوز زیبایی‌های نهفته‌ای وجود دارد که بشر به آن‌ها دست نیافته است.

گرچه  $z$ -ایدآل‌ها به لحاظ ماهیت توپولوژیکی شان بیش‌تر در حلقه‌های  $C(X)$  مورد مطالعه قرار می‌گیرند، ولی از آن‌جا که با مفاهیم جبری نیز قابل بیان هستند، در حلقه‌های کلی‌تر نیز قابل بررسی‌اند. این بررسی ابتدا در مرجع [۱۱] و در حلقه‌های کاهشی انجام و سپس ارتباط این ایدآل‌ها با ایدآل‌های اول حلقه مطالعه شد. به دلیل همین ماهیت، در حلقه‌های  $C(X)$  نمونه‌های فراوانی از  $z$ -ایدآل‌ها را می‌توان دید، ایدآل‌های ماکسیمال و ایدآل‌های اول مینیمال در حلقه‌های توابع پیوسته،  $z$ -ایدآل هستند و با کمک مفاهیم توپولوژیکی  $X$ ، به سهولت  $z$ -ایدآل‌های بی‌شماری در  $C(X)$  ساخته می‌شود. علاوه بر آن، چون در هر حلقه‌ای اشتراک هر تعداد  $z$ -ایدآل یک  $z$ -ایدآل است و در حلقه  $C(X)$  مجموع  $z$ -ایدآل‌ها نیز  $z$ -ایدآل می‌باشد، این امکان فراهم می‌شود تا برای هر ایدآل در  $C(X)$  کوچک‌ترین  $z$ -ایدآل شامل آن و بزرگ‌ترین  $z$ -ایدآل مشمول در آن را نیز بسازیم. این موضوع در مراجع [۱۳-۱۱] مطرح و کاربردهای آن از جمله ترکیب  $z$ -ایدآل‌ها با ایدآل‌های اول و اولیه مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. واژه " $\sqrt{z}$ -ایدآل" که همان  $z$ -ایدآل بودن رادیکال یک ایدآل است، نخست در مرجع [۱۲] به کار برده شد و در همین مأخذ و مرجع [۱۴] به دو روش مختلف ثابت شده است که مفاهیم " $z$ -ایدآل" و " $\sqrt{z}$ -ایدآل" در  $C(X)$  یکسانند. با کمک این مفهوم، نتایج شگفت‌انگیز حاصل از ترکیب  $z$ -ایدآل‌ها و ایدآل‌های اول در  $C(X)$

تعمیم داده می‌شوند. نوع خاصی از  $z$ -ایدآل‌ها، شمارا تولید شده‌ها هستند که از سال ۱۹۶۰ توسط گیلمن در مرجع [۱۵] مطرح و سپس در مراجع [۱۸-۱۶] دنبال شد. حاصل این چهار مقاله، شناسایی  $z$ -ایدآل‌های شمارا تولید شده در  $C(X)$  برای فضاهای شمارای نوع اول، نرمال و فشرده موضعی بوده است. ویژگی‌های این نوع  $z$ -ایدآل‌ها، حقایقی در خصوص  $z$ -ایدآل‌های اول شمارا تولید شده در  $C(X)$  را آشکار می‌سازد که از اهمیت خاصی برخوردار است.  $z^\circ$ -ایدآل‌ها هم نوع دیگری از  $z$ -ایدآل‌ها هستند که ابتدا در حلقه‌های کاهشی با عنوان  $d$ -ایدآل در مرجع [۱۹] مورد مطالعه قرار گرفت، سپس در مراجع [۲۰ و ۲۱] پیگیری شد و نتایج مشابه با مبحث  $z$ -ایدآل‌ها در حلقه‌های کاهشی به دست آمد.  $z^\circ$ -ایدآل‌ها در  $C(X)$  نیز ابتدا در [۲۲] و سپس در مراجع [۲۳ و ۲۴] بررسی شد. برخلاف  $z$ -ایدآل‌ها، مجموع  $z^\circ$ -ایدآل‌ها در  $C(X)$  لزوماً  $z^\circ$ -ایدآل‌ها نیست، بنابراین طبیعی است فضاهای  $X$  به گونه‌ای شناسایی شوند که این امر نیز تحقق یابد تا بتوانیم روند مشابهی را که در مورد  $z$ -ایدآل‌ها طی شد برای  $z^\circ$ -ایدآل‌ها نیز دنبال کنیم. این شناسایی در مراجع [۱۹ و ۲۳] انجام شد و با کمک آن نتایج شگرفی از ترکیب  $z^\circ$ -ایدآل‌ها و ایدآل‌های اول در مراجع [۱۲ و ۲۴] حاصل گشت.  $z$ -ایدآل‌ها در حلقه‌های مرتبط با  $C(X)$  مثل زیرحلقه‌های  $C(X)$  و در حالت خاص،  $z$ -ایدآل‌ها در ایدآل‌های  $C(X)$ ، دو مقوله دیگر است که مطالعه آن‌ها به نظر ضروری می‌رسد.  $z$ -ایدآل‌ها در یک ایدآل دیگر  $C(X)$  در مرجع [۲۵] با واژه " $z$ -ایدآل نسبی" معرفی شده است. خانواده  $z$ -ایدآل‌های نسبی شامل دسته  $z$ -ایدآل‌هاست و  $z$ -ایدآل‌های نسبی وجود دارند که  $z$ -ایدآل نیستند. مجموع دو  $z$ -ایدآل نسبی نیز لزوماً  $z$ -ایدآل نسبی نیست و طبعاً نیاز به شناسایی فضاهای  $X$

تعمیم داده می‌شوند. نوع خاصی از  $z$ -ایدآل‌ها، شمارا تولید شده‌ها هستند که از سال ۱۹۶۰ توسط گیلمن در مرجع [۱۵] مطرح و سپس در مراجع [۱۸-۱۶] دنبال شد. حاصل این چهار مقاله، شناسایی  $z$ -ایدآل‌های شمارا تولید شده در  $C(X)$  برای فضاهای شمارای نوع اول، نرمال و فشرده موضعی بوده است. ویژگی‌های این نوع  $z$ -ایدآل‌ها، حقایقی در خصوص  $z$ -ایدآل‌های اول شمارا تولید شده در  $C(X)$  را آشکار می‌سازد که از اهمیت خاصی برخوردار است.  $z^\circ$ -ایدآل‌ها هم نوع دیگری از  $z$ -ایدآل‌ها هستند که ابتدا در حلقه‌های کاهشی با عنوان  $d$ -ایدآل در مرجع [۱۹] مورد مطالعه قرار گرفت، سپس در مراجع [۲۰ و ۲۱] پیگیری شد و نتایج مشابه با مبحث  $z$ -ایدآل‌ها در حلقه‌های کاهشی به دست آمد.  $z^\circ$ -ایدآل‌ها در  $C(X)$  نیز ابتدا در [۲۲] و سپس در مراجع [۲۳ و ۲۴] بررسی شد. برخلاف  $z$ -ایدآل‌ها، مجموع  $z^\circ$ -ایدآل‌ها در  $C(X)$  لزوماً  $z^\circ$ -ایدآل‌ها نیست، بنابراین طبیعی است فضاهای  $X$  به گونه‌ای شناسایی شوند که این امر نیز تحقق یابد تا بتوانیم روند مشابهی را که در مورد  $z$ -ایدآل‌ها طی شد برای  $z^\circ$ -ایدآل‌ها نیز دنبال کنیم. این شناسایی در مراجع [۱۹ و ۲۳] انجام شد و با کمک آن نتایج شگرفی از ترکیب  $z^\circ$ -ایدآل‌ها و ایدآل‌های اول در مراجع [۱۲ و ۲۴] حاصل گشت.  $z$ -ایدآل‌ها در حلقه‌های مرتبط با  $C(X)$  مثل زیرحلقه‌های  $C(X)$  و در حالت خاص،  $z$ -ایدآل‌ها در ایدآل‌های  $C(X)$ ، دو مقوله دیگر است که مطالعه آن‌ها به نظر ضروری می‌رسد.  $z$ -ایدآل‌ها در یک ایدآل دیگر  $C(X)$  در مرجع [۲۵] با واژه " $z$ -ایدآل نسبی" معرفی شده است. خانواده  $z$ -ایدآل‌های نسبی شامل دسته  $z$ -ایدآل‌هاست و  $z$ -ایدآل‌های نسبی وجود دارند که  $z$ -ایدآل نیستند. مجموع دو  $z$ -ایدآل نسبی نیز لزوماً  $z$ -ایدآل نسبی نیست و طبعاً نیاز به شناسایی فضاهای  $X$

(پ)  $b \in M_a$  اگر و تنها اگر  $M_b \subseteq M_a$  اگر و تنها اگر  $\mathcal{M}_a \subseteq \mathcal{M}_b$ .

۲-۱ تعریف: ایدآل  $I$  در حلقه  $R$  را یک  $z$ -ایدآل می‌نامیم، هرگاه برای هر  $a \in I$ ،  $M_a \subseteq I$  با استفاده از گزاره ۱-۱، تعریف‌های معادل دیگری به شرح زیر برای  $z$ -ایدآل‌ها می‌توان بیان کرد.

۳-۱ قضیه: هرگاه  $I$  یک ایدآل در حلقه  $R$  باشد، آن‌گاه گزاره‌های زیر معادلند:

(الف)  $I$  یک  $z$ -ایدآل است.

(ب) اگر  $a \in I$ ،  $b \in R$  و  $M_b \subseteq M_a$ ، آن‌گاه  $b \in I$ .

(پ) اگر  $a \in I$ ،  $b \in R$  و  $\mathcal{M}_a \subseteq \mathcal{M}_b$ ، آن‌گاه  $b \in I$ .

(ت)  $I = \sum_{a \in I} M_a$ .

از تعریف‌ها چنین برمی‌آید که گردایه  $z$ -ایدآل‌ها شامل  $\mathcal{M}$  است و اشتراک هر تعداد  $z$ -ایدآل یک  $z$ -ایدآل است. به این ترتیب هر ایدآل ماکسیمال و همچنین برای هر  $a \in R$ ، ایدآل  $M_a$  و در حالت خاص  $M = J(R)$  نیز یک  $z$ -ایدآل می‌باشد. در حقیقت  $J(R)$  کوچک‌ترین  $z$ -ایدآل در  $R$  است، به این معنی که هر  $z$ -ایدآل در  $R$  شامل  $J(R)$  می‌باشد. از این رو ساختار  $z$ -ایدآل‌های حلقه  $R$  همان ساختار  $z$ -ایدآل‌های  $R/J(R)$  است و بدین سان شرط  $J(R) = (\circ)$  را بی‌هیچ کاستی می‌توان در نظر گرفت. از این که اشتراک همه  $z$ -ایدآل‌های شامل یک ایدآل، خود  $z$ -ایدآل می‌باشد، پس هر ایدآل  $I$  در یک کوچک‌ترین  $z$ -ایدآل قرار دارد. کوچک‌ترین  $z$ -ایدآل شامل  $I$  را با  $I_z$  نمایش می‌دهیم. آشکار است که اگر  $I$  یک  $z$ -ایدآل باشد، آن‌گاه  $I_z = I$ . با استفاده از این تعریف، نتایج زیر به سادگی به دست می‌آید.

داریم تا مجموع  $z$ -ایدآل‌های نسبی در  $C(X)$  یک  $z$ -ایدآل نسبی باشد.  $z$ -ایدآل‌های نسبی مبحث جدیدی است که به تازگی در مرجع [۲۵] آغاز شده و هنوز ناشناخته‌های فراوانی در آن وجود دارد. در بخش‌های بعد سیر تکاملی  $z$ -ایدآل‌ها در پنجاه سال گذشته را با جزئیات بیش‌تری ارائه خواهیم داد و تأثیر نقش  $z$ -ایدآل‌ها را به عنوان پل‌های ارتباطی در برقراری ارتباط خواص جبری  $C(X)$  و خواص توپولوژیکی  $X$  نشان خواهیم داد. در پایان مقدمه، برای آگاهی از مفاهیم جبری که در این مقاله به کار گرفته شده‌اند، خواننده را به مراجع [۲۶ و ۲۷] و برای اطلاع از مفاهیم توپولوژی خواننده را به مراجع [۲۸-۳۱] ارجاع می‌دهیم.

### ۱- $z$ -ایدآل‌ها در حلقه‌های یک‌دار تعویض‌پذیر

برای مطالعه  $z$ -ایدآل‌ها، ابتدا  $R$  را یک حلقه تعویض‌پذیر یک‌دار فرض می‌کنیم و یادآور می‌شویم که اشتراک همه ایدآل‌های ماکسیمال در  $R$ ، جاکسون  $R$  نامیده می‌شود که آن را با  $J(R)$  نمایش می‌دهیم. به زودی خواهیم دید که برای مطالعه  $z$ -ایدآل‌ها، شرط  $J(R) = (\circ)$  را نیز می‌توان بی‌کم و کاست در نظر گرفت. اگر  $\mathcal{M}$  را گردایه همه ایدآل‌های ماکسیمال در  $R$  فرض کنیم، آن‌گاه برای هر  $a \in R$  تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{M}_a = \{M \in \mathcal{M} : a \in M\}, \quad M_a = \bigcap \mathcal{M}_a = \bigcap_{a \in M \in \mathcal{M}} M$$

اکنون گزاره زیر به سادگی و با توجه به تعریف بالا، اثبات می‌شود.

۱-۱ گزاره: اگر  $a, b \in R$ ، آن‌گاه عبارت‌های زیر برقرارند.

(الف)  $M_a \cup M_b = M_{ab}$  و  $M_a \cap M_b = M_{ab}$

(ب) برای هر  $n \in \mathbb{N}$  و  $M_{a^n} = M_a$  و  $M_{a^n} = M_a$

۴-۱ گزاره: فرض می‌کنیم  $I$  و  $J$  دو ایدال در حلقه  $R$

باشند، در این صورت داریم:

$$(الف) \quad I \subseteq \sqrt{I} \subseteq I_Z$$

$$(ب) \quad \text{اگر } I \subseteq J, \text{ آن گاه } I_Z \subseteq J_Z$$

$$(پ) \quad \text{برای هر } n \in \mathbb{N}, (I^n)_Z = I_Z^n$$

$$(ت) \quad (I \cap J)_Z \subseteq I_Z \cap J_Z$$

$$(ث) \quad (I + J)_Z = (I_Z + J_Z)_Z$$

برابری  $(I \cap J)_Z = I_Z \cap J_Z$  لزوماً

درست نیست، مثلاً می‌توان حلقه  $Z_{12}$  و ایدال‌های اصلی

$I = (4)$  و  $J = (6)$  را در نظر گرفت. در این صورت

$$(و) \quad (I \cap J)_Z = I \cap J = (0) \text{ حال آن که}$$

$$(0) \neq I_Z \cap J_Z = M_4 \cap M_6 = M_2 \cap M_3 \neq (0)$$

کمک گزاره بالا، نتایج زیر حاصل می‌شود:

۵-۱ نتیجه: (الف) - هر  $Z$ -ایدال حلقه  $R$  برابر با اشتراک

ایدال‌های اول مینیمال حلقه  $R$  روی  $I$  است. به عبارت

دیگر، هر  $Z$ -ایدال نیم-اول است.

(ب)- اگر  $I$  یک ایدال در  $R$  و  $I^n, n \in \mathbb{N}$  یک  $Z$ -ایدال

باشد، آن گاه  $I$  نیز یک  $Z$ -ایدال است.

قضیه زیر که در مرجع [۱۳] اثبات شده است،

نشان می‌دهد که هر ایدال اول مینیمال روی یک  $Z$ -ایدال،

$Z$ -ایدال است.

۶-۱ قضیه: فرض می‌کنیم  $P$  یک ایدال اول است و در

گردایه همه ایدال‌های اول شامل  $Z$ -ایدال  $I$  در حلقه  $R$

مینیمال می‌باشد. در این صورت  $P$  یک  $Z$ -ایدال است.

با توجه به این که  $J(R) = (0)$  در حلقه  $R$  یک

$Z$ -ایدال است، نتیجه زیر آشکار می‌باشد.

۷-۱ نتیجه: هر ایدال اول مینیمال در یک حلقه  $R$ ، یک  $Z$ -

ایدال است.

عکس قضیه ۱-۶ درست نیست؛ یعنی، اگر هر

ایدال اول روی ایدال  $I$  یک  $Z$ -ایدال باشد، لزوماً  $I$  یک

$Z$ -ایدال نیست. به عبارت دیگر، هرگاه  $\sqrt{I}$  یک

$Z$ -ایدال باشد، آن گاه  $I$  لزوماً  $Z$ -ایدال نیست. اثبات

قضیه زیر را می‌توان در مرجع [۱۲] مشاهده کرد.

۸-۱ قضیه: فرض می‌کنیم  $I$  یک ایدال و  $P$  یک ایدال

اول در حلقه  $R$  باشد. اگر  $I \cap P$  یک  $Z$ -ایدال باشد،

آن گاه یا  $I$  یک  $Z$ -ایدال است و یا  $P$  در حالت خاص،

اگر  $P$  و  $Q$  دو ایدال اول در  $R$  باشند به گونه‌ای که  $P$  و

$Q$  تشکیل زنجیر ندهند و  $P \cap Q$  یک  $Z$ -ایدال باشد،

آن گاه  $P$  و  $Q$  هردو  $Z$ -ایدال هستند. در حالت کلی‌تر،

هرگاه  $I$  یک ایدال و  $Q$  یک ایدال اولیه باشد به گونه‌ای

که  $I \cap Q$  یک  $Z$ -ایدال باشد، آن گاه یا  $\sqrt{I}$  یک

$Z$ -ایدال است و یا  $\sqrt{Q}$ .

حلقه‌هایی وجود دارند که در آنها هر ایدالی،

$Z$ -ایدال است. این حلقه‌ها، حلقه‌های منظم می‌باشند؛

یعنی، حلقه‌های که به ازای هر عنصر  $a$  یک عنصر  $b$  در

آنها موجود باشد که  $a \cdot b = a$ . این موضوع که در گزاره

زیر به طور دقیق‌تر مطرح شده است در مرجع [۲۵] اثبات

شده است.

۹-۱ گزاره: حلقه  $R$  منظم است اگر و تنها اگر هر ایدال

آن  $Z$ -ایدال باشد.

در حلقه‌هایی که مجموع  $Z$ -ایدال‌ها در آنها

یک  $Z$ -ایدال است، مطالب پیش‌تری در مورد  $Z$ -ایدال‌ها

می‌توان مطرح کرد. در این نوع حلقه‌ها بزرگ‌ترین

$Z$ -ایدال در یک ایدال دلخواه همیشه وجود دارد. در

واقع اگر  $I$  یک ایدال در حلقه  $R$  با این ویژگی و  $S$

گردایه همه  $Z$ -ایدال‌ها در  $I$  باشد، آن گاه  $\sum_{J \in S} J$  یک

$Z$ -ایدال در  $I$  است و به وضوح بزرگ‌ترین  $Z$ -ایدال در

۱-۱۲ گزاره: عبارت‌های زیر در هر حلقه  $R$  معادند.  
 (الف) ضرب هر دو  $z$ -ایدآل در  $R$ ، یک  $z$ -ایدآل است.  
 (ب) برای هر دو ایدآل  $I$  و  $J$  در  $R$ ،  

$$I_z J_z = I_z \cap J_z$$

(پ) برای هر  $a, b \in R$ ،  $M_a M_b = M_{ab}$   
 (ت) برای هر دو ایدآل  $I$  و  $J$  در  $R$ ، اگر  $I^z$  و  $J^z$  وجود داشته باشند، آن‌گاه  $(IJ)^z = I^z J^z$  نیز وجود دارد و  $(IJ)^z = I^z J^z$ .

۱-۱۳ نتیجه: اگر در حلقه  $R$ ، مجموع و ضرب هر دو  $z$ -ایدآل یک  $z$ -ایدآل باشد، آن‌گاه برای هر دو ایدآل  $J$  و  $I$  در  $R$  داریم  $(IJ)^z = I^z J^z$ .

## ۲- $z$ -ایدآل‌ها در حلقه $C(X)$

در بخش قبل، حلقه  $C(X)$  را معرفی و تعریف جبری  $z$ -ایدآل را بیان کردیم. این بخش را با مفهوم صفر مجموعه آغاز می‌کنیم که در واقع واژه " $z$ -ایدآل" از آن سرچشمه می‌گیرد. اگر  $f \in C(X)$ ، آن‌گاه

$$Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$$

را یک صفر مجموعه می‌نامیم. اهمیت صفر مجموعه‌ها در این است که گردایه صفر مجموعه‌ها؛ یعنی،  $Z(X) = \{Z(f) : f \in C(X)\}$  یک پایه برای زیر مجموعه‌های بسته  $X$  است اگر و تنها اگر فضای هاسدورف  $X$  کاملاً منظم باشد. از آن‌جا که برای هر  $f \in C(X)$  داریم

$$Z(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : |f(x)| < 1/n\}.$$

پس هر عنصر  $Z(X)$  یک  $G\delta$ -مجموعه است، به این ترتیب هر مجموعه بسته لزوماً یک صفر مجموعه نیست، حال آن‌که هر صفر مجموعه بسته است. چون برای هر  $f, g \in C(X)$  داریم

$$Z(fg) = Z(f) \cup Z(g)$$

$I$  می‌باشد. حلقه‌های توابع پیوسته از این ویژگی برخوردارند و طبعاً مطالعه  $z$ -ایدآل‌ها در این حلقه‌ها، همان‌گونه که در بخش بعد می‌بینیم، روند بهتری خواهند داشت. در صورتی که بزرگ‌ترین  $z$ -ایدآل در  $I$  وجود داشته باشد، آن را با  $I^z$  نمایش می‌دهیم. با استفاده از قضیه ۱-۶، می‌توان نشان داد که برای هر ایدآل اول  $P$  در صورتی که  $P^z$  وجود داشته باشد، اول است. در قضیه زیر معلوم می‌شود که این ویژگی در یک حلقه  $R$  معادل با این است که بگوییم برای هر دو ایدآل  $I$  و  $J$  در  $R$  داشته باشیم  $(I+J)_z = I_z + J_z$ . اثبات نتایج باقی‌مانده از این بخش را می‌توانید در مرجع [۲۵] ببینید.

۱-۱۰ قضیه: گزاره‌های زیر در هر حلقه  $R$  معادند.

(الف)- برای هر ایدآل  $I$  در  $R$ ،  $I^z$  وجود دارد.  
 (ب)- مجموع هر دو  $z$ -ایدآل در  $R$  یک  $z$ -ایدآل است.  
 (پ)- برای هر  $a, b \in R$ ،  $M_{a+b} \subseteq M_a + M_b$   
 (ت)- برای هر دو ایدآل  $I$  و  $J$  در  $R$ ،  $(I+J)_z = I_z + J_z$ .  
 در صورتی که یکی از شرایط فوق برقرار باشد، آن‌گاه برای هر ایدآل  $I$  در  $R$ ، داریم  $I_z = \sum_{a \in I} M_a$  و  $I^z = \sum_{M_a \subseteq I} M_a$ .

۱-۱۱ گزاره: فرض کنیم  $I$  و  $J$  دو ایدآل و  $\{I_\alpha\}_{\alpha \in S}$  گردایه‌ای از ایدآل‌ها در حلقه  $R$  باشد به گونه‌ای که  $I^z, J^z$  و  $I_\alpha^z$  برای هر  $\alpha \in S$  وجود داشته باشند، در این صورت:

(الف) اگر  $I \subseteq J$ ، آن‌گاه  $I^z \subseteq J^z$ .

(ب)  $(\bigcap_{\alpha \in S} I_\alpha)^z = \bigcap_{\alpha \in S} I_\alpha^z$

(پ)  $I^z + J^z \subseteq (I+J)^z$

سرانجام شرایط معادل با این که ضرب هر دو  $z$ -ایدآل در یک حلقه، یک  $z$ -ایدآل باشد در گزاره زیر بیان شده‌اند.

شد و سپس در مرجع [۳۲] کمی کلی تر نتیجه زیر به اثبات رسید.

**۲-۲ گزاره:** (الف) اگر  $I$  و  $J$  دو ایدال نیم-اول در  $C(X)$  باشند، آن گاه  $I+J$  نیز نیم-اول است و یا  $I+J=C(X)$ .

(ب) اگر دو ایدال  $I$  و  $J$  در  $C(X)$  به ترتیب اول و نیم-اول باشند، آن گاه  $I+J$  اول است و یا  $I+J=C(X)$ .

با کمک این گزاره، برای هر دو ایدال  $I$  و  $J$  در  $C(X)$  خواهیم داشت  $\sqrt{I+J} = \sqrt{I} + \sqrt{J}$ . بعد از آن با کمک این گزاره و مفهوم بزرگترین  $z$ -ایدال مشمول در یک ایدال، نتیجه زیر در مرجع [۱۳] به اثبات رسید که حاصل پیوند  $z$ -ایدال‌ها و ایدال‌های اول در  $C(X)$  را نشان می‌دهد.

**۲-۳ گزاره:** (الف) مجموع دو ایدال اول در  $C(X)$  که در یک زنجیر نباشند یا یک  $z$ -ایدال اول است و یا برابر با  $C(X)$  می‌باشد.

(ب) مجموع یک ایدال اول و یک  $z$ -ایدال در  $C(X)$  که در یک زنجیر نباشند، یا همه  $C(X)$  است و یا یک  $z$ -ایدال اول می‌باشد.

اکنون با استفاده از مفهوم صفر مجموعه، برای هر  $f \in C(X)$ ، یک نمایش توپولوژیکی برای  $M_f$  به صورت  $M_f = \{g \in C(X) : Z(f) \subseteq Z(g)\}$  می‌توان بیان کرد. به این ترتیب با استفاده از این نمایش توپولوژیکی به سادگی خواهیم دید که گرایه  $\{M_f : f \in C(X)\}$  تحت جمع، ضرب و اشتراک بسته است.

**۲-۴ گزاره:** اگر  $f, g \in C(X)$ ، آن گاه  $M_f M_g = M_f \cap M_g = M_{fg}$  (الف)

$$Z(f^2 + g^2) = Z(f) \cap Z(g)$$

از این رو  $Z(X)$  تحت اشتراک و اجتماع متناهی بسته است. علاوه بر این  $Z(X)$  تحت اشتراک شما را نیز بسته می‌باشد، اثبات این موضوع و مطالب دیگر در مورد صفر مجموعه‌ها را خواننده می‌تواند در مرجع [۲۹] ببیند. اگر  $I$  یک ایدال در  $C(X)$  باشد و  $f \in C(X)$ ، گاهی ممکن است که  $Z(f) = Z(g)$  و  $g \in I$  ولی  $f \notin I$ ، مثلاً اگر تابع همسانی  $i \in C(R)$  و ایدال اصلی  $I = (i)$  را در  $C(R)$  در نظر بگیریم، آن گاه  $Z(i^{1/2}) = Z(i) = \{0\}$ ،  $i \in I$  ولی  $i^{1/2} \notin I$ . در صورتی که از  $g \in I$  و  $Z(f) = Z(g)$  بتوان نتیجه گرفت  $f \in I$ ، آن گاه ایدال  $I$  را یک  $z$ -ایدال می‌نامیم. به سادگی می‌توان دید که این تعریف با تعریف جبری ۱-۲ معادل است. با کمک این تعریف توپولوژیکی، این ویژگی حلقه  $C(X)$  که مجموع هر دو  $z$ -ایدال یک  $z$ -ایدال است به سادگی به دست می‌آید. این ویژگی ابتدا در مرجع [۲۹] با کمک فشرده‌سازی استون-چک به اثبات رسیده و سپس با یک روش ساده و ابتدایی در مرجع [۳۲] اثبات شد. ویژگی‌های مهم دیگر  $C(X)$  در ارتباط با  $z$ -ایدال‌ها و ایدال‌های اول که در مراجع [۳، ۴، ۵ و ۲۹] مطرح شده‌اند به شرح زیر هستند.

**۲-۱ قضیه:** (الف) ایدال‌های اول شامل یک ایدال اول، تشکیل یک زنجیر می‌دهند.

(ب) یک  $z$ -ایدال، اول است اگر و تنها اگر شامل یک ایدال اول باشد.

(پ) اگر  $I$  یک  $z$ -ایدال (ایدال اول) در  $C(X)$  باشد و  $f, g \in I$ ، آن گاه  $f^2 + g^2 \in I$ .

از ویژگی‌های جالب دیگر در حلقه  $C(X)$ ، اول بودن مجموع دو ایدال اول است که ابتدا توسط کهلز مطرح

قسمت (الف) و نابرابری در قسمت (پ) در گزاره ۱-۱۱ با کمک ویژگی‌های برتر حلقه  $C(X)$ ، در [۲۵] نشان داده شده‌اند.

پیش‌تر دیدیم که اگر  $P$  یک ایدآل اول در یک حلقه  $R$  و  $P^z$  وجود داشته باشد، آن‌گاه  $P^z$  نیز اول است. اول بودن یا نبودن  $P^z$  در هر حلقه‌ای تاکنون معلوم نشده است، ولی اگر  $P$  یک ایدآل اول در  $C(X)$  باشد، آن‌گاه  $P^z$  یک  $z$ -ایدآل شامل ایدآل اول  $P$  است و بنا به قضیه ۲-۱،  $P^z$  اول است. گرچه بسیاری از نتایج پیشین در خصوص ایدآل‌های حلقه  $C(X)$  هم درست نیست، ولی وقتی که ایدآل‌ها را اول فرض کنیم موضوع متفاوت خواهد بود. قضیه زیر که در مرجع [۲۵] اثبات شده است به چند مورد اشاره می‌کند.

**۲-۶ قضیه:** فرض می‌کنیم  $P$  و  $Q$  دو ایدآل اول و  $I$  یک  $z$ -ایدآل در  $C(X)$  باشد. در این صورت،

$$(P + Q)^z = P^z + Q^z \text{ (الف) و}$$

$$(I + P)^z = I^z + P^z$$

(ب) اگر  $P^z \subseteq Q^z$ ، آن‌گاه  $P$  و  $Q$  تشکیل زنجیر می‌دهند.

(پ) هرگاه  $P^z \subseteq Q^z$ ، آن‌گاه  $P \subseteq Q$ .

(ت) اگر  $P \subseteq Q$ ، آن‌گاه  $P$  و  $Q^z$  در یک زنجیر قرار دارند، همچنین  $P^z$  و  $Q$  نیز تشکیل زنجیر می‌دهند.

(ث) اگر  $P^z \subseteq Q^z$ ، آن‌گاه  $P$  و  $Q$  لزوماً در یک زنجیر نیستند.

### ۳- $\sqrt{z}$ -ایدآل‌ها در حلقه $C(X)$

در بخش ۱ دیدیم که هر ایدآل اول مینیمال روی یک  $z$ -ایدآل در هر حلقه‌ای یک  $z$ -ایدآل است ولی عکس آن درست نیست. در مراجع [۱۲ و ۱۴] به دو روش

$$M_f + M_g = M_{f+g} \text{ (ب)}$$

از این رو با کمک این موضوع و قضیه ۱-۱۰، برای هر ایدآل  $I$  در  $C(X)$ ،  $I^z$  وجود دارد و اضافه بر نمایش‌های جبری  $I^z = \sum_{f \in I} M_f$  و  $I^z = \sum_{M_f \subseteq I} M_f$  می‌توان نمایش‌های توپولوژیکی  $I^z = \{g \in C(X) : \exists f \in I \ni Z(f) \subseteq Z(g)\}$  و  $I^z = \{g \in C(X) : Z(g) \subseteq Z(f) \Rightarrow f \in I\}$  را نیز به دست آورد. علاوه بر این، بنا به قضیه ۱-۱۰، برای هر دو ایدآل  $I$  و  $J$  در  $C(X)$  خواهیم داشت  $(I + J)_z = I_z + J_z$ . قبلاً دیدیم که برابری قسمت (ت) در گزاره ۱-۴ در هر حلقه‌ای درست نیست، ولی در  $C(X)$  با کمک این نمایش‌های توپولوژیکی می‌توان این برابری را اثبات کرد.

**۲-۵ گزاره:** اگر  $I$  و  $J$  دو ایدآل در  $C(X)$  باشند، آن‌گاه

$$(I \cap J)_z = I_z \cap J_z = I_z J_z = (IJ)_z$$

در بخش قبل مثال‌هایی از  $z$ -ایدآل‌ها را در حلقه‌ها دیدیم و همان‌طور که پیش‌تر گفتیم با کمک ویژگی‌های توپولوژیکی  $C(X)$  می‌توان  $z$ -ایدآل‌های فراوانی معرفی کرد. مثلاً برای هر  $x \in X$ ، ایدآل‌های

$$C_F(X) = \{f \in C(X) : X \setminus Z(f) \text{ متناهی است}\}$$

$$C_K(X) = \{f \in C(X) : \overline{X \setminus Z(f)} \text{ فشرده است}\}$$

$$O_x = \{f \in C(X) : x \in \text{int}_X Z(f)\}$$

و ایدآل‌های اول مینیمال در  $C(X)$  مثال‌های دیگری از  $z$ -ایدآل‌ها می‌باشد. همچنین اگر  $I$  یک  $z$ -ایدآل در یک حلقه کاهشی  $R$  باشد و  $S \subseteq R$ ، آن‌گاه ایدآل خارج قسمتی  $(I : S) = \{a \in R : aS \subseteq I\}$  نیز یک  $z$ -ایدآل است. عکس این موضوع درست نیست، در واقع اگر  $(I : S)$  یک  $z$ -ایدآل باشد،  $I$  ممکن است حتی نیم-اول هم نباشد. این موضوع و بسیاری از موارد دیگر مانند نادرستی عکس قسمت (ب) در گزاره ۱-۴، نادرستی عکس

$$(الف) (\sqrt{I})^z = I^z \text{ و } (\sqrt{I})_z = I_z$$

(ب)  $\sqrt{I}$  یک  $z$ -ایدال است اگر و تنها اگر  $I$  یک  $z$ -ایدال باشد.

نتیجه ۲-۳ در واقع نشان می‌دهد که دو واژه " $z$ -ایدال" و " $\sqrt{z}$ -ایدال" در  $C(X)$  یکی است. به عبارت دیگر، با کمک این نتایج در  $C(X)$  به سادگی می‌توان نشان داد که هر ایدال اول مینیمال روی یک ایدال  $I$  یک  $z$ -ایدال است اگر و تنها اگر  $I$  یک  $z$ -ایدال باشد. در صورتی که هر ایدال اول مینیمال روی  $I$  یک  $z$ -ایدال باشد، آشکارا  $\sqrt{I}$  یک  $z$ -ایدال خواهد بود که بنا به نتیجه ۲-۳،  $I$  نیز یک  $z$ -ایدال است. به عکس اگر  $I$  یک  $z$ -ایدال و  $P$  یک ایدال اول مینیمال روی  $I$  باشد، آن‌گاه  $I = I^z \subseteq P^z \subseteq P$  و چون  $P$  مینیمال روی  $I$  و  $P = P^z$  است.

پس  $P = P^z$ ؛ یعنی،  $P$  یک  $z$ -ایدال است. پیش‌تر دیدیم که مجموع یک  $z$ -ایدال و یک ایدال اول که در یک زنجیر نباشند، یا یک  $z$ -ایدال است و یا برابر با همه  $C(X)$  می‌باشد. با استفاده از نتایج این بخش، این موضوع در مرجع [۱۲] به شرح زیر تعمیم داده شده است.

**۳-۳ قضیه:** مجموع یک  $z$ -ایدال و یک ایدال اولیه در  $C(X)$  که در یک زنجیر نیستند، یا یک  $z$ -ایدال اول است و یا برابر با همه  $C(X)$  می‌باشد.

سرانجام مشابه نتایجی که در بخش‌های قبل در خصوص ارتباط ایدال‌های اول و  $z$ -ایدال‌ها ارائه شد، ارتباط‌هایی بین  $z$ -ایدال‌ها و ایدال‌های اولیه  $C(X)$  در مرجع [۱۲] به شرح زیر به دست آمده است.

**۴-۳ گزاره:** فرض می‌کنیم  $Q$  یک ایدال اولیه در  $C(X)$  باشد. در این صورت

$$(الف) - (الف)  $Q^z$  و  $Q_z$  ایدال‌های اول هستند.$$

متفاوت نشان داده شد که عکس این موضوع در  $C(X)$  نیز درست است. در صورتی که هر ایدال اول مینیمال روی یک ایدال  $I$  در یک حلقه  $R$ ،  $z$ -ایدال باشد، آن‌گاه ایدال  $I$  یک  $\sqrt{z}$ -ایدال نامیده می‌شود، [۱۲]. وقتی هر ایدال اول مینیمال روی ایدال  $I$  یک  $z$ -ایدال باشد، آن‌گاه اشتراک آن‌ها؛ یعنی،  $\sqrt{I}$  یک  $z$ -ایدال است و در صورتی که  $\sqrt{I}$  یک  $z$ -ایدال باشد، آن‌گاه بنا به قضیه ۱-۶، هر ایدال اول مینیمال روی  $\sqrt{I}$  و در نتیجه روی  $I$  یک  $z$ -ایدال خواهد بود. به این ترتیب  $\sqrt{z}$ -ایدال بودن ایدال  $I$  همان  $z$ -ایدال بودن  $\sqrt{I}$  است. با کمک قضیه زیر که در مرجع [۱۲] اثبات شده است، معادل بودن دو واژه " $z$ -ایدال" و " $\sqrt{z}$ -ایدال" در  $C(X)$  به سادگی به دست می‌آید.

**۱-۳ قضیه:** فرض می‌کنیم  $I$  یک ایدال در  $C(X)$  باشد. در این صورت اگر  $f \in C(X)$  و  $M_f \subseteq \sqrt{I}$ ، آن‌گاه  $M_f \subseteq I$ .

از قضیه ۱-۳ نتیجه می‌شود که برای هر دو ایدال  $I$  و  $J$  در  $C(X)$ ، اگر  $J$  یک  $z$ -ایدال باشد و  $J \subseteq \sqrt{I}$ ، آن‌گاه  $J \subseteq I$ . همچنین با استفاده از این قضیه خواهیم داشت

$$\{M_f : M_f \subseteq I\} = \{M_f : M_f \subseteq \sqrt{I}\}$$

و از آن‌جا که برای هر  $n \in N$  داریم  $M_{fn} = M_f$  پس  $\{M_f : f \in I\} = \{M_f : f \in \sqrt{I}\}$ . این نشان می‌دهد که  $\sum_{M_f \subseteq I} M_f = \sum_{M_f \subseteq \sqrt{I}} M_f$  و به این ترتیب نتایج زیر به سادگی به دست می‌آید.

**۲-۳ نتیجه:** فرض می‌کنیم  $I$  یک ایدال در  $C(X)$  باشد. در این صورت



قرار می‌دهیم  $\theta(I) = \{p \in \beta X : I \subseteq M^p\}$  در واقع  $\theta(I) = \bigcap_{f \in I} cl_{\beta X} Z(f)$  و به این ترتیب  $I \subseteq M^p$  اگر و تنها اگر  $p \in \theta(I)$ . هر هیأت خارج قسمتی  $C(X)/M^p$  شامل هیأت  $R$  می‌باشد که در واقع همان مجموعهٔ توابع ثابت است. در صورتی که  $C(X)/M^p = R$ ، آن‌گاه ایدال  $M^p$  و همین‌طور نقطهٔ  $p$  را حقیقی و در غیر این صورت ابرحقیقی می‌گوییم. اگر هر تابع  $f \in C(X)$  را به عنوان تابعی از  $X$  به فشرده شدهٔ تک نقطه‌ای  $R$ ؛ یعنی،  $R^* = R \cup \{\infty\}$  تصور کنیم، آن‌گاه یک توسیع  $f^*: \beta X \rightarrow R^*$  خواهد داشت. در این صورت ابر حقیقی بودن یک ایدال ماکسیمال  $M^p$  و یا نقطهٔ  $p$  معادل با وجود تابع  $f \in C(X)$  است که  $f^*(p) = \infty$  و یا معادل با این است که برای  $n \in \mathbb{N}$ ،  $Z_n = \{x \in X : |f(x)| \geq n\}$  متعلق به  $Z[M^p]$  باشد. همچنین می‌توان نشان داد که ایدال ماکسیمال  $M$  در  $C(X)$  حقیقی است اگر و تنها اگر  $Z[M]$  تحت اشتراک شمارا بسته باشد. اثبات این واقعیت‌ها و همچنین زمینه‌های مربوط به مباحث این بخش را می‌توان جامع‌تر در مرجع [۲۹] مطالعه کرد.

ایدال  $I$  در  $C(X)$  ( $z$ -فیلتر  $F$  در  $Z(X)$ ) را تولید شده توسط  $A \subseteq C(X)$  ( $A \subseteq Z(X)$ ) می‌گوییم هرگاه  $I$  کوچک‌ترین ایدال ( $z$ -فیلتر) شامل  $A$  باشد. در صورتی که ایدال  $I$  توسط یک مجموعهٔ شمارا تولید شده باشد، ایدال  $I$  را شمارا تولید شده و یا دارای مولد شمارا می‌گوییم و اگر  $z$ -فیلتر  $Z[I]$  توسط یک مجموعهٔ شمارا تولید شود،  $I$  را شمارا  $z$ -تولید شده می‌نامیم و یا می‌گوییم  $I$  دارای  $z$ -مولد شمارا است. در مورد ایدال‌های شمارا تولید شده، نخست قضیهٔ زیر در مرجع [۱۵] مطرح و اثبات شده است.

(ب) عنصر یکتای  $x \in \beta X$  وجود دارد که  $O^x \subseteq Q \subseteq M^x$ .

(پ) اگر  $\sqrt{Q}$  ماکسیمال (مینیمال) باشد، آن‌گاه  $Q$  نیز ماکسیمال (مینیمال) است.

**۳-۵ گزاره:** (الف) اگر  $I$  یک ایدال،  $Q$  یک ایدال اولیه در  $C(X)$  و  $I \cap Q$  یک  $z$ -ایدال باشد، آن‌گاه  $I$  یک  $z$ -ایدال است و  $Q$  یک  $z$ -ایدال اول می‌باشد. در صورتی که  $I$  هم اولیه و  $I \cap Q$  یک  $z$ -ایدال باشد، آن‌گاه  $I$  و  $Q$  هر دو  $z$ -ایدال اول هستند.

(ب) اگر  $I$  و  $J$  دو ایدال اولیه در  $C(X)$  باشند به گونه‌ای که  $\sqrt{I}$  و  $\sqrt{J}$  تشکیل زنجیر ندهند، آن‌گاه  $I + J$  یک  $z$ -ایدال اول است و یا برابر با همهٔ  $C(X)$  می‌باشد.

(پ) هر  $z$ -ایدال تجزیه‌پذیر با تجزیهٔ اولیهٔ مینیمال در  $C(X)$ ، اشتراک تعداد متناهی از  $z$ -ایدال‌های اول است.

(ت) اگر  $I$  و  $J$  دو ایدال تجزیه‌پذیر با تجزیهٔ اولیهٔ مینیمال در  $C(X)$  باشند، آن‌گاه  $(I + J)^z = I^z + J^z$ .

#### ۴-z-ایدال‌های شمارا تولید شده در حلقهٔ $C(X)$

ابتدا یادآور می‌شویم که ایدال‌های ماکسیمال  $C(X)$  به صورت  $M^p = \{f \in C(X) : p \in cl_{\beta X} Z(f)\}$ ،  $p \in \beta X$  هستند که فشردهٔ استون-چک فضای  $X$  می‌باشد. برای هر  $p \in \beta X$ ، ایدال  $O^p$  نیز به صورت  $O^p = \{f \in C(X) : p \in int_{\beta X} cl_{\beta X} Z(f)\}$  تعریف می‌شود. برای هر  $A \subseteq \beta X$ ، ایدال‌های  $M^A$  و  $O^A$  نیز به صورت  $M^A = \bigcap_{p \in A} M^p$  و  $O^A = \bigcap_{p \in A} O^p$  می‌باشند. وقتی  $A \subseteq X$  یا  $P \in X$ ، آن‌گاه این ایدال‌ها با  $M_p$ ،  $O_p$ ،  $M_A$  و  $O_A$  نمایش داده می‌شوند. برای هر ایدال  $I$  در  $C(X)$ ،

شناسایی شده‌اند. بقیه نتایج این بخش از این سه مأخذ استخراج شده‌اند. پیش از پرداختن به این نتایج به مفهوم ایدال خالص نیازمندیم. ایدال  $I$  در حلقه را خالص می‌نامیم، هرگاه برای هر  $f \in I$ ، تابع  $g \in I$  موجود باشد که  $f = fg$ . این نوع ایدال‌ها به صورت زیر شناسایی شده‌اند.

۴-۴ گزاره: فرض کنیم  $I$  یک ایدال در  $C(X)$  باشد.

(الف)  $I$  خالص است اگر و تنها اگر برای هر  $f \in I$ ، عنصر  $g \in I$  موجود باشد به گونه‌ای که  $X \setminus Z(f)$  و  $Z(g)$  کاملاً مجزا باشند.

(ب) اگر  $X$  نرمال باشد، آن‌گاه ایدال  $I$  در  $C(X)$  خالص است اگر و تنها اگر برای هر  $f \in I$ ، عنصر  $g \in I$  وجود داشته باشد که  $Z(g) \subseteq \text{int}_X Z(f)$ .

در صورتی که  $\{f_n\}$  دنباله‌ای در  $C(X)$  باشد که برای هر  $n \in N$  داشته باشیم  $Z(f_{n+1}) \subseteq \text{int}_X Z(f_n)$  آن‌گاه به سادگی می‌توان نشان داد که ایدال تولید شده توسط این دنباله، یک  $Z$ -ایدال است. همچنین می‌توان دید که هر ایدال نیم-اول در  $C(X)$  با مولد شمارا توسط یک دنباله  $\{g_n\}$  تولید می‌شود که  $\dots \subseteq (g_n) \subseteq \dots \subseteq (g_1)$ . اکنون با کمک این موضوع و بحثی که پیش از قضیه ۴-۲ داشتیم، می‌توان به نتیجه زیر دست یافت.

۴-۵ قضیه: فرض کنیم  $X$  یک فضای شمارای نوع اول (فشرده موضعی) باشد. در این صورت هر  $Z$ -ایدال با مولد شمارا در  $C(X)$  دارای یک مولد شمارای  $\{f_n\}$  است به گونه‌ای که برای هر  $n \in N$ ،  $Z(f_{n+1}) \subseteq \text{int}_X Z(f_n)$ .

اکنون با استفاده از این قضیه و گزاره ۴-۴، ایدال‌های شمارا تولید شده در  $C(X)$ ، وقتی  $X$  نرمال و

۴-۱ قضیه: هر ایدال شمارا تولید شده در  $C(X)$  که در یک ایدال ماکسیمال ابر حقیقی قرار داشته باشد، در  $\mathcal{C}$  ایدال ماکسیمال ابر حقیقی قرار دارد.

به سادگی می‌توان دید که اگر ایدال ماکسیمال  $M^P$  در  $C(X)$  شامل یک ایدال شمارا تولید شده  $I$  باشد به گونه‌ای که  $p \notin \text{cl}_{\beta X} I \cap Z[I]$ ، آن‌گاه  $M^P$  ابر حقیقی است. در حالت خاص اگر  $I$  شمارا تولید شده و  $Z[I]$  فشرده باشد، آن‌گاه هر ایدال ماکسیمال آزاد شامل  $I$  ابر حقیقی است. این موضوع نشان می‌دهد که یک ایدال آزاد واقع در یک ایدال ماکسیمال یکتا، شمارا  $(Z)$  تولید شده نیست. در حالت خاص ایدال‌های آزاد  $O^P$  و ایدال‌های اول آزاد، مولد شمارا ندارند. در واقع با کمک قضیه ساده زیر، یک ایدال ماکسیمال مولد شمارا دارد هرگاه با یک خود توان تولید شود.

۴-۲ قضیه: اگر  $F$  یک زیر مجموعه بسته  $X$  و  $Z$ -ایدال  $M_F$  دارای مولد شمارا باشد، آن‌گاه  $F$  باز است. در حالت خاص اگر ایدال ماکسیمال  $M$  دارای مولد شمارا باشد، آن‌گاه  $M = M_p$  که  $p \in X$  یک نقطه منفرد است؛ یعنی،  $M$  با یک خودتوان تولید می‌شود. در مرجع [۱۵] ابتدا این واقعیت ثابت می‌شود که اگر  $p \in X$  یک  $G_\delta$ -نقطه و  $Z$  یک صفر مجموعه در  $S = X \setminus \{p\}$  باشد، آن‌گاه  $Z \cup \{p\}$  نیز یک صفر مجموعه در  $X$  است و سپس با کمک آن، قضیه جالب و با اهمیت زیر به اثبات می‌رسد.

۴-۳ قضیه:  $Z$ -ایدال اول شمارا تولید شده‌ی غیر ماکسیمال در  $C(X)$  وجود ندارد.

$Z$ -ایدال‌های با مولد شمارا در  $C(X)$  برای برخی از فضاهای توپولوژی مانند فضاهای فشرده، فشرده موضعی، نرمال و شمارا نوع اول در مراجع [۱۶-۱۸]

با  $f \in I, g \in J$  و  $Z(f) \subseteq Z(g)$ ، آن‌گاه  $g \in I$ . با چنین شرایطی،  $I$  را یک  $z_r$ -ایدآل می‌گوییم. آشکارا هر ایدآل  $I$  خود یک  $z_r$ -ایدآل است و هر  $z$ -ایدآل  $I$  در  $C(X)$ ، به ازای هر ایدآل  $J$  شامل  $I$ ، یک  $z_r$ -ایدآل می‌باشد. در صورتی که ایدآل  $J$  موجود باشد که  $I \subset J, I \neq J$  و یک  $z_r$ -ایدآل باشد، می‌گوییم  $I$  یک  $z$ -ایدآل نسبی است و به اختصار  $I$  را یک  $rez$ -ایدآل می‌نامیم.

با استفاده از تعریف، به سادگی می‌توان دید که اگر  $J$  یک  $z$ -ایدآل در  $C(X)$  و  $I \subseteq J$  یک  $z_r$ -ایدآل باشد، آن‌گاه  $I$  نیز یک  $z$ -ایدآل است. اینک با توجه به این موضوع، اگر ایدآل  $J$  یک  $z$ -ایدآل نباشد، نخستین پرسشی که مطرح است این است که آیا یک  $z_r$ -ایدآل  $I$  وجود دارد که  $z$ -ایدآل نباشد؟ پرسش‌های متعدد دیگری در ارتباط با  $z$ -ایدآل‌های نسبی نیز مطرح‌اند، مثلاً، آیا هر ایدآل می‌تواند یک  $rez$ -ایدآل باشد؟ آیا مجموع هر دو  $z_r$ -ایدآل همواره یک  $z_r$ -ایدآل است؟ و بالاخره آیا مجموع هر دو  $rez$ -ایدآل یک  $rez$ -ایدآل می‌باشد؟ پیش از آن که به این پرسش‌ها پاسخ دهیم، تعریف‌های معادل دیگری از  $z$ -ایدآل‌های نسبی به شرح زیر ارائه می‌دهیم که با استفاده از تعریف، به سادگی به دست می‌آیند.

۱-۵ گزاره: فرض کنیم  $I$  و  $J$  دو ایدآل در  $C(X)$  هستند که  $I \subseteq J$ . در این صورت عبارتهای زیر معادلند.

(الف)  $I$  یک  $z_r$ -ایدآل است.

(ب)  $I \cap J = I$ .

(پ)  $z$ -ایدآل  $K$  در  $C(X)$  وجود دارد که  $K \cap J = I$ .

شمارای نوع اول (یا نرمال و فشرده موضعی) است به شرح زیر شناسایی خواهند شد.

۴-۶ نتیجه: اگر فضای  $X$  نرمال و شمارای نوع اول (فشرده موضعی) باشد، در این صورت هر  $z$ -ایدآل با مولد شمارا در  $C(X)$  خالص است.

سرانجام در مراجع [۱۷ و ۱۸] نشان داده شد که هر ایدآل خالص در  $C(X)$  به صورت  $O^A$  است که  $\beta X \supseteq A$  یک صفر مجموعه در  $\beta X$  می‌باشد. با توجه به این موضوع و نتیجه ۴-۶، در قضیه زیر،  $z$ -ایدآل‌های شمارا تولید شده در  $C(X)$  برای فضاهای نرمال و شمارای نوع اول (فشرده موضعی) به گونه‌ای آشکارتر شناسایی می‌شوند.

۴-۷ قضیه: اگر  $X$  یک فضای نرمال و شمارای نوع اول (فشرده موضعی) باشد، آن‌گاه هر  $z$ -ایدآل در  $C(X)$  با مولد شمارا به صورت  $O^A$  است که  $A$  یک صفر مجموعه در  $\beta X$  می‌باشد.

در مراجع [۳ و ۴] فضاهای توپولوژی  $X$  به گونه‌ای معرفی شده‌اند که در  $C(X)$ ،  $z$ -ایدآل‌های با مولد شمارا وجود دارند که خالص و یا به صورت  $O^A$  نیستند.

### ۵- $z$ -ایدآل‌های نسبی در $C(X)$

قبل از آن که به سراغ نوع قوی‌تری از  $z$ -ایدآل‌ها؛ یعنی،  $z^\circ$ -ایدآل‌ها برویم، به  $z$ -ایدآل‌های ضعیف‌تری می‌پردازیم که تاکنون مورد مطالعه قرار نگرفته‌اند. وقتی  $z$ -ایدآل‌ها را در یک حلقه و یا در  $C(X)$  تعریف می‌کنیم، به طور طبیعی می‌توان این تعریف را به یک ایدآل حلقه به جای همه حلقه محدود کرد. به عبارتی اگر  $J$  یک ایدآل در  $C(X)$  و  $I$  زیر ایدآل  $J$  باشد، آن‌گاه  $I$  را در  $J$  یک  $z$ -ایدآل می‌نامیم هرگاه اگر

ایدال اصلی ( $f$ ) در  $C(X)$  یک  $rez$ -ایدال است اگر و تنها اگر  $Ann(f) \neq (0)$  و یا  $\text{int}_X Z(f) \neq \emptyset$ ؛ یعنی، اگر و تنها اگر ( $f$ ) یک ایدال غیر اساسی باشد. پیش از این دیدیم که هر ایدال غیر اساسی یک  $rez$ -ایدال است و در صورتی که ( $f$ ) یک  $rez$ -ایدال باشد، در مرجع [۲۵] ثابت شده که  $\text{int}_X Z(f) \neq \emptyset$ ؛ یعنی ( $f$ ) یک ایدال غیر اساسی است. به این ترتیب، این مثال نشان می‌دهد که هر ایدالی لزوماً یک  $rez$ -ایدال نیست و علاوه بر آن نتیجه زیر که شناسایی جبری تقریباً  $P$ -فضاهاست به دست می‌آید. فضای  $X$  را تقریباً  $P$ -فضا می‌نامیم هرگاه هر  $G \in \mathcal{G}$ -مجموعه ناتهی دارای درون ناتهی باشد. برای آگاهی از ویژگی‌های بیش‌تر این فضاها، خواننده می‌تواند به [۳۵، ۳۶ و ۳۷] مراجعه نماید.

**۴-۵ نتیجه:** هر ایدال اصلی در  $C(X)$  یک  $rez$ -ایدال است اگر و تنها اگر  $X$  تقریباً  $P$ -فضا باشد.

دو مفهوم " $z$ -ایدال" و " $rez$ -ایدال" در مورد ایدال‌های اول  $C(X)$  یکسانند. علاوه بر آن اگر  $I$  یک  $z$ -ایدال باشد، آن‌گاه هر ایدال اولی که  $z$ -ایدال نیست و شامل  $I$  است، شامل  $J$  نیز هست. در حالت خاص اگر  $P$  یک ایدال اول باشد ولی  $z$ -ایدال نباشد و ایدال  $I$  یک  $zp$ -ایدال باشد، آن‌گاه  $P$  بزرگ‌ترین عنصر مجموعه  $\{I\}$  یک  $z$ -ایدال است:  $J$  خواهد بود. با کمک این موضوع و گزاره ۵-۱، به سادگی دیده می‌شود که اگر  $I$  یک  $rez$ -ایدال باشد، آن‌گاه  $\sqrt{I}$  نیز یک  $rez$ -ایدال می‌باشد. برای هر ایدال نیم اول  $Q$  همیشه بزرگ‌ترین ایدال  $J$  وجود دارد که  $Q$  یک  $z$ -ایدال باشد. نه تنها برای ایدال‌های نیم-اول، بلکه برای هر ایدال  $C(X)$ ، وقتی  $X$  یک  $F$ -فضا باشد نیز این پدیده رخ می‌دهد. اثبات این واقعیت‌ها را خواننده

همان‌گونه که در هر ایدالی،  $z$ -ایدال‌های متعدد یافت می‌شود، برای هر ایدال  $J$ ،  $z$ -ایدال غیربندی وجود دارد. این موضوع در گزاره زیر به طور دقیق بیان شده که پاسخ پرسش اول است.

**۲-۵ گزاره:** فرض کنیم  $J$  یک ایدال در  $C(X)$  باشد که  $z$ -ایدال نیست. در این صورت ایدال  $I \subset J$ ،  $I \neq J$  وجود دارد که  $z$ -ایدال است ولی  $z$ -ایدال نیست.

در حقیقت چون  $J$  یک  $z$ -ایدال نیست،  $h \in C(X)$  و  $k \in J$  موجودند که  $Z(h) = Z(k)$  و  $h \notin J$ . در این صورت کافی است  $g \in C(X)$  را به گونه‌ای انتخاب کنیم که  $Z(g) \cap Z(h) = \emptyset$  و قرار دهیم  $I = M_g \cap J$ . پاسخ پرسش بعدی از مثال‌های زیر استخراج می‌شود، پیش از آن یادآور می‌شویم که یک ایدال در یک حلقه را اساسی گوئیم هرگاه هر ایدال ناصفر را در غیر از صفر قطع کند. ایدال‌های اساسی  $C(X)$  به طور توپولوژیکی در مراجع [۳۳ و ۳۴] شناسایی شده‌اند. در این دو مأخذ ثابت شده است که ایدال  $E$  در  $C(X)$  اساسی است اگر و تنها اگر  $\text{int}_X \bigcap Z[E] = \text{int}_X \bigcap_{f \in E} Z(f) = \emptyset$ .

**۳-۵ مثال:** هر ایدال غیر اساسی در  $C(X)$  یک  $rez$ -ایدال است. در واقع اگر  $I$  غیر اساسی باشد، آن‌گاه ایدال  $K$  وجود دارد که  $I \cap K = (0)$  و به این ترتیب کافی است قرار دهیم  $J = I + K$ . پیداست که  $I \subset J$  و  $I \neq J$  و به سادگی دیده می‌شود که  $I$  یک  $z$ -ایدال است. به عنوان مثالی دیگر، اگر  $P$  و  $Q$  را دو ایدال اول در  $C(X)$  در نظر بگیریم که  $Q$  یک  $z$ -ایدال باشد ولی  $P$  یک  $z$ -ایدال نباشد، آن‌گاه مطابق قضیه ۱-۸ و گزاره ۱-۵،  $I = P \cap Q$  یک  $zp$ -ایدال است که  $z$ -ایدال نیست و  $I \neq P$ . سرانجام به سادگی خواهیم دید که

$I^{zJ}$  وجود  $(I+K) \cap J = I \cap J + K \cap J$  معادل با وجود  $I^{zJ}$  و همچنین معادل است با این که مجموع هر دو  $z$ -ایدال در  $C(X)$  یک  $z$ -ایدال باشد. سپس با اثباتی مشابه لم ۳-۱ را در مرجع [۳۲] می‌توان دید که برای هر ایدال مطلقاً محدب  $J$  و برای هر دو  $z$ -ایدال  $I$  و  $K$  داریم  $J \cap (I+K) = J \cap I + J \cap K$  و در صورتی که این برابری برقرار بوده و  $J$  یک ایدال محدب باشد، حتماً مطلقاً محدب است. سرانجام با توجه به این که هر ایدال  $C(X)$  مطلقاً محدب است اگر و تنها اگر  $X$  یک  $F$ -فضا باشد، ثابت می‌شود که فضای  $X$  یک  $F$ -فضا است اگر و تنها اگر به ازای هر ایدال  $J$  در  $C(X)$ ، مجموع هر دو  $z$ -ایدال یک  $z$ -ایدال باشد.

۵-۶ قضیه: گزاره‌های زیر معادل هستند.

(الف) برای هر ایدال  $J$  در  $C(X)$  و برای هر دو  $z$ -ایدال  $I$  و  $K$  داریم  $(I+K) \cap J = I \cap J + K \cap J$ .  
(ب) برای هر ایدال  $J$  در  $C(X)$ ، مجموع هر دو  $z$ -ایدال یک  $z$ -ایدال است.

(پ) برای هر ایدال  $J$  و هر زیر ایدال  $I$  از  $J$ ،  $I^{zJ}$  وجود دارد و  $I^{zJ} = \sum_{M_f \cap J \subseteq I} M_f \cap J$ .  
(ت)  $X$  یک  $F$ -فضاست.

در صورتی که  $X$  یک  $P$ -فضا باشد، آن‌گاه هر ایدال  $C(X)$  یک  $z$ -ایدال است و طبعاً هر ایدال  $C(X)$  یک  $rez$ -ایدال نیز هست و در نتیجه مجموع هر دو  $rez$ -ایدال در  $C(X)$  یک  $rez$ -ایدال می‌باشد. اکنون اگر مجموع هر دو  $rez$ -ایدال در  $C(X)$  یک  $rez$ -ایدال باشد و  $X$  یک  $P$ -فضا نباشد، آن‌گاه ایدال اول  $P$  در  $C(X)$  وجود دارد که  $z$ -ایدال نیست. در این صورت با در نظر گرفتن دو ایدال ماکسیمال  $M$  و  $M'$  با ویژگی  $M+M' = C(X)$ ، می‌توان دو  $z$ -ایدال  $I = P \cap M$  و  $K = P \cap M'$  را ساخت که

می‌تواند در مرجع [۲۵] مطالعه کند. نتایج زیر نیز به سادگی با استفاده از تعریف و گزاره ۵-۱ به دست می‌آید.

۵-۵ گزاره: فرض کنیم  $A, B, I, J, K, I_\alpha$  برای هر  $\alpha \in S$  ایدال‌هایی در  $C(X)$  باشند، در این صورت:  
(الف) اگر  $I \subseteq J \subseteq K$  و  $I$  یک  $z$ -ایدال باشد، آن‌گاه  $I$  یک  $z$ -ایدال نیز هست.

(ب) اگر  $I \subseteq J \subseteq K$ ،  $I$  یک  $z$ -ایدال و  $J$  یک  $z$ -ایدال باشد، آن‌گاه  $I$  یک  $z$ -ایدال است.

(پ) اگر  $\sqrt{I} \subseteq J$  و  $I$  یک  $z$ -ایدال باشد، آن‌گاه  $I = \sqrt{I}$ . در حالت خاص اگر  $I$  یک  $z$ -ایدال باشد، آن‌گاه  $I = \sqrt{I}$ .

(ت) اگر  $I \subseteq J$  و  $I$  یک  $z$ -ایدال باشد، آن‌گاه  $\sqrt{I}$  یک  $z$ -ایدال است.

(ث) اگر  $A, B \subseteq K$ ،  $A \subseteq J$  و  $B$  یک  $z$ -ایدال باشد، آن‌گاه  $A \cap B$  یک  $z$ -ایدال است.

(ج) هرگاه برای هر  $\alpha \in S$ ،  $I_\alpha \subseteq J$  و  $I_\alpha$  یک  $z$ -ایدال باشد، آن‌گاه  $\bigcap_{\alpha \in S} I_\alpha$  یک  $z$ -ایدال است.

قسمت (ج) در گزاره بالا در واقع نشان می‌دهد که اگر  $I \subseteq J$ ، آن‌گاه کوچک‌ترین  $z$ -ایدال شامل  $I$  وجود دارد که آن را با  $I_{zJ}$  نمایش می‌دهیم. به راحتی می‌توان دید که  $I_{zJ}$  چیزی جز  $I \cap J$  نیست. بزرگ‌ترین  $z$ -ایدال در  $I$  نیز در صورت وجود با  $I^{zJ}$  نمایش داده می‌شود. آشکارا وقتی مجموع هر دو  $z$ -ایدال یک  $z$ -ایدال باشد، آن‌گاه  $I^{zJ}$  وجود دارد. عکس این موضوع نیز درست است و با توجه به این شرایط جبری فضای  $X$  را می‌توان شناسایی کرد. نخست می‌توان نشان داد که اگر  $J$  یک ایدال در  $C(X)$  باشد، آن‌گاه برای هر دو  $z$ -ایدال  $I$  و  $K$  برابری

یک  $z^\circ$  - ایدال است. از این رو برای هر عنصر  $a$  در حلقه،  $P_a$  یک  $z^\circ$  - ایدال می باشد که آن را  $z^\circ$  - ایدال پایه ای حلقه می نامیم. در حالت خاص  $P_0$ ؛ یعنی،  $rad(R)$  کوچک ترین  $z^\circ$  - ایدال در  $R$  است و هر  $z^\circ$  - ایدال در  $R$  شامل  $rad(R)$  می باشد. از این رو ساختار  $z^\circ$  - ایدال های یک حلقه  $R$ ، همان ساختار  $z^\circ$  - ایدال های حلقه  $R/rad(R)$  می باشد و به همین سبب می توان فرض کرد  $rad(R) = (0)$ ؛ یعنی، می توان حلقه را کاهشی تصور کرد. پیش از آن که به مطالب اصلی در ارتباط با  $z^\circ$  - ایدال ها بپردازیم، گزاره زیر را بیان می کنیم که در روند مطالعه  $z^\circ$  - ایدال ها موثر و مفید است.

۲-۶ گزاره: (الف) هرگاه  $P$  یک ایدال اول در یک حلقه  $R$  باشد، در این صورت  $P$  مینیمال است اگر و تنها اگر برای هر  $a \in P$ ، عنصر  $b \notin P$  موجود باشد که  $ab \in rad(R)$ .

(ب) هرگاه  $P$  یک ایدال اول در یک حلقه کاهشی  $R$  باشد، آن گاه  $P$  مینیمال است اگر و تنها اگر برای هر  $a \in P$ ، عنصر  $b \notin P$  موجود باشد که  $ab = 0$ . به عبارت دیگر،  $P$  مینیمال است اگر و تنها اگر برای هر  $Ann(a) \not\subseteq P$ ،  $a \in P$ .

با استفاده از گزاره های بالا می توان نتیجه گرفت که در یک حلقه  $R$ ،  $P_a \subseteq P_b$  اگر و تنها اگر  $Ann(b) \subseteq Ann(a)$  و از این رو هر  $P_a$  به صورت  $P_a = \{b \in R : Ann(a) \subseteq Ann(b)\}$  شناسایی می شود. به این ترتیب با استفاده از این موضوع، می توان تعریف های معادلی برای  $z^\circ$  - ایدال ها به شرح زیر ارائه داد.

مجموع آن ها  $rez$  - ایدال نمی باشد و بالاخره به نتیجه زیر دست یافت.

۷-۵ قضیه: گزاره های زیر معادل هستند:

(الف)  $X$  یک  $P$  - فضا است.

(ب) هر ایدال در  $C(X)$  یک  $rez$  - ایدال است.

(پ) مجموع هر دو  $rez$  - ایدال در  $C(X)$  یک  $rez$  - ایدال است.

### ۶- $z^\circ$ - ایدال ها در حلقه های یکدار کاهشی

مبحث  $z^\circ$  - ایدال ها را نیز مانند  $z$  - ایدال ها، ابتدا در حلقه های تعویض پذیر یکدار مطالعه می کنیم و خواهیم دید که شرط کاهشی را بی هیچ کاستی نیز می توان در نظر گرفت. اگر  $R$  یک حلقه تعویض پذیر یکدار باشد،  $Min(R)$  را گردایه همه ایدال های اول مینیمال  $R$  در نظر می گیریم برای هر  $a \in R$ ، اشتراک همه ایدال های اول مینیمال شامل  $a$  را با  $P_a$  نمایش می دهیم؛ یعنی،  $P_a = \bigcap_{a \in P \in Min(R)} P$ ، نتایج زیر در ارتباط با این نماد به سادگی به دست می آید.

۱-۶ گزاره: اگر  $R$  یک حلقه باشد و  $a, b, c \in R$ ، آن گاه عبارت های زیر برقرارند.

(الف)  $P_a \cap P_b = P_{ab}$

(ب) اگر  $P_a \subseteq P_b$ ، آن گاه  $P_{ac} \subseteq P_{bc}$ .

(پ) برای هر  $n \in N$ ،  $P_a^n = P_a$ .

(ت)  $P_b \subseteq P_a$  اگر و تنها اگر  $P_b \subseteq P_a$ .

ایدال  $I$  در یک حلقه  $R$  را  $z^\circ$  - ایدال می گوئیم هرگاه برای هر  $a \in I$  داشته باشیم  $P_a \subseteq I$ . با استفاده از این تعریف، هر ایدال اول مینیمال یک  $z^\circ$  - ایدال می باشد و آشکارا اشتراک هر تعداد  $z^\circ$  - ایدال نیز

حالت خاص اگر  $P$  و  $Q$  دو ایدال اول در  $R$  باشند که تشکیل زنجیر ندهند و  $P \cap Q$  یک  $z^\circ$ -ایدال باشد، آن‌گاه  $P$  و  $Q$  هر دو  $z^\circ$ -ایدال هستند.

در صورتی که  $I$  یک  $z^\circ$ -ایدال در یک حلقه کاهشی  $R$  باشد و  $I \neq R$ ، آن‌گاه عناصر  $I$  همگی مقسوم علیه صفر هستند؛ یعنی،  $I$  غیر عادی است، چرا که مطابق گزاره ۳-۶، برای هر  $a \in I$ ، داریم  $Ann(Ann(a)) \subseteq I$ . حال اگر  $a$  مقسوم علیه صفر نباشد، آن‌گاه  $Ann(a) = (0)$  و بنابراین  $R = Ann(Ann(a)) \subseteq I$  که با فرض تناقض دارد. ولی عکس این موضوع درست نیست؛ یعنی هر ایدال غیر عادی لزوماً  $z^\circ$ -ایدال نمی‌باشد، حتی ممکن است یک ایدال غیر عادی در یک  $z^\circ$ -ایدال قرار نداشته باشد. ولی در حلقه‌های با ویژگی  $A$  این وضعیت رخ می‌دهد. می‌گوییم حلقه دارای ویژگی  $A$  است هرگاه هر ایدال غیر عادی متناهیاً تولید شده در آن دارای پوچساز ناصفر باشد. مانند قبل و کمی کلی‌تر، برای هر  $P_A, A \subseteq R$  را برابر با اشتراک همه ایدال‌های اول مینیمال شامل  $A$  در حلقه  $R$  در نظر می‌گیریم. به سادگی می‌توان دید که اگر  $A$  و  $B$  دو زیر مجموعه متناهی در حلقه  $R$  باشند و  $t \in R$ ، آن‌گاه  $P_A \subseteq P_B$  اگر و تنها اگر  $Ann(B) \subseteq Ann(A)$  و  $t \in P_A$  اگر و تنها اگر  $Ann(A) \subseteq Ann(t)$ . همچنین اگر  $P_A \subseteq P_B$ ، آن‌گاه خواهیم داشت  $P_{tA} \subseteq P_{tB}$ . با کمک این حقایق، قضیه ۴-۶ در مرجع [۲۵] ثابت شده و اثباتی دیگر با روشی متمایز در مرجع [۲۱] و با استفاده از مفاهیم نظریه مجموعه‌ها ارائه شده است.

۳-۶ گزاره: فرض کنیم  $R$  یک حلقه کاهشی،  $I$  یک ایدال در آن باشد و  $a, b \in R$ . در این صورت عبارت‌های زیر معادل هستند.

- (الف)  $I$  یک  $z^\circ$ -ایدال است.
- (ب) اگر  $P_a \subseteq P_b$  و  $b \in I$ ، آن‌گاه  $a \in I$ .
- (پ) اگر  $Ann(a) \subseteq Ann(b)$  و  $a \in I$ ، آن‌گاه  $b \in I$ .
- (ت) برای هر  $a \in I$ ،  $Ann(Ann(a)) \subseteq I$ .
- (ث)  $I = \sum_{a \in I} P_a = \bigcup_{a \in I} P_a$

مثال‌های متعددی از  $z$ -ایدال‌ها وجود دارد که  $z^\circ$ -ایدال نیستند و هر  $z^\circ$ -ایدال در یک حلقه نیز لزوماً یک  $z$ -ایدال نمی‌باشد. در واقع می‌توان ثابت کرد که هر  $z^\circ$ -ایدال در یک حلقه‌ی  $R$  یک  $z$ -ایدال است اگر و تنها اگر  $rad(R) = J(R)$  و در حالت خاص در یک حلقه کاهشی، هر  $z^\circ$ -ایدال یک  $z$ -ایدال است اگر و تنها اگر  $J(R) = (0)$ .

۴-۶ قضیه: اگر  $I$  یک  $z^\circ$ -ایدال در یک حلقه کاهشی باشد، آن‌گاه هر ایدال اول مینیمال روی  $I$  یک  $z^\circ$ -ایدال است.

به این ترتیب هر  $z^\circ$ -ایدال در یک حلقه کاهشی با شرط  $J(R) = (0)$  برابر با اشتراک  $z^\circ$ -ایدال‌های اول است. در مرجع [۲۴] ثابت شده است که عکس قضیه ۴-۶ درست نیست. اثبات گزاره زیر را نیز می‌توان در مرجع [۱۲] دید.

۵-۶ گزاره: فرض می‌کنیم  $I$  یک ایدال و  $P$  یک ایدال اول در حلقه  $R$  باشد. هرگاه  $I \cap P$  یک  $z^\circ$ -ایدال باشد، آن‌گاه یا  $I$  یا  $P$  یک  $z^\circ$ -ایدال است. در

(پ) برای هر  $a, b \in R$ ،  $P_a P_b = P_{ab}$

(ت) برای هر دو ایدال  $I$  و  $J$  در  $R$ ، اگر  $I^\circ$  و  $J^\circ$

وجود داشته باشند، آن گاه  $I^\circ J^\circ = I^\circ \cap J^\circ$

### ۷- $Z^\circ$ - ایدال‌ها در حلقه $C(X)$

به لحاظ ویژگی‌های فراوان حلقه‌ی  $C(X)$ ، ایدال‌ها در این حلقه شخصیت بارزی دارند، به خصوص این که می‌توان از خواص توپولوژیکی فضای  $X$  برای شناسایی این ایدال‌ها هم استفاده کرد. پیش‌تر دیدیم ایدال‌هایی که هم به صورت جبری و هم به صورت توپولوژیکی قابل شناسایی باشند، نشان از اهمیت آن‌هاست.  $Z^\circ$  - ایدال‌ها نیز مانند  $Z$  - ایدال‌ها در  $C(X)$  از این ویژگی برخوردارند. شخصیت توپولوژیکی  $Z^\circ$  - ایدال‌ها از آنجا ناشی می‌شود که برای هر  $f, g \in C(X)$ ،  $Ann(f) \subseteq Ann(g)$ ، اگر و تنها اگر  $\text{int}_X Z(f) \subseteq \text{int}_X Z(g)$ . اینک با استفاده از این موضوع، برای هر  $f \in C(X)$ ، می‌توان  $Z^\circ$  - ایدال‌های پایه‌ای را به صورت توپولوژیکی، یعنی به صورت

$$P_f = \{g \in C(X) : \text{int}_X Z(f) \subseteq \text{int}_X Z(g)\}$$

شناسایی کرد. حال با کمک گزاره ۶-۳، می‌توان تعریفی توپولوژیکی برای  $Z^\circ$  - ایدال‌ها ارائه داد به این ترتیب که ایدال  $I$  در  $C(X)$  یک  $Z^\circ$  - ایدال است هرگاه اگر  $f \in I$ ،  $g \in C(X)$  و  $\text{int}_X Z(f) \subseteq \text{int}_X Z(g)$ ، آن گاه داشته باشیم  $g \in I$ .  $Z^\circ$  - ایدال‌های پایه‌ای نیز مانند  $Z$  - ایدال‌های پایه‌ای در روابط زیر صدق می‌کنند.

۱-۷ گزاره: اگر  $f, g \in C(X)$ ، آن گاه

$$P_f + P_g = P_{f+g} \quad \text{و} \quad P_{fg} = P_f \cap P_g = P_f P_g$$

۶-۶ قضیه: اگر  $R$  یک حلقه کاهشی با ویژگی  $A$  باشد،

آن گاه هر ایدال غیر عادی آن در یک  $Z^\circ$  - ایدال شامل  $I$  می‌باشد.

علاوه بر این، در یک حلقه کاهشی با ویژگی  $A$

نتایج زیر معادل هستند.

۶-۷ قضیه: در یک حلقه کاهشی  $R$  با ویژگی  $A$ ،

گزاره‌های زیر معادلند.

(الف) مجموع هر دو  $Z^\circ$  - ایدال در یک ایدال غیر عادی  $R$ ، یک  $Z^\circ$  - ایدال است.

(ب) برای هر ایدال غیر عادی  $I$  در  $R$ ،  $I^\circ$  وجود دارد.

(پ) برای هر  $a$  و  $b$  در یک ایدال غیر عادی  $R$ ،

$$P_{a+b} \subseteq P_a + P_b$$

(ت) برای هر دو ایدال  $I$  و  $J$ ، اگر  $I+J$  غیر عادی باشد، آن گاه  $(I+J)_\circ = I_\circ + J_\circ$ .

در صورتی که یکی از شرایط بالا برقرار باشد، آن گاه برای هر ایدال غیر عادی  $I$  در  $R$  داریم

$$I^\circ = \sum_{P_a \subseteq I} P_a \quad \text{و} \quad I_\circ = \sum_{a \in I} P_a$$

این بخش را با دو نتیجه دیگر به پایان

می‌رسانیم که در مرجع [۲۵] اثبات شده‌اند.

۶-۸ گزاره: اگر  $R$  یک حلقه کاهشی،  $I$  و  $J$  دو ایدال

در  $R$  و  $I_\circ$  و  $J_\circ$  موجود باشند، آن گاه

$$(IJ)_\circ = (I \cap J)_\circ \subseteq I_\circ \cap J_\circ$$

۶-۹ قضیه: در یک حلقه کاهشی  $R$ ، گزاره‌های زیر

معادل هستند.

(الف) ضرب هر دو  $Z^\circ$  - ایدال در  $R$  یک  $Z^\circ$  - ایدال است.

(ب) اگر  $I$  و  $J$  دو ایدال در  $R$  و  $I_\circ$  و  $J_\circ$  موجود

باشند، آن گاه  $I_\circ \cap J_\circ = (IJ)_\circ$



$(f)_\circ = (Mf)_\circ = Pf$  پیش‌تر دیدیم که اگر  $I$  یک  $z^\circ$ -ایدآل در یک حلقه کاهشی  $R$  باشد، ایدآل‌های اول مینیمال روی  $I$  نیز  $z^\circ$ -ایدآل هستند. به عبارت دیگر هرگاه  $I$  یک  $z^\circ$ -ایدآل باشد، آن‌گاه  $\sqrt{I}$  نیز یک  $z^\circ$ -ایدآل است. در صورتی که  $\sqrt{I}$  یک  $z^\circ$ -ایدآل باشد،  $I$  یک  $\sqrt{z^\circ}$ -ایدآل نامیده می‌شود. در مرجع [۱۲] ثابت می‌شود که دو واژه " $z^\circ$ -ایدآل" و " $\sqrt{z^\circ}$ -ایدآل" در  $C(X)$  یکی است. در حقیقت هرگاه  $I$  یک ایدآل در  $C(X)$  باشد، آن‌گاه  $I$  یک  $z^\circ$ -ایدآل است اگر و تنها اگر  $\sqrt{I}$  یک  $z^\circ$ -ایدآل باشد. به معنای دیگر  $I$  در  $C(X)$  یک  $z^\circ$ -ایدآل است اگر و تنها اگر هر ایدآل اول مینیمال روی  $I$  یک  $z^\circ$ -ایدآل باشد.

هر ایدآل در  $C(X)$  دست کم شامل یک  $z^\circ$ -ایدآل می‌باشد. در واقع برای هر  $f \in C(X)$ ،  $z^\circ$ -ایدآل  $O_Z(f)$  در ایدآل اصلی  $(f)$  قرار دارد. ولی لازمه وجود بزرگ‌ترین  $z^\circ$ -ایدآل در یک ایدآل  $C(X)$ ، همان‌گونه که در بخش قبل دیدیم، این است که مجموع هر دو  $z^\circ$ -ایدآل در  $C(X)$  یک  $z^\circ$ -ایدآل باشد. در مرجع [۱۹] نشان داده شد که مجموع در  $z^\circ$ -ایدآل  $C(X)$  یک  $z^\circ$ -ایدآل است اگر و تنها اگر  $X$  یک شبه  $F$ -فضا باشد؛ یعنی، فضایی که هر متمم صفر مجموعه چگال در آن یک  $C$ -نشانه باشد. برای آگاهی و مطالعه بیشتر این فضاها، خواننده می‌تواند به مراجع [۳۲، ۳۸ و ۳۹] نیز مراجعه نماید. به این ترتیب وقتی  $X$  یک شبه  $F$ -فضا باشد، مجموع همه  $z^\circ$ -ایدآل‌های در یک ایدآل  $I$  بزرگ‌ترین  $z^\circ$ -ایدآل در  $I$  خواهد بود که آن را با  $I^\circ$  نمایش می‌دهیم. گزاره زیر که شناسایی شبه  $F$ -فضاها را از دیدگاهی متفاوت بیان می‌کند، در شناسایی جبری و

از آن‌جا که حلقه  $C(X)$  دارای ویژگی  $A$  است، بنا به قضیه ۶-۶، هر ایدآل غیر عادی  $C(X)$  در یک  $z^\circ$ -ایدآل قرار دارد، ولی با استفاده از گزاره ۷-۱، می‌توان کوچک‌ترین  $z^\circ$ -ایدآل شامل ایدآل غیر عادی  $I$  در  $C(X)$  را به دست آورد. در واقع  $J = \sum_{f \in I} Pf$  کوچک‌ترین  $z^\circ$ -ایدآل شامل  $I$  است؛ یعنی،  $I_\circ = \sum_{f \in I} Pf$ . به این ترتیب هر ایدآل ماکسیمال غیر عادی در  $C(X)$  یک  $z^\circ$ -ایدآل می‌باشد. کوچک‌ترین ایدآل شامل یک ایدآل غیر عادی  $I$  در  $C(X)$  را نیز می‌توان به صورت توپولوژیکی به شرح زیر شناسایی کرد:

$$I_\circ = \{g \in C(X) : \exists f \in I \ni \text{int}_X Z(f) \subseteq \text{int}_X Z(g)\}$$

اکنون نتایج زیر را می‌توان به راحتی نشان داد.

- ۷-۲ گزاره: فرض می‌کنیم  $I$  و  $J$  دو ایدآل غیر عادی،  $P$  یک ایدآل اول غیر عادی و  $Q$  یک ایدآل اولیه غیر عادی در  $C(X)$  باشند. در این صورت.
- (الف)- اگر  $I \subseteq J$ ، آن‌گاه  $I_\circ \subseteq J_\circ$ .
- (ب)- برای هر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $(I^n)_\circ = I_\circ$ .
- (پ)-  $(IJ)_\circ = (I \cap J)_\circ \subseteq I_\circ \cap J_\circ = I_\circ J_\circ$ .
- (ت)- اگر  $I + J$  نیز یک ایدآل غیر عادی باشد، آن‌گاه  $(I + J)_\circ = (I_\circ + J_\circ)_\circ$ .
- (ث)-  $(\sqrt{I})_\circ = I_\circ$ .
- (ج)-  $P_\circ$  و  $Q_\circ$  اول هستند.

از آن‌جا که  $(\circ) = J(C(X))$ ، پس هر  $z^\circ$ -ایدآل در  $C(X)$  یک  $z$ -ایدآل می‌باشد. از این رو برای هر مقسوم‌علیه صفر  $f \in C(X)$ ،  $z^\circ$ -ایدآل پایه‌ای  $Pf$  یک  $z$ -ایدآل است. به این ترتیب چون  $f \in Pf$ ، پس بنا به تعریف،  $Mf \subseteq Pf$  در واقع  $Pf$  کوچک‌ترین  $z^\circ$ -ایدآل شامل  $Mf$  است؛ یعنی،

(ب) هرگاه  $I$  یک  $z^\circ$ -ایدال و  $P$  یک ایدال اول در  $C(X)$  باشد به گونه‌ای که  $I$  و  $P$  تشکیل زنجیر ندهند، آن‌گاه  $P + I$  یک  $z^\circ$ -ایدال اول است.

سرانجام قضیه زیر حاصل نتیجه قضیه ۷-۶ و ویژگی مهم  $\sqrt{I+J} = \sqrt{I} + \sqrt{J}$  برای هر دو ایدال  $I$  و  $J$  در  $C(X)$  است.

**۷-۷ قضیه:** فرض می‌کنیم  $X$  یک شبه  $F$ -فضا باشد.

(الف)- اگر  $I$  یک  $z^\circ$ -ایدال و  $Q$  یک ایدال اولیه در  $C(X)$  باشد به گونه‌ای که در یک زنجیر نباشند، آن‌گاه  $I + Q$  یک  $z^\circ$ -ایدال اول است.

(ب)- اگر  $R$  و  $S$  دو ایدال اولیه در  $C(X)$  باشند به گونه‌ای که  $\sqrt{R}$  و  $\sqrt{S}$  تشکیل زنجیر ندهند، آن‌گاه  $R + S$  یک  $z^\circ$ -ایدال اول است.

**۸-  $z$ -ایدال‌ها و  $z^\circ$ -ایدال‌ها به عنوان پل‌های ارتباطی**

همان‌گونه که پیش‌تر گفتیم، یکی از اهداف مطالعه  $C(X)$ ، برقراری ارتباط میان ویژگی‌های جبری  $C(X)$  و خواص توپولوژیکی  $X$  می‌باشد. در بخش‌های قبل چند نمونه از این ارتباط‌ها را مشاهده کردیم، مثلاً دیدیم که مجموع هر دو  $z$ -ایدال نسبی یک  $z$ -ایدال نسبی است اگر و تنها اگر  $X$  یک  $P$ -فضا باشد و یا مجموع هر دو  $z^\circ$ -ایدال در  $C(X)$  یک  $z^\circ$ -ایدال است اگر و تنها اگر  $X$  یک شبه  $F$ -فضا باشد. در این بخش ارتباط‌های دیگری بین  $X$  و  $C(X)$  را که توسط  $z$ -ایدال‌ها و  $z^\circ$ -ایدال‌ها برقرار و تاکنون شناخته شده‌اند ارائه داده و برای آگاهی از ارتباط‌های پیش‌تر، خواننده را به مراجع [۴۰-۴۲] ارجاع می‌دهیم. در بخش قبل دیدیم که هر  $z^\circ$ -ایدال در  $C(X)$

توپولوژیکی  $I^\circ$  برای هر ایدال  $I$  در  $C(X)$  نیز بی‌تأثیر نیست.

**۷-۳ گزاره:** عبارت‌های زیر معادلند.

(الف)  $X$  یک شبه  $F$ -فضا است.

(ب) برای هر دو ایدال  $I$  و  $J$  در  $C(X)$ ،  $(I + J)^\circ = I^\circ + J^\circ$ .

(پ) برای هر  $f, g \in C(X)$ ،  $P_f + P_g = P_{f+g}$ .

**۷-۴ قضیه:** اگر  $X$  یک شبه  $F$ -فضا و  $I$  یک ایدال در  $C(X)$  باشد، آن‌گاه

$$I^\circ = \sum_{P_f \subseteq I} P_f = \{f \in C(X) : P_f \subseteq I\} =$$

$$\{f \in I : \text{int}_X Z(f) \subseteq \text{int}_X Z(g) \Rightarrow g \in I\}$$

وقتی فضای  $X$  یک شبه  $F$ -فضا باشد، نتایجی مشابه با آنچه در مبحث  $z$ -ایدال‌ها ارائه شد به دست می‌آید.

**۷-۵ گزاره:** فرض می‌کنیم  $X$  شبه  $F$ -فضا باشد، در این صورت عبارت‌های زیر برقرارند.

(الف)- اگر  $I \subseteq J$  دو ایدال در  $C(X)$  باشند، آن‌گاه  $I^\circ \subseteq J^\circ$ .

(ب)- اگر  $I$  یک ایدال در  $C(X)$  باشد، آن‌گاه  $\sqrt{I}^\circ = I^\circ \subseteq I^z \subseteq I \subseteq \sqrt{I} \subseteq I_z \subseteq I^\circ$ .

(پ)- هرگاه  $P$  یک ایدال اول (یا اولیه) در  $C(X)$  باشد، آن‌گاه  $P^\circ$  اول است.

(ت)- هرگاه  $P$  و  $Q$  دو ایدال اول در  $C(X)$  باشند، آن‌گاه  $(P + Q)^\circ = P^\circ + Q^\circ$ .

**۷-۶ قضیه:** فرض می‌کنیم  $X$  یک شبه  $F$ -فضا باشد، در این صورت

(الف) اگر  $P$  و  $Q$  دو ایدال اول در  $C(X)$  باشند به گونه‌ای که تشکیل زنجیر ندهند، آن‌گاه  $P + Q$  یک  $z^\circ$ -ایدال اول است.

$Z^\circ$  - ایدآل یک  $Z^\circ$  - ایدآل خواهد بود و در نتیجه هر تقریباً  $P$  - فضا یک شبه  $F$  - فضا است. در مرجع [۲۲] نشان داده شد که وقتی فضای  $X$  ناهمبند پایه‌ای (یعنی، فضایی که درون هر صفر مجموعه در آن بسته است) باشد، مجموع دو  $Z^\circ$  - ایدآل در  $C(X)$  یک  $Z^\circ$  - ایدآل است و این نتیجه می‌دهد که هر فضای ناهمبند پایه‌ای نیز شبه  $F$  - فضا است. اکنون که صحبت از فضاهای ناهمبند به میان آمد، پرسش‌های بعدی را در مورد این فضا مطرح می‌کنیم.

۵- فضاهای ناهمبند پایه‌ای چگونه توسط  $Z^\circ$  - ایدآل‌ها شناسایی می‌شوند؟

۶- فضاهای ناهمبند شدید (یعنی، فضاهایی که در آن‌ها درون هر مجموعه بسته، بسته است) چگونه توسط  $Z^\circ$  - ایدآل‌ها شناسایی می‌شوند؟

به این پرسش‌ها در مرجع [۴۳] پاسخ داده شده است، در واقع ثابت شد که فضای  $X$  ناهمبند پایه‌ای است اگر و تنها اگر هر  $Z^\circ$  - ایدآل پایه‌ای در  $C(X)$  اصلی باشد، اگر و تنها اگر هر  $Z^\circ$  - ایدآل در  $C(X)$  توسط مجموعه‌ای از خود توان‌ها تولید شود. همچنین ثابت شده است که فضای  $X$  ناهمبند شدید است اگر و تنها اگر اشتراک هر تعداد  $Z^\circ$  - ایدآل پایه‌ای در  $C(X)$  یک ایدآل اصلی باشد. برای آگاهی بیشتر از این نوع فضاهای ناهمبند، خواننده می‌تواند به مرجع [۲۹] مراجعه کند.

وقتی فضای  $X$  را تقریباً  $P$  - فضا در نظر بگیریم که  $P$  - فضا نباشد، آن‌گاه ایدآل اول  $P$  در  $C(X)$  وجود دارد که ماکسیمال نیست. اگر  $M$  ایدآل ماکسیمال یکتای شامل  $P$  باشد، آن‌گاه چون  $X$  تقریباً  $P$  - فضا است، از این رو  $M$  غیر عادی است و بنابراین یک  $Z^\circ$  - ایدآل است. به این ترتیب با انتخاب مناسب فضای  $X$ ، دست کم یک

یک  $Z$  - ایدآل است ولی عکس آن همیشه درست نیست، حتی یک  $Z$  - ایدآل غیر عادی در  $C(X)$  لزوماً یک  $Z^\circ$  - ایدآل نمی‌باشد. به این ترتیب نخستین پرسش‌هایی که به طور طبیعی مطرح خواهند بود به شرح زیرند.

۱- برای کدام فضای  $X$ ، هر ایدآل در  $C(X)$  یک  $Z$  - ایدآل  $(Z^\circ)$  است؟

۲- برای کدام فضای  $X$ ، هر ایدآل غیر عادی در  $C(X)$  یک  $Z^\circ$  - ایدآل است؟

۳- برای کدام فضای  $X$ ، هر  $Z$  - ایدآل در  $C(X)$  یک  $Z^\circ$  - ایدآل است؟

۴- برای کدام فضای  $X$ ، هر  $Z$  - ایدآل غیر عادی در  $C(X)$  یک  $Z^\circ$  - ایدآل است؟

پرسش ۱ در مرجع [۲۹] و بقیه در مرجع [۲۴] پاسخ داده شده‌اند. قبلاً نیز دیدیم که اگر هر ایدآل یک حلقه  $Z$  - ایدآل باشد، آن‌گاه حلقه منظم است و به عکس. منظم بودن حلقه  $C(X)$  معادل با  $P$  - فضا بودن  $X$  می‌باشد و به این ترتیب هر ایدآل در  $C(X)$  یک  $Z$  - ایدآل است اگر و تنها اگر  $X$  یک  $P$  - فضا باشد.  $Z^\circ$  - ایدآل بودن هر ایدآل غیر عادی در  $C(X)$  نیز معادل با  $P$  - فضا بودن  $X$  است. علاوه بر این ثابت شده است که  $X$  یک  $P$  - فضا است اگر و تنها اگر هر  $Z^\circ$  - ایدآل اول در  $C(X)$  ماکسیمال باشد، اگر و تنها اگر هر  $Z^\circ$  - ایدآل پایه‌ای در  $C(X)$  یک ایدآل اصلی باشد. پرسش‌های ۳ و ۴ یکسانند و در واقع معادل با تقریباً  $P$  - فضا بودن  $X$  هستند. همچنین این دو پرسش معادل با این هستند که بگوییم هر  $Z$  - ایدآل اول در  $C(X)$  یک  $Z^\circ$  - ایدآل است و یا  $Z$  - ایدآل‌های پایه‌ای و  $Z^\circ$  - ایدآل‌های پایه‌ای در  $C(X)$  برهم منطبق‌اند. در صورتی که هر  $Z$  - ایدآل در  $C(X)$  یک  $Z^\circ$  - ایدآل باشد، آن‌گاه مجموع هر دو

دیدیم که هر  $Z$  - ایدآل غیرعادی در  $C(X)$  یک  $Z^\circ$  - ایدآل است اگر و تنها اگر فضای  $X$  تقریباً  $P$  - فضا باشد. این بار می‌خواهیم ببینیم وقتی هر ایدآل اول غیرعادی یا هر  $Z$  - ایدآل اول غیرعادی در  $C(X)$  یک  $Z^\circ$  - ایدآل باشد چه رخ می‌دهد؟ به این ترتیب پرسش‌های بعدی به شرح زیر مطرح می‌شوند.

۱۰- برای کدام فضای  $X$ ، هر  $Z$  - ایدآل اول غیرعادی در  $C(X)$  یک  $Z^\circ$  - ایدآل است؟

۱۱- برای کدام فضای  $X$ ، هر ایدآل اول غیرعادی در  $C(X)$  یک  $Z^\circ$  - ایدآل است؟

از آنجا که برای تقریباً  $P$  - فضای  $X$ ، هر  $Z$  - ایدآل در  $C(X)$  یک  $Z^\circ$  - ایدآل است، آشکارا به ازای این فضاها، هر  $Z$  - ایدآل اول غیرعادی در  $C(X)$  نیز یک  $Z^\circ$  - ایدآل می‌باشد. به این ترتیب به نظر می‌رسد که فضاهای ضعیف‌تری برای این منظور نیز جوابگو هستند. در واقع در مرجع [۲۴] ثابت شده است که فضاهایی ضعیف‌تر به نام تقریباً  $P$  - فضاهای ضعیف پاسخ پرسش ۱۰ می‌باشند. پاسخ پرسش ۱۱ فضاهایی به نام  $\partial$  - فضا هستند که در مرجع [۲۴] مطرح شده‌اند. فضای  $X$  را  $\partial$  - فضا می‌نامیم هرگاه مرز هر صفر مجموعه در  $X$  در یک صفر مجموعه با درون تهی قرار گیرد. فضاهای متریک و فضاهای نرمال تام از این قبیل هستند و بنا به پرسش‌های ۱۰ و ۱۱ طبیعتاً هر  $\partial$  - فضا یک تقریباً  $P$  - فضای ضعیف نیز هست ولی اگر  $X$  را فشرده‌شده تک نقطه‌ای یک فضای گسسته ناشمارا بگیریم، تقریباً  $P$  - فضای ضعیف است ولی  $\partial$  - فضا نیست. پاسخ این دو پرسش به طور دقیق‌تر این گونه است که هر  $Z$  - ایدآل غیرعادی (ایدآل غیرعادی) در  $C(X)$  یک  $Z^\circ$  - ایدآل است اگر و تنها اگر فضای  $X$  تقریباً  $P$  - فضای ضعیف ( $\partial$  - فضا) باشد.

$Z^\circ$  - ایدآل اول در  $C(X)$  وجود دارد که مینیمال نیست. در مراجع [۲۲ و ۲۴] فضای  $X$  به گونه‌ای ساخته شده است که  $Z^\circ$  - ایدآل‌های اول در  $C(X)$  لزوماً نه مینیمال باشند و نه ماکسیمال. به این ترتیب پرسش‌های بعدی به طور طبیعی به شرح زیر می‌باشند.

۷- فضای  $X$  چگونه باشد تا هر  $Z$  - ایدآل اول در  $C(X)$  یا مینیمال باشد و یا ماکسیمال؟

۸- فضای  $X$  چگونه باشد تا هر  $Z^\circ$  - ایدآل اول در  $C(X)$  یا مینیمال باشد و یا ماکسیمال؟

۹- فضای  $X$  چگونه باشد تا هر  $Z^\circ$  - ایدآل اول در  $C(X)$  مینیمال باشد؟

در مرجع [۴۴]، تحت شرایط خاص برای فضاهای  $X$  که فشرده‌اند و تعداد نقاط نامنفرد آن‌ها متناهی است، ثابت شده است که هر  $Z$  - ایدآل اول  $C(X)$  یا مینیمال است و یا ماکسیمال. به پرسش ۹ در مرجع [۲۴] پاسخ داده شده و فضاهایی در ارتباط با این پرسش شناسایی شده‌اند که  $Z^\circ$  - برشی نام دارند. فضاهای متریک و ناهمبند پایه‌ای مثال‌هایی از فضاهای  $Z^\circ$  - برشی هستند. در واقع وقتی فضای  $X$  متریک و یا ناهمبند پایه‌ای باشد، هر  $Z^\circ$  - ایدآل اول در  $C(X)$  مینیمال خواهد بود. به پرسش ۸ نیز در مرجع [۲۴] پاسخ داده شده است و در این ارتباط فضاهایی ضعیف‌تر از  $Z^\circ$  - برشی به نام  $Z^\circ$  - نیم برشی شناسایی شده‌اند. فضاهای فشرده شده تک نقطه‌ای یک فضای گسسته ناشمارا مثال‌هایی از  $Z^\circ$  - نیم برشی‌اند که  $Z^\circ$  - برشی نیستند. وقتی فضای  $X$  این گونه باشد، آن‌گاه هر  $Z^\circ$  - ایدآل اول در  $C(X)$  یا مینیمال است و یا ماکسیمال و  $Z^\circ$  - ایدآل اول در  $C(X)$  وجود دارد که مینیمال نیست.

*functions*, Math. Zeitschr, 72 (1960) 399-409.

[8] Gillman, L. and Henriksen, M., *Concerning rings of continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 77 (1954) 340-362.

[9] Henriksen, M. and Jerison, M., *The space of minimal prime ideals of a commutative ring*, Trans. Amer. Math. Soc., 115 (1965) 110-130.

[10] Hewitt, E., *Rings of real-valued continuous functions I*, Trans. Amer. Math. Soc., 64 (1948) 54-99.

[11] Mason, G., *Ideals and prime ideals*, J. Algebra, 26 (1973) 280-297.

[12] Azarpanah, F. and Mohamadian, R.,  $\sqrt{z}$ -ideals and  $\sqrt{z^\circ}$ -ideals in  $C(X)$ , Acta Math. Sinica, English Series, 23, 6 (2007) 989-996.

[13] Mason, G., *Prime  $z$ -ideals of  $C(X)$  and related rings*, Canad. Math. Bull., 23, 4 (1980) 437-443.

[14] Mulero, M.A., *Algebraic properties of rings of continuous functions*, Fund. Math., 149 (1996) 55-66.

[15] Gillman, L., *Countably generated ideals in rings of continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960) 660-666.

[16] De Marco, G., *On the countably generated  $z$ -ideals of  $C(X)$* , Proc. Amer. Math. Soc. 31 (1972) 574-576.

[17] LeDonne, A., *On a question concerning countably generated  $z$ -ideals of  $C(X)$* , Proc. Amer. Math. Soc., 80 3 (1980) 505-510.

در خصوص  $z$ -ایدال‌ها و  $z^\circ$ -ایدال‌های حلقه  $C(X)$ ، به عنوان پل‌های ارتباطی و همچنین در خصوص ماهیت و ساختار  $z$ -ایدال‌ها و  $z^\circ$ -ایدال‌های  $C(X)$  پرسش‌های دیگر مطرح است که به دلیل طولانی شدن مقاله به همین بسنده می‌کنیم. حلقه  $C(X)$  با ساختار زیبای خود می‌تواند از دیدگاه‌های مختلف، زمینه‌ای مناسب و ایده‌آل برای پژوهش باشد. این نوشتار با این هدف نگاشته شده است تا علاقمندان، به ویژه جوانان آشنایی بیش‌تر با حلقه‌های توابع پیوسته پیدا کنند.

### مراجع

[1] Gelfand, I. and Kolmogoroff, A.N., *On rings of continuous functions on topological spaces*, C.R. (Doklady) Acad. Sci. URSS. 22 (1939) 11-15.

[2] Shilov, G.E., *Ideals and subrings of the ring of continuous functions*, C.R. (Doklady) Acad. Sci. URSS. 22 (1939) 7-10.

[3] Kohls, C.W., *Ideals in rings of continuous functions*, Fund. Math., 45 (1957) 28-50.

[4] Kohls, C.W., *Prime ideals in rings of continuous functions*, Illinois J. Math., 2 (1958) 505-536.

[5] Kohls C.W., *Prime ideals in rings of continuous functions II*, Duke Math. J., 25 (1958) 447-458.

[6] Dietrich, W., *On the ideal structure of  $C(X)$* , Trans. Amer. Math. Soc. 152 (1970) 61-77.

[7] Gillman, L. and Kohls, C.W., *Convex and pseudoprime ideals in rings of continuous*

- [28]Engelking, R., *General Topology*, Heldermann-Verlag, (1989).
- [29]Gillman, L. and Jerison, M., *Rings of continuous functions*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, (1976).
- [30]Willard, S., *General Topology*, Addison Wesley, Reading Mass., (1970).
- [31]Walker, R.C., *The Stone-Cech compactification*, Springer-Verlag Mass., 1970.
- [32]Rudd, D., *On two sum theorems for ideals of  $C(X)$* , Michigan Math. J., 17 (1970) 139-141.
- [33]Azarpanah, F. *Essential ideals in  $C(X)$* , Period. Math. Hangar. 31, 2 (1995) 105-112.
- [34]Azarpanah, F. *Intersection of essential ideals in  $C(X)$* , Proc. Amer. Math. Soc., 125 (1997) 2149-2154.
- [35]Azarpanah, F., *On almost  $P$ -spaces*, Far East J. Math. Sci., Special volume (2000) 121-132.
- [36]Levy, R., *almost  $P$ -spaces*, Canad. J. Math., 2 (1977) 284-288.
- [37]Veksler, A.I.,  *$P'$ -points  $P'$ -sets,  $P'$ -spaces, a new class of order-continuous measures and functions*, Sov. Math. Dokl, 14 (1973) 1445-1450.
- [38]Huijsmans, C.B. and DePagter, B., *On  $z$ -ideals and  $d$ -ideals in Riesz spaces I*, Indag. Math., 42 (1980) 183-195.
- [39]Dashiel, F., Hager, A. and Henriksen, M., *Order-Cauchy completions of rings and vector lattices of continuous functions*, Canad. J. Math., XXXII 3 (1980) 657-685.
- [18]LeDonne, A., *On countably generated  $z$ -ideals of  $C(X)$  for first countable spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 82, 2 (1981) 280-282.
- [19]De Pagter, B., *On  $z$ -ideals and  $d$ -ideals in Riesz spaces III*, Indag Math., 43(1981), 409-422.
- [20]Mason, G., *Prime ideals and quotient rings of reduced rings*, Math. Japonica, 34, 6 (1989) 941-956.
- [21]Azarpanah, F., Karamzadeh, O.A.S. and Rezai Aliabad, A., *On ideal consisting entirely of zerodivisors*, Comm. Algebra, 28, 2 (2000) 1061-1073.
- [22]Azarpanah, F., Karamzadeh, O.A.S. and Rezai Aliabad, A., *On  $z^\sim$ -ideals in  $C(X)$* , Fund. Math., 160 (1999) 15-25.
- [23]Azarpanah, F. and Henriksen, *When is the set of  $d$ -ideals closed under addition? The first Turkish international conference on topology and its application*, Istanbul University, (2000).
- [24]Azarpanah, F. and Karavan, M., *On nonregular ideals and  $z^\sim$ -ideals in  $C(X)$* , Cech. Math. J., 55, 130 (2005) 397-407.
- [۲۵]آذرپناه، فریبرز و افروز، سوسن،  $Z$  - ایدال‌ها، طرح تحقیقاتی، دانشگاه شهید چمران اهواز، سال ۱۳۸۵، شماره ۵۷۲.
- [26]Atiyah, M.F. and MacDonald, I.G., *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, Readin Mass. (1969).
- [27]Kaplansky, I., *Commutative rings*, Allyn and Bacon Inc., Buston, (1970).

- [43]Azarpanah, F. and Karamzadeh, O.A.S., *Algebraic characterizations of some disconnected spaces*, Italian J. Pure and Applied Math., 12 (2002) 155-168.
- [44]Henriksen, M., Martinez, J. and Woods, R.G., *Spaces  $X$  in which all prime  $z$ -ideals of  $C(X)$  are minimal or maximal*, Comment. Math. Univ. Carolinae, 44, 2 (2003) 261-294.
- [40]Aliabad, A.R., Azarpanah, F. and Paimann, M.,  *$z^\circ$ ,  $z$ -ideals in the factor rings of  $C(X)$* , Acta Math. Sinica, in press.
- [41]Azarpanah, F. Karamzadeh, O.A.S. and Rahmati, S.,  *$C(X)$  vs.  $C(X)$  modulo its Socle* Colloquium Mathematicum, 111, 2 (2008) 315-336.
- [42]Karamzadeh, O.A.S. and Rostami, M., *On the intrinsic topology and some related ideals of  $C(X)$* , Proc. Amer. Math. Soc., 93, 1 (1985) 179-184.