تبدیل رده‌هایی از مسائل برنامه‌ریزی کسری به برنامه‌ریزی مخروط مرتبهٔ دوم و حل آن توسط روش نقطهٔ درونی کاهش پتانسیل

سهراب عفتی و مهدی مسروری‌مقدم

گروه ریاضی- دانشگاه تربیت معلم سبزوار

پست الکترونیکی:effati@sttu.ac.ir

چکیده

در این مقاله ابتدا برنامه‌ریزی مخروط مرتبهٔ دوم را معرفی می‌کنیم. سپس رده‌هایی از مسائل برنامه‌ریزی‌های کسری را به مسائل از نوع برنامه‌ریزی مخروط مرتبهٔ دوم تبدیل و از روش نقطهٔ درونی کاهش پتانسیل حل می‌کنیم. با حل این دسته از مسائل جواب بهینهٔ مسألهٔ اصلی به‌دست می‌آید.

واژه‌های کلیدی: *برنامه‌ریزی مخروط مرتبهٔ دوم، الگوریتم کاهش پتانسیل، برنامه‌ریزی کسری، تابع مانع، تابع پتانسیل*

مقدمه

در سال ۱۹۹۸ بوید[1] و همکاران او [۱] در مورد تبدیل رده‌هایی از مسائل بهینه‌سازی و کاربردهای آن نظیر طراحی وزن آرایه آنتن، بهینه‌سازی نیروی پنجه زدن و طراحی فیلتر و غیره به برنامه‌ریزی مخروط مرتبهٔ دوم مطالبی بیان کردند. در سال ۲۰۰۲ آکربلد[2] [۲] از برنامه‌ریزی مخروط مرتبهٔ دوم به عنوان الگوریتمی برای حل کنترل‌های پیشگویانه استفاده کرد و سرانجام در سال ۲۰۰۳ وانگ[3] و ترلاکی[4] [۳] روش‌های نقطهٔ درونی را برای حل برنامه‌ریزی مخروط مرتبهٔ دوم به‌کار بردند. ما در این مقاله از برنامه‌ریزی مخروط مرتبهٔ دوم برای حل رده‌هایی از مسائل برنامه‌ریزی کسری استفاده می‌کنیم. فرم کلی برنامه‌ریزی مخروط مرتبهٔ دوم به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} &\min\ f^T x \\ &s.t.: \|A_i x + b_i\| \le c_i x + d_i, \quad i = 1,\dots,N \end{aligned} \qquad (۱)$$

که در آن $f \in R^n$، $A_i \in R^{(n_i - 1)\times n}$، $b_i \in R^{n_i - 1}$ و $c_i \in R^n$، $d_i \in R$، پارامترهای مسأله هستند. نرمی که در قیود به کار رفته است، نرم استاندارد اقلیدسی است، یعنی: $\|u\| = (u^T u)^{\frac{1}{2}}$. یک مخروط مرتبهٔ دوم استاندارد از بعد k به صورت زیر تعریف می‌شود :

1- Boyd
2- Akerblad
3- Wang
4- Terlaky

$$c_k = \left\{ \begin{bmatrix} u \\ t \end{bmatrix} \middle| \; u \in R^{k-1}, t \in R, \|u\| \le t \right\}.$$

برای $k=1$ مخروط مرتبهٔ دوم بالا به صورت زیر می‌باشد:

$$c_1 = \{ t \mid t \in R, t \ge 0 \}.$$

مجموعه نقاطی که در یک قید مخروط مرتبهٔ دوم صدق می‌کنند نقش نگاشت زیر است:

$$\|A_i x + b_i\| \le c_i^T x + d_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_i \\ c_i^T \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_i \\ d_i \end{bmatrix} \in C_{n_i}$$

که منظور از C_{n_i} مخروط مرتبهٔ دوم از بعد n_i است که مجموعه‌ای محدب است. بنابراین برنامه‌ریزی مخروط مرتبهٔ دوم SOCP[1] یک برنامه‌ریزی محدب است، زیرا تابع هدف یک تابع محدب بوده و قیود مخروط مرتبهٔ دوم نیز یک مجموعه محدب را تعریف می‌کنند (برای توضیحات بیش‌تر به مرجع [۱] مراجعه کنید).

روش نقطهٔ درونی اولیه- دوگان

در این بخش دوگان مساله SOCP (۱) را معرفی می‌کنیم. سپس از روش نقطهٔ درونی کاهش پتانسیل اولیه- دوگان نستروف و نمیروسفکی[2] در [۴] برای حل این مسائل استفاده می‌کنیم.

دوگان SOCP

در این قسمت با تغییر متغیر

$$u_i = A_i x + b_i, \quad t_i = c_i^T x + d_i$$

مسألهٔ اولیه به فرم ساده زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} &\min f^T x \\ &s.t. \quad \|u_i\| \le t_i, \; i = 1, \dots, N \end{aligned} \tag{۲}$$

همچنین دوگان SOCP به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} \max \quad & -\sum_{i=1}^{N} \left(b_i^T z_i + d_i w_i \right) \\ s.t. \quad & \sum_{i=1}^{N} \left(A_i^T z_i + c_i w_i \right) = f \\ & \|z_i\| \le w_i \quad i = 1, .., N \end{aligned} \tag{۳}$$

دوگان SOCP (۳) همچنین یک مسألهٔ برنامه‌ریزی محدب است، مقدار بهینهٔ SOCP اولیه را با P^* نمایش می‌دهیم و همچنین قرارداد می‌کنیم که $P^* = +\infty$. اگر مسئله نشدنی باشد و مقدار بهینه دوگان را با d^* نمایش می‌دهیم و زمانی که مسألهٔ دوگان نشدنی باشد، $d^* = -\infty$ است. اگر یک xای وجود داشته باشد که در همه قیود در مسألهٔ اولیه صدق کند شدنی اولیه نامیده می‌شود و اگر یک x شدنی وجود داشته باشد که در همهٔ قیود به صورت نامساوی اکید صدق کند آن x اکیداً شدنی نامیده می‌شود. بردارهای z و w شدنی دوگان نامیده می‌شوند اگر آن‌ها در قیود (۳) صدق کنند و اکیداً شدنی نامیده می‌شوند اگر آن‌ها در قیود نامساوی (۳) به طور اکید صدق کنند. برای توضیحات بیش‌تر در مورد مسألهٔ دوگان برنامه‌ریزی مخروط مرتبهٔ دوم به مراجع [۲ و ۳] مراجعه کنید.

مطالب اساسی درباره دوگانی

۱. **دوگانی ضعیف** : $p^* \ge d^*$

۲. **دوگانی نیمه قوی:** اگر مسألهٔ اولیه (یا دوگان) اکیداً شدنی و از پایین (یا از بالا) کراندار باشد در این صورت $p^* = d^*$.

۳. **دوگانی قوی:** اگر مسائل اولیه و دوگان اکیداً شدنی باشند آن‌گاه نقاط شدنی اولیه و دوگان وجود دارند که مقادیر بهینه مساوی به‌دست می‌دهند.

ما فقط اولین مورد را ثابت می‌کنیم و برای اثبات موارد ۲ و ۳ به مرجع [۴] مراجع کنید. تفاوت بین توابع هدف

1- Second Order Cone Programming
2- Nestrov and Nemirosvky

اولیه و دوگان، شکاف دوگانی مربوط به متغیرهای (x,z,w) می‌نامند و با $\eta(x,z,w)$ یا η نمایش می‌دهیم.

$$\eta(x,z,w) = f^T x + \sum_{i=1}^{N}\left(b_i^T z_i + d_i w_i\right)$$

حال طبق دوگانی ضعیف، شکاف دوگانی همیشه به ازای متغیرهای (x,z,w) نامنفی است، زیرا با استفاده از مقدار f که در قید مسألهٔ دوگان (۳) داده شده است، داریم :

$$\eta(x,z,w) = \sum_{i=1}^{N}\left(z_i^T\,(A_i x + b_i) + w_i\left(c_i^T x + d_i\right)\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\left(z_i^T u_i + t_i w_i\right)$$

هر جمله در مجموع سمت راست نامنفی است، زیرا

$$z_i^T u_i + w_i t_i \ge -\|z_i\|\,\|u_i\| + w_i t_i \ge 0\,.$$

نامساوی اول از نامساوی کوشی شوارتز نتیجه می‌شود و دومین نامساوی از این حقیقت که $w_i \ge \|z_i\|,\, t_i \ge \|u_i\|$ نتیجه می‌شود.

شکاف دوگان صفر است اگر و فقط اگر شرایط زیر برای هر i برقراراباشد:

$$\|u_i\| < t_i \quad \Rightarrow \quad w_i = \|z_i\| = 0 \tag{۴}$$

$$\|z_i\| < w_i \quad \Rightarrow \quad t_i = \|u_i\| = 0 \tag{۵}$$

$$\|z_i\| = w_i \quad , \quad \|u_i\| = t_i \quad \Rightarrow \quad w_i u_i = -t_i z_i \tag{۶}$$

شرایط (۴)-(۶) شرایط کمبود مکمل بین جواب‌های اولیه و دوگان در برنامه‌ریزی خطی را تعمیم می‌دهند و همچنین شرایط کافی برای بهینگی را نتیجه می‌دهند. یک نقطه شدنی بهینه است اگر برای هر

$$u_i = A_i x + b_i\,,\quad t_i = c_i^T x + d_i$$

متغیرهای w_i و z_i وجود داشته باشند به طوری که یکی از (۴)، (۵) و (۶) برقرار باشند. (لازم به ذکر است که اگر مسائل اولیه و دوگان اکیداً شدنی باشند آن‌گاه شرایط فوق شرط لازم هم هستند برای اثبات به مرجع [۴] مراجعه کنید).

تابع مانع برای مخروط مرتبهٔ دوم

برای مخروطهای مرتبهٔ دوم که اشتراک آن‌ها فضای شدنی مسائل اولیه و دوگان را به وجود می‌آورند، تابع مانع برای هر زوج $t \in R$ و $u \in R^{m-1}$ را به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\phi(u,t) = \begin{cases} -\log\left(t^2 - \|u\|^2\right) & \|u\| \le t \\ \infty & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تابع $\phi(u,t)$ متناهی است اگر و فقط اگر $(\|u\| < t), (u,t) \in C_m$ و $\phi(u,t)$ به ∞ میل می‌کند زمانی که (u,t) به مرز C_m نزدیک می‌شود. همچنین این تابع در درون مخروط مرتبهٔ دوم، هموار و محدب است و مشتق‌های اول و دوم آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\nabla\phi(u,t) = \frac{2}{\left(t^2 - u^T u\right)}\begin{bmatrix} u \\ -t \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2\phi(u,t) = \frac{2}{\left(t^2 - u^T u\right)^2}\begin{bmatrix} (t^2 - u^T u)I + 2u^T u & -2tu \\ -2tu & t^2 + u^T u \end{bmatrix}.$$

تابع پتانسیل اولیه- دوگان

در این بخش یک تابع پتانسیل اولیه- دوگان را تعریف می‌کنیم. یکی از دلایل تعریف این تابع پتانسیل ایجاد یک کران بالا برای شکاف دوگانی است که به صورت زیر تعریف می‌شود (برای جزئیات بیش‌تر به مرجع [۴] مراجعه کنید):

$$\varphi(x,z,w) = \left(2N + \nu\sqrt{2N}\right)\log\eta(x,z,w)$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\left(\phi(u_i,t_i) + \phi(z_i,w_i)\right) - 2N\,\log N$$

در تابع پتانسیل بالا، $\nu \geq ۱$ یک پارامتر است و رابطه وزنی بین عبارت فاصلهٔ دوگانی و تابع انحراف از مرکزیت، $\psi(x,z,w)$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\psi(x,z,w)=\sum_{i=۱}^{N}\left(\phi(u_i,t_i)+\phi(z_i,w_i)\right) -۲N\log N+۲N\log\eta(x,z,w)$$

تابع ψ برای هر (x,z,w) شدنی نامنفی است. برای جزئیات بیش‌تر به مرجع [۴] مراجعه کنید. با استفاده از مرجع [۴] رابطهٔ زیر را بین فاصلهٔ دوگانی و تابع پتانسیل داریم :

$$\eta(x,z,w)\leq e^{\left(\phi(x,z,w)/\nu\sqrt{N}\right)} \qquad (۷)$$

الگوریتم کاهش پتانسیل اولیه– دوگان

روش کاهش پتانسیل اولیه– دوگان بااستفاده از نامساوی (۷) بر اساس کاهش پتانسیل $\varphi(x,z,w)$ پایه‌گذاری شده است. در این روش جهت‌های جستجو کاهش‌دهندهٔ تابع پتانسیل توسط حل دستگاه معادلات خطی زیر محاسبه می‌گردد که از طریق روش نیوتن به‌دست آمده‌اند. برای چگونگی تشکیل این دستگاه معادلات می‌توانید به مرجع [۴] مراجعه کنید:

$$\begin{bmatrix} H^{-۱} & \overline{A} \\ \overline{A}^T & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta Z \\ \delta x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -H^{-۱}(\rho Z+g) \\ ۰ \end{bmatrix} \qquad (۸)$$

که در آن ∂Z و ∂x متغیرها، $\rho=\dfrac{\left(۲N+\nu\sqrt{۲N}\right)}{\eta}$ و ماتریس‌ها و بردارهای A ، H، g و $\overline{A}$ چنین تعریف می‌شوند:

$$H=\begin{bmatrix} \nabla^۲\phi(u_۱,t_۱) & \cdots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \nabla^۲\phi(u_N,t_N) \end{bmatrix}, g=\begin{bmatrix} \nabla\phi(u_۱,t_۱) \\ \vdots \\ \nabla\phi(u_N,t_N) \end{bmatrix}$$

(۱۰)

$$z'=\left[z_۱,w_۱,\ldots,z_N,w_N\right],$$

$$\delta z'=\left[\delta z_۱,\delta w_۱,\ldots,\delta z_N,\delta w_N\right], \quad \overline{A}=\begin{bmatrix} A_۱ \\ C_۱^T \\ \vdots \\ A_N \\ C_N^T \end{bmatrix}$$

ضمناً توجه کنید که ماتریس‌هایH، A و g ماتریس‌های قطری بلوکی هستند.

مراحل الگوریتم

در روش نقطهٔ درونی ابتدا بایستی یک نقطهٔ اکیداً شدنی به‌دست آوریم. سپس برای یک $\varepsilon>۰$ (دقت) و پارامتر $\nu\geq ۱$ داده شده مراحل الگوریتم را به صورت زیر تکرار می‌کنیم.

۱) جهت‌های جستجو را توسط حل دستگاه (۸) پیدا کنید.

۲) جهت جستجو در صفحهٔ q و p را پیدا کنید که $\varphi(x+p\partial x,z+q\partial z,w+q\partial w)$ را کمینه کند.

۳) نقاط جدید را به‌دست آورید، $w=w+q\partial w, z=z+q\partial z, x=x+p\partial x$.

۴) اگر $\eta(x,z,w)\leq\varepsilon$ به گام (۱) بروید.

در هر تکرار الگوریتم مقدار تابع پتانسیل با یک مقدار ضمانت شده کاهش می‌یابد، یعنی :

$$\phi\left(x^{(k+۱)},z^{(k+۱)},w^{(k+۱)}\right)\leq\phi\left(x^k,z^k,w^k\right)-\delta \quad (۹)$$

که در آن δ به نقطه ابتدای مسأله وابسته نیست، برای اثبات رابطهٔ بالا به مرجع [۴] مراجعه کنید. با ترکیب رابطهٔ (۹) و فاصلهٔ دوگانی که لازم است حداکثر به دقت ε برسد ($\eta(x,z,w)\leq\varepsilon$) به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$k\leq\frac{\nu\sqrt{۲N}\log\left(\dfrac{\eta^{(۰)}}{\varepsilon}\right)+\psi\left(x^{(۰)},z^{(۰)},w^{(۰)}\right)}{\delta}. \quad (۱۰)$$

الگوریتم بیش‌تر از $O\left(\sqrt{N}\right)$ مرحله طول نمی‌کشد تا شکاف دوگانی را با عامل داده شده کاهش دهد، برای جزئیات بیش‌تر در مورد روش نقطهٔ درونی اولیه دوگان به مرجع [۴] مراجعه کنید.

برنامه‌ریزی کسری

در این بخش رده‌های خاصی از مسائل برنامه‌ریزی کسری را مورد بررسی قرار می‌دهیم که بتوان آن‌ها را به مسائل از نوع برنامه‌ریزی مخروط مرتبهٔ دوم تبدیل کرد. روش‌هایی که برای حل مسائل برنامه‌ریزی‌های محدب به کار می‌روند، برای حل برنامه‌ریزی‌های کسری محدب که ناحیه شدنی آن‌ها نه باز و نه بسته است، کارا نیستند. در این بخش رده‌هایی از مسائل برنامه‌ریزی کسری را با تغییر متغیر به مسائلی از نوع برنامه‌ریزی مخروط مرتبهٔ دوم تبدیل و با روش نقطهٔ درونی کاهش پتانسیل حل می‌نماییم.

تبدیل رده‌هایی از مسائل برنامه‌ریزی کسری به SOCP

برای تبدیل برنامه‌ریزی کسری به برنامه‌ریزی مخروط مرتبهٔ دوم به نامساوی زیر نیاز داریم :

اگر $x,y>0$ و w یک بردار حقیقی دلخواه باشد، آن‌گاه داریم:

$$w^T w \le xy \;\Leftrightarrow \left\| \begin{bmatrix} 2w \\ x-y \end{bmatrix} \right\| \le x+y \qquad (11)$$

که در آن $w^T w \le xy$ یک قید هذلولوی نامیده می‌شود.

برنامه‌ریزی کسری با صورت ثابت مثبت و مخرج خطی همراه با قیود درجهٔ دوم

صورت کلی یک مسألهٔ برنامه‌ریزی کسری با صورت ثابت مثبت و مخرج به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} &\min \sum_{i=1}^{p} \frac{c}{a_i^T x + b_i} \\ &s.t.\;\; c_i^T x + d_i \ge 0,\;\; i=1,\dots,q \\ &\qquad a_i^T x + b_i > 0,\;\; i=1,\dots,p \end{aligned} \qquad (12)$$

مسألهٔ برنامه‌ریزی کسری بالا جزء مسائل برنامه‌ریزی محدب است، زیرا هر کسر در تابع هدف یک تابع محدب است, چون که برای هر i, $a_i^T x + b_i > 0$ و ناحیه شدنی نیز محدب است. با معرفی متغیر t_i، $t_i > 0$، $\frac{c}{a_i^T x + b_i} \le t_i$ مسألهٔ (۱۲) به مسألهٔ زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} &\min \sum_{i=1}^{p} t_i \\ &s.t.\;\; \frac{c}{a_i^T x + b_i} \le t_i,\, t_i > 0,\, a_i^T x + b_i > 0,\, i=1,\dots,p \\ &\qquad c_i^T x + d_i \ge 0, \qquad\qquad i=1,\dots,q \end{aligned} \qquad (13)$$

حال با فرض

$$(j=1,\dots,p)\quad x_i = a_i^T x + b_i \;\;، y_i = t_i \;\;، w_i = \sqrt{c}$$

و با به‌کار بردن نامساوی (۱۱) داریم:

$$\left\| \begin{bmatrix} 2\sqrt{c} \\ a_i^T x + b_i - t_i \end{bmatrix} \right\| \le a_i^t x + b_i + t_i\,, \quad i=1,\dots,p$$

بنابراین مسألهٔ برنامه‌ریزی کسری (۱۳) به برنامه‌ریزی مخروط مرتبهٔ دوم زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} &\min \sum_{i=1}^{p} t_i \\ &s.t.\;\; \left\| \begin{bmatrix} 2\sqrt{c} \\ a_i^T x + b_i - t_i \end{bmatrix} \right\| \le a_i^T x + b_i + t_i\,, \quad i=1,\dots,p \\ &\qquad c_i^T x + d_i \ge 0, \qquad i=1,\dots,q \end{aligned} \qquad (14)$$

حال مسائل برنامه‌ریزی مخروط مرتبهٔ دوم (۱۴) را با روش نقطهٔ درونی کاهش پتانسیل حل نموده و جواب بهینه آن را به‌دست می‌آوریم.

مسائل برنامه‌ریزی با تابع هدف مجموع توابع کسری (صورت ثابت مثبت و مخرج خطی) و درجهٔ دوم

نوع دیگری از مسائل را که می‌توان به برنامه‌ریزی مخروط مرتبهٔ دوم تبدیل کرد، مسائلی دارای تابع هدف شامل مجموعی از توابع کسری (با صورتی ثابت مثبت و مخرجی خطی) و چند جمله‌ای درجهٔ دوم است. ابتدا با معرفی متغیرهای جدید تابع هدف را به صورت قیود مخروط مرتبهٔ دوم تبدیل می‌کنیم. در حالت کلی مسألهٔ برنامه‌ریزی کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \ & \sum_{i=1}^{p} \frac{c}{a_i^T x + b_i} + x^T P_0 x + 2q_0 x + r \\ s.t. \ & a_i^T x + b_i > 0 \qquad i = 1,\dots,p \\ & c_i^T x + d_i \geq 0 \qquad i = 1,\dots,q \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

که در آن $q_0 \in R^n$ ، $P_0 \in R^{n\times n}$ یک ماتریس معین مثبت است. حال با معرفی متغیرهای t'، t_i، $i = 1,\dots,p$ و استفاده از نامساوی (۱۱), مسألهٔ (۱۵) به مسألهٔ SOCP زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \ & \sum_{i=1}^{p} t_i + t' \\ s.t. \ & \left\| \begin{bmatrix} 2\sqrt{c} \\ a_i^T x + b_i - t_i \end{bmatrix} \right\| \leq a_i^T x + b_i + t_i , \quad i = 1,\dots,p \\ & \left\| P_0^{\frac{1}{2}} x + q_0^{\frac{-1}{2}} q_0 \right\| \leq t' \\ & c_i^T x + d_i \geq 0, \qquad i = 1,\dots,q \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

مسائل برنامه‌ریزی کسری محدب با صورت درجهٔ دوم و مخرج خطی و قیود درجهٔ دوم

در این قسمت به نوع دیگری از مسائل برنامه‌ریزی کسری می‌پردازیم که در صورت دارا بودن شرایطی قابل تبدیل به SOCP هستند.

مسألهٔ برنامه‌ریزی کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \ & \sum_{i=1}^{p} \frac{\|F_i x + g_i\|^2}{a_i^T x + b_i} \\ s.t. \ & a_i^T x + b_i > 0, \quad i = 1,\dots,p, \\ & c_i^T x + d_i \geq 0, \quad i = 1,\dots,q. \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

که در آن $g_i \in R^{q_i}$، $F_i \in R^{q_i \times n}$، $i = 1,\dots,p$ می‌باشند. اکنون با معرفی متغیرهای جدید t_i داریم:

$$\frac{\|F_i x + g_i\|^2}{a_i^T x + b_i} \leq t_i , \quad i = 1,\dots,p$$

آن‌گاه مسأله به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \ & \sum_{i=1}^{p} t_i \\ s.t. \ & (F_i x + g_i)^T (F_i x + g_i) \leq t_i \left(a_i^T x + b_i\right), \ i = 1,\dots,p, \\ & a_i^T x + b_i > 0, \qquad i = 1,\dots,p, \\ & c_i^T x + d_i \geq 0, \qquad i = 1,\dots,q. \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

حال با قرار دادن :

$$w_i = F_i x + g_i , z_i = a_i^T x + b_i , \ y_i = t_i , i = 1,\dots,p$$

با استفاده از نامساوی (۱۱) مسألهٔ (۱۸) به SOCP زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \ & \sum_{i=1}^{p} t_i \\ s.t. \ & \left\| \begin{bmatrix} 2(F_i x + g_i) \\ a_i^T x + b_i - t_i \end{bmatrix} \right\| \leq a_i^T x + b_i + t_i , \ i = 1,\dots,p \\ & c_i^T x + d_i \geq 0, \qquad i = 1,\dots,q \end{aligned} \qquad (۱۹)$$

حال حالتی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که صورت تابع هدف به فرم نرم-۲ با توان ۲ نیست. اگر ما بتوانیم یک فرم درجهٔ دوم را مجموع یک جمله به صورت نرم-۲ به توان ۲ به علاوه یک مقدار عددی بنویسیم که آن مقدار عددی نامنفی است. در این صورت می‌توان یک چنین فرم درجهٔ دوم را به SOCP تبدیل کرد. بدین منظور مسألهٔ برنامه‌ریزی کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
\min\ & \sum_{i=۱}^{p} \frac{x^T p_i x + ۲q_i x + r_i}{a_i^T x + b_i} \\
s.t.\ & a_i^T x + b_i > ۰,\quad i = ۱,\dots,p \\
& c_i^T x + d_i \ge ۰,\quad i = ۱,\dots,q \\
& x^T Q_i x + ۲m_i x + l_i \le ۰,\quad i = ۱,\dots,k
\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

که در آن ماتریس‌های p_i $(i = ۱,\dots,p)$ و Q_i $(i = ۱,\dots,k)$ معین مثبت هستند و $m_i \in R^n$، $Q_i \in R^{n\times n}$ $(i = ۱,\dots,k)$. فرم درجهٔ دوم در مسألهٔ (۲۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$x^T p_i x + ۲q_i x + r_i = \left\| p_i^{\frac{۱}{۲}} x + p_i^{\frac{-۱}{۲}} q_i \right\|^۲ + r_i - q^T p_i q_i$$

که در آن مقدار عـددی $r_i - q_i^T p_i q_i$، $i = ۱,\dots,p$ بایـد مثبت باشد تا مسألهٔ (۲۰) قابل تبدیل به SOCP باشد. پس

$$\frac{x^T p_i x + ۲q_i x + r_i}{a_i^T x + b_i} = \frac{\left\| p_i^{\frac{۱}{۲}} x + p_i^{\frac{-۱}{۲}} q_i \right\|^۲}{a_i^T x + b_i} + \frac{r_i - q_i^T p_i q_i}{a_i^T x + b_i},\quad i = ۱,\dots,p$$

حال با معرفی متغیرهای جدید t_i, t_i'، $i = ۱,\dots,p$ و با فرض:

$$\frac{\left\| p_i^{\frac{۱}{۲}} x + p_i^{\frac{-۱}{۲}} q_i \right\|^۲}{a_i^T x + b_i} \le t_i, \qquad \frac{r_i - q_i^T p_i q_i}{a_i^T x + b_i} \le t_i'$$

مسألهٔ بالا به SOCP زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
\min\ & \sum_{i=۱}^{p} t_i + t_i' \\
s.t.\ & \left\| \begin{bmatrix} ۲\left(p_i^{\frac{۱}{۲}} x + p_i^{\frac{-۱}{۲}} q_i \right) \\ a_i^T x + b_i - t_i \end{bmatrix} \right\| \le a_i^T x + b_i + t_i,\quad i = ۱,\dots,p \\
& \left\| \begin{bmatrix} ۲\left(r_i - q_i^{۱} p_i^{-۱} q_i \right)^{\frac{۱}{۲}} \\ a_i^T x + b_i - t_i' \end{bmatrix} \right\| \le a_i^T x + b_i + t_i',\ i = ۱,\dots,p \\
& \left\| \begin{bmatrix} Q_i^{\frac{۱}{۲}} x + Q_i^{\frac{-۱}{۲}} m_i \end{bmatrix} \right\| \le \left(r_i - m_i^T Q_i^{-۱} m_i \right)^{\frac{۱}{۲}},\ i = ۱,\dots,k \\
& c_i^T x + d_i \ge ۰, \qquad i = ۱,\dots,q.
\end{aligned}$$

مسائل برنامه‌ریزی کسری با تابع هدفی مرکب از مجموع توابع کسری و درجهٔ دوم همراه با قیود درجهٔ دو

مسألهٔ برنامه‌ریزی کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
\min\ & \sum_{i=۱}^{p} \frac{\left\| F_i x + g_i \right\|^۲}{a_i^T x + b_i} + \sum_{i=۱}^{l} \frac{c}{c_i^T x + d_i} + x^T P_۰ x + ۲q_۰ x + r \\
s.t.\ & a_i^T x + b_i > ۰, \qquad i = ۱,\dots,p \\
& c_i^T x + d_i > ۰, \qquad i = ۱,\dots,l \\
& x^T p_i x + ۲q_i x - r_i \le ۰,\quad i = ۱,\dots,q \\
& x_۱, x_۲ \ge ۰
\end{aligned} \qquad (۲۱)$$

که در آن ماتریس‌های p_i $(i = ۱,\dots,q)$ و $P_۰$ معین مثبت هستند. با معرفی متغیرهای t_i، $i = ۱,\dots,p$ و t_i'، $i = ۱,\dots,p$ و t' و با فرض

$$x^T P_۰ x + ۲q_۰ x + r \le t'$$

و $\frac{c}{c_i^T x + d_i} \le t_i'$ و $\frac{\left\| F_i x + g_i \right\|^۲}{a_i^T x + b_i} \le t_i$ مسألهٔ (۲۱) به مسألهٔ SOCP زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\min \ \sum_{i=1}^{p} t_i + \sum_{i=1}^{l} t_i' + t' \\
&s.t.\ \left\| \begin{bmatrix} 2(F_i x + g_i) \\ a_i^T x + b_i - t_i \end{bmatrix} \right\| \le a_i^T x + b_i + t_i,\ i=1,\dots,p \\
&\left\| \begin{bmatrix} \left[p_0^{\frac{1}{2}} x + p_0^{\frac{-1}{2}} q_0 \right] \\ 1 - t' \end{bmatrix} \right\| \le t' + 1, \\
&\left\| \left[p_i^{\frac{1}{2}} x + p_i^{\frac{-1}{2}} q_i \right] \right\| \le \left(r_i - q_i^T p_i^{-1} q_i \right)^{\frac{1}{2}},\ i=1,\dots,q \\
&\left\| \begin{bmatrix} 2\sqrt{c} \\ c_i^T x + d_i - t' \end{bmatrix} \right\| \le c_i^T x + d_i + t',\ i=1,\dots,l.
\end{aligned}$$

وجود جواب

همان‌طور که مشاهده شد مسائلی با ساختار تابع هدف کسری، با تغییر متغیر به یک مسألهٔ با قیود هذلولوی تبدیل می‌شوند. سپس با نامساوی ریاضی (۱۱) به برنامه‌ریزی مخروط مرتبهٔ دوم قابل تبدیل هستند. اما این سئوال پیش می‌آید که آیا مسائل کسری با ساختار خاص تابع هدف و ناحیه شدنی نه باز و نه بسته دارای جواب بهینه هستند؟ چون مسائل بهینه‌سازی محدب با ناحیهٔ شدنی بسته دارای جواب بهینه می‌باشند و جواب بهینه در یک نقطهٔ مرزی از ناحیهٔ شدنی اتفاق می‌افتد، اگر مسائل کسری ذکر شده دارای جواب بهینه باشد این جواب بهینه در کجای ناحیهٔ شدنی اتفاق می‌افتد. در جواب به این سئوالات با توجه به نامساوی (۱۱) این نوع مسائل به مسائل SOCP که یک برنامه‌ریزی محدب با ناحیه شدنی بسته است، تبدیل می‌شوند که جواب بهینه مسائل SOCP در یک نقطهٔ مرزی از ناحیهٔ شدنی اتفاق می‌افتد. اما چون مسائل برنامه‌ریزی کسری به مسائل SOCP قابل تبدیل هستند، پس جواب بهینهٔ مسائل برنامه‌ریزی کسری گاهی در نقاط مرزی و گاهی در درون ناحیهٔ شدنی اتفاق می‌افتد.

مثال‌های عددی

در این بخش برای روشن شدن مطالب شرح داده شده مثال‌هایی عددی زیر را می‌آوریم. نقطهٔ آغازین مسألهٔ ما نقطهٔ (۰،۰) می‌باشد. برای حل مثال‌های زیر از نرم‌افزار msocp_auto مرجع [۵] استفاده شده است.

مثال ۱- مسألهٔ برنامه‌ریزی کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
&\min \ \frac{1}{x_1 + x_2 + 2} + \frac{1}{2x_1 - 3x_2 - 2} \\
&s.t.\ \ x_1 + x_2 \le 4 \\
&\quad x_1 + x_2 + 2 > 0 \\
&\quad 2x_1 - 3x_2 - 2 > 0 \\
&\quad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

در این مثال با معرفی متغیرهای جدید t_1 و t_2 و با فرض این که:

$$\frac{1}{x_1 + x_2 + 2} \le t_1,\quad \frac{1}{2x_1 - 3x_2 - 2} \le t_2$$

و با قرار دادن:

$$w_1 = w_2 = 1,\ z_1 = x_1 + x_2 + 2,\ z_2 = 2x_1 - 3x_2 - 2,\ y_1 = t_1, y_2 = t_2$$

روابط زیر را داریم :

$$w_1^2 \le z_1 y_1,\ z_1 > 0,\ y_1 \ge 0 \Leftrightarrow \left\| \begin{bmatrix} 2w_1 \\ z_1 - y_1 \end{bmatrix} \right\| \le z_1 + y_1$$

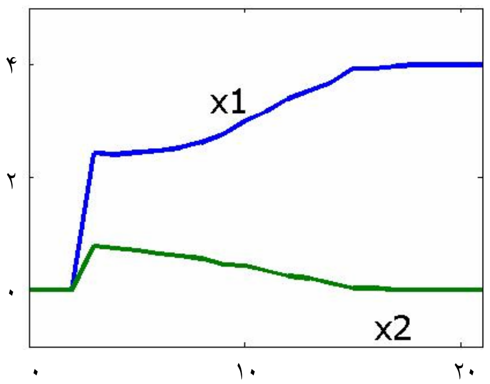
همچنین برای کسر دوم داریم :

$$w_2^2 \le z_2 y_2,\ z_2 > 0,\ y_2 \ge 0 \Leftrightarrow \left\| \begin{bmatrix} 2w_2 \\ z_2 - y_2 \end{bmatrix} \right\| \le z_2 + y_2$$

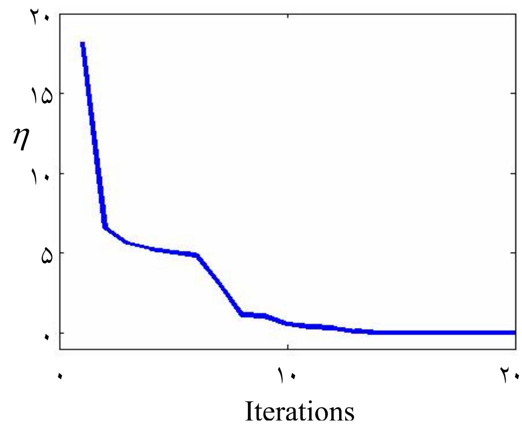
پس با جایگزینی در روابط بالا مسألهٔ SOCP زیر را داریم:

$$\begin{aligned}
&\min \ t_1 + t_2 \\
&s.t.\ \left\| \begin{matrix} 2 \\ x_1 + x_2 + 2 - t_1 \end{matrix} \right\| \le x_1 + x_2 + 2 + t_1 \\
&\left\| \begin{matrix} 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2 - t_2 \end{matrix} \right\| \le 2x_1 - 3x_2 - 2 + t_2 \qquad (22) \\
&x_1 + x_2 \le 4 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

حال با روش نقطهٔ درونی کاهش پتانسیل و با $\varepsilon=10^{-6}$ مسألهٔ (۲۲) را حل می‌کنیم و جواب بهینهٔ مسأله $x'=$ (۰/۱۱۱، ۰/۱۶۶۷، ۰، ۴) با شکاف دوگانی 10^{-7} بعد از ۲۷ تکرار به‌دست می‌آید، پس جواب بهینهٔ مسألهٔ اصلی $x=$ (۴، ۰) است، به شکل‌های ۱ و ۲ توجه کنید.



شکل ۱- همگرایی مسیرها با روش نقطهٔ درونی

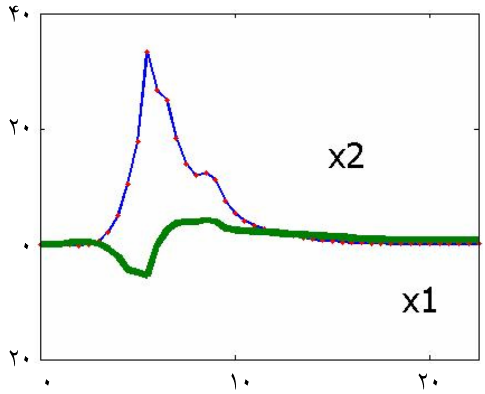


شکل ۲- شکاف دوگانی (η) مربوط به SOCP

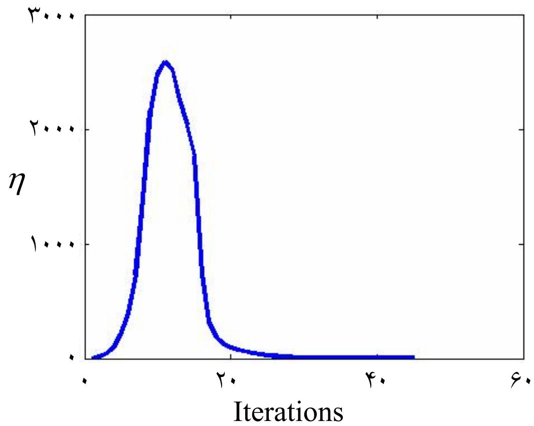
مثال ۲- مسألهٔ برنامه‌ریزی کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}\min\ & \frac{1}{5x_1+x_2+1}+\frac{1}{7x_1-x_2+4} \\ & +x_1^2+3x_2^2+3x_1x_2+x_1-4x_2-8 \\ s.t.\ & 5x_1+x_2+1>0 \\ & 7x_1-x_2+4>0 \\ & x_1,x_2\geq 0\end{aligned} \qquad (23)$$

با تبدیل مسألهٔ (۲۳) به فرم SOCP و حل آن توسط روش نقطهٔ درونی کاهش پتانسیل با $\varepsilon=10^{-5}$ جواب بهینهٔ (۹/۰۰۶۸، ۰/۳۰۳۸، ۰/۵۸۵۴، ۰/۷۰۸۴) $=x'$ با شکاف دوگانی $\eta=10^{-6}$ پس از ۳۹ تکرار به‌دست می‌آید، پس جواب بهینهٔ مسألهٔ اصلی $x^*=$ (۰/۷۰۸۴، ۰) است، به شکل‌های ۳ و ۴ توجه کنید.



شکل ۳- همگرایی مسیرها با روش نقطهٔ درونی



شکل ۴- شکاف دوگانی (η) مربوط به SOCP

برای روشن‌تر شدن تبدیل بالا ما روی یک مثال آن را نشان می‌دهیم.

مثال ۳- مسألهٔ برنامه‌ریزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}\min\ & \frac{\|-3x_1+x_2+1\|^2}{x_1+x_2+2}+\frac{\|x_1+x_2+1\|^2}{2x_1-3x_2+1} \\ s.t.\ & x_1+x_2+2>0 \\ & 2x_1-3x_2+1>0 \\ & x_1+x_2\leq 4 \\ & x_1,x_2\geq 0\end{aligned}$$

با معرفی متغیرهای جدید t_1 و t_2 و با فرض این که:

$$\frac{\|3x_1+x_2+1\|^2}{x_1+x_2+2}\le t_1$$

$$\frac{\|x_1+x_2+1\|^2}{2x_1-3x_2+1}\le t_2$$

داریم :

$$\|3x_1+x_1+1\|^2\le t_1\left(x_1+x_2+2\right)$$

$$\|x_1+x_2+1\|^2\le t_2\left(2x_1-3x_2+1\right)$$

اکنون با فرض

$$y_1=t_1,\ z_1=x_1+x_2+2, w_1=\|3x_1+x_1+1\|$$

و $y_2=t_2$ $\quad z_2=2x_1-3x_2+1, w_2=\|x_1+x_2+1\|$

و با استفاده از نامساوی (۱۱) مخروطهای مرتبهٔ دوم زیر را داریم :

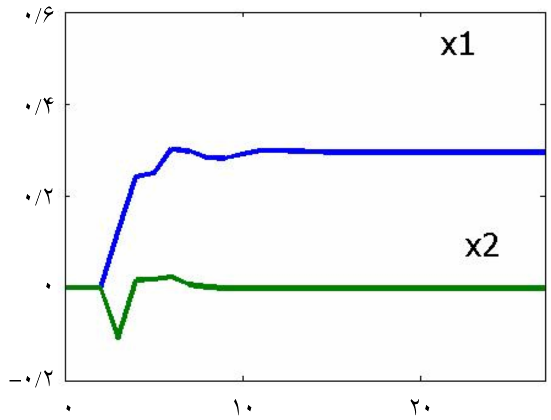
$$w_1^2\le z_1y_1,\ z_1>0, y_1\ge 0\Leftrightarrow\left\|\begin{matrix}2w_1\\ z_1-y_1\end{matrix}\right\|\le z_1+y_1$$

$$w_2^2\le z_2y_2,\ z_2>0, y_2\ge 0\Leftrightarrow\left\|\begin{matrix}2w_2\\ z_2-y_2\end{matrix}\right\|\le z_2+y_2$$

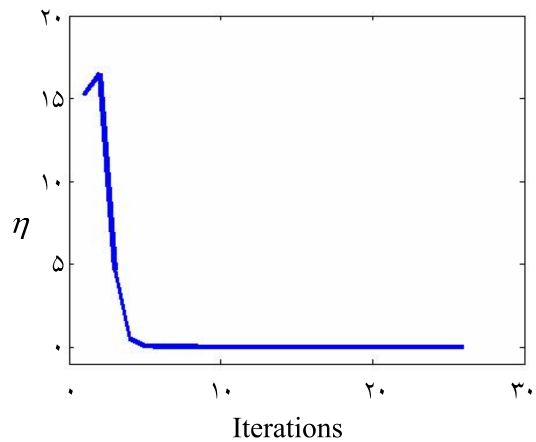
حال مسألهٔ تبدیل یافته ما به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}\min\ & t_1+t_2\\ s.t.\ & \left\|\begin{matrix}2\left(3x_1+x_1+1\right)\\ x_1+x_2+2-t_1\end{matrix}\right\|\le x_1+x_2+2+t_1\\ & \left\|\begin{matrix}2\left(x_1+x_2+1\right)\\ 2x_1-3x_2+1-t_2\end{matrix}\right\|\le 2x_1-3x_2+1+t_2 \qquad (24)\\ & x_1+x_2\le 4\\ & x_1,x_2,t_1,t_2\ge 0\end{aligned}$$

مسألهٔ (۲۴) توسط روش نقطهٔ درونی کاهش پتانسیل و با $\varepsilon=10^{-5}$ حل شده و جواب بهینهٔ $x'=$(۰/۲۹۵۱، ۰، ۰/۰۰۵۷، ۱۰/۰۵۴) با شکاف دوگانی $\eta=10^{-6}$ پس از 16 تکرار به‌دست می‌آید، که جواب بهینهٔ مسألهٔ اصلی $x^*=$(۰/۲۹۵۱، ۰) است، به شکل‌های ۵ و ۶ توجه کنید.



شکل ۵– همگرایی مسیرها با روش نقطهٔ درونی

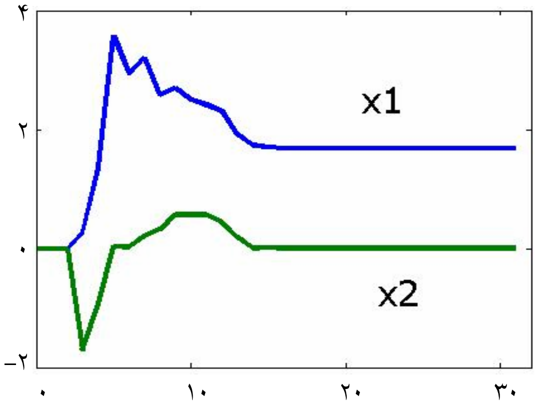


شکل ۶– شکاف دوگانی (η) مربوط به SOCP

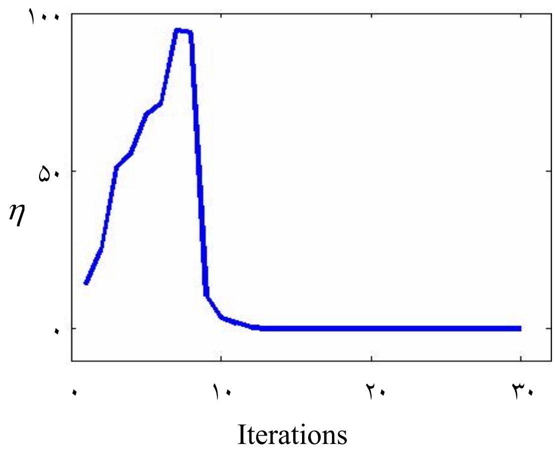
مثال ۴– مسألهٔ برنامه‌ریزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}\min\ & \frac{\|3x_1-2x_2-4\|^2}{x_1+x_2+2}+\frac{\|x_1-x_2+5\|^2}{2x_1-3x_2+1}\\ s.t.\ & x_1+x_2+2>0\\ & 2x_1-3x_2+1>0 \qquad (25)\\ & x_1+x_2\le 4\\ & x_1,x_2\ge 0\end{aligned}$$

مسألهٔ (۲۵) توسط روش نقطهٔ درونی کاهش پتانسیل و با $\varepsilon=10^{-5}$ حل شده و جواب بهینهٔ $x'=$(۱/۶۸۲۵، ۰، ۰/۲۹۹۷، ۱۰/۲۳۰۵) با شکاف دوگانگی $\eta=10^{-6}$ پس از ۲۳ تکرار به‌دست می‌آید، جواب بهینهٔ مسألهٔ اصلی $x^*=$(۱/۶۸۲۵، ۰) است، به شکل‌های ۷ و ۸ توجه کنید.



شکل ۷– همگرایی مسیرها با روش نقطة درونی



شکل ۸– شکاف دوگانی (η) مربوط به SOCP

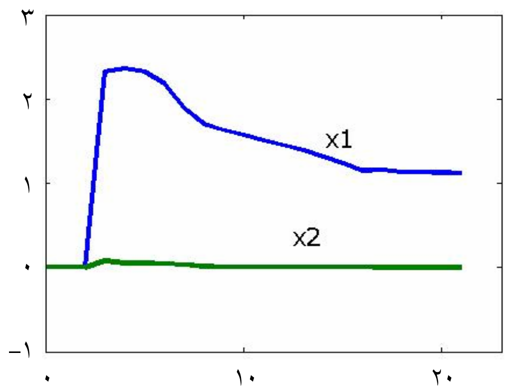
مثال ۵– مسألة برنامه‌ریزی کسری زیر را در نظر بگیرید :

$$\begin{aligned} \min\ & \frac{x_1^2+3x_2^2+3x_1x_2+x_1+x_2+12}{x_1+x_2+2}+\frac{\|x_1+x_2+1\|^2}{2x_1-3x_2+1} \\ s.t.\ & x_1+x_2+2>0 \\ & 2x_1-3x_2+1>0 \\ & x_1+x_2\le 4 \\ & x_1,x_2\ge 0 \end{aligned} \tag{26}$$

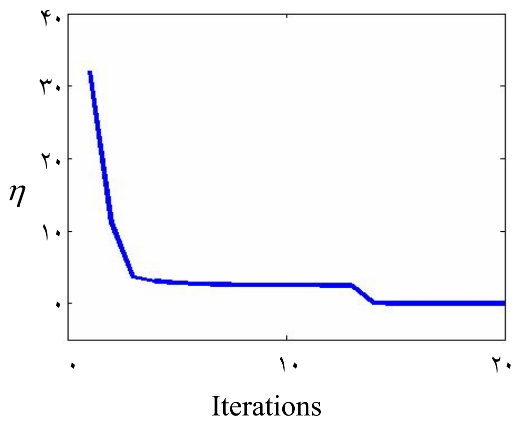
ابتدا مسألة بالا را به مسألةزیر تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \min\ & \frac{\left\|\begin{bmatrix}0.07794 & 0.6265\\ 0.6265 & 1.6148\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0.506\\ 0.0883\end{bmatrix}\right\|^2}{x_1-x_2+2} \\ & +\frac{0.66667}{x_1-x_2+2}+\frac{\|x_1+x_2+1\|^2}{2x_1-3x_2+2} \\ s.t.\ & x_1-x_2+2>0 \\ & 2x_1-3x_2+1>0 \\ & x_1+x_2\le 4 \\ & x_1,x_2\ge 0 \end{aligned} \tag{27}$$

مسألة (۲۷) توسط روش نقطة درونی کاهش پتانسیل و با $\varepsilon=10^{-8}$ حل شده و جواب بهینة مسألة SOCP با x' =(۱/۱۰۵۷, ۰, ۰/۸۵۶۹ ,۳/۷۵۶۶ ,۱/۳۸۰۷) شکاف دوگانی $\eta=10^{-9}$ پس از ۴۸ تکرار به‌دست می‌آید, به شکل‌های ۹ و ۱۰ توجه کنید.



شکل ۹– همگرایی مسیرها با روش نقطة درونی

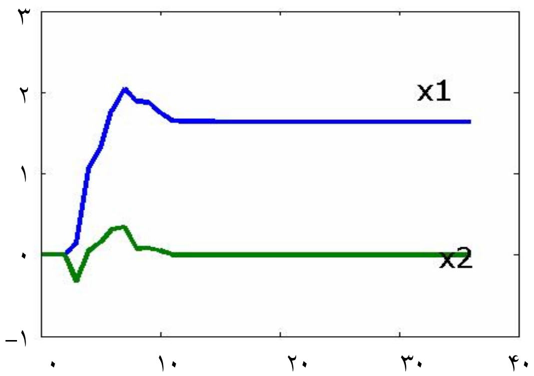


شکل ۱۰– شکاف دوگانی (η) مربوط به SOCP

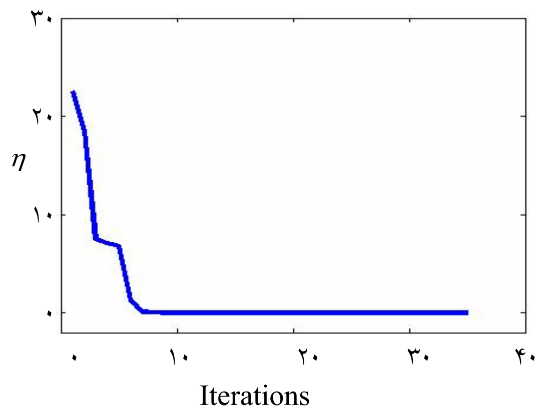
مثال ۶– مسألهٔ برنامهٔ کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
\min\ & \frac{4x_1^2+4x_2^2-4x_1x_2-x_1-4x_2+6}{3x_1-7x_2+6}+\frac{\|4x_1+8x_2+7\|^2}{x_1-4x_2+3} \\
s.t.\ & 3x_1-7x_2+6>0 \\
& x_1-4x_2+3>0 \\
& x_1+5x_2\le 6 \\
& x_1,x_2\ge 0
\end{aligned}
\qquad (۲۸)
$$

حال با حل مسألهٔ SOCP معادل مسألهٔ (۲۸) با روش نقطهٔ درونی و با $\varepsilon=10^{-8}$ جواب بهینهٔ $x' = (1/6367, 0, 0/9925, 0/1604, 0/443)$ با شکاف دوگانی $\eta=10^{-9}$ پس از ۳۰ تکرار به‌دست می‌آید، پس جواب بهینهٔ مسألهٔ اصلی $x^* = (1/6367, 0)$ است، به شکل‌های ۱۱ و ۱۲ توجه کنید.



شکل ۱۱– همگرایی مسیرها با روش نقطهٔ درونی

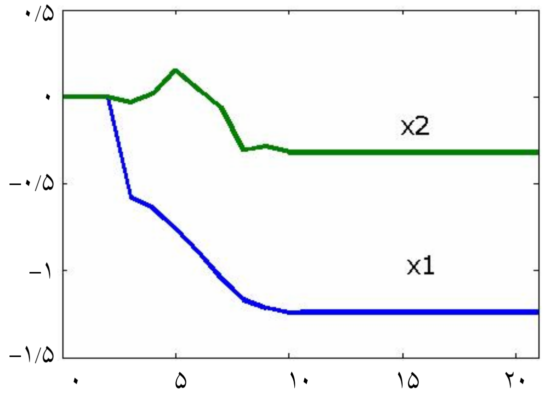


شکل ۱۲– شکاف دوگانی (η) مربوط به SOCP

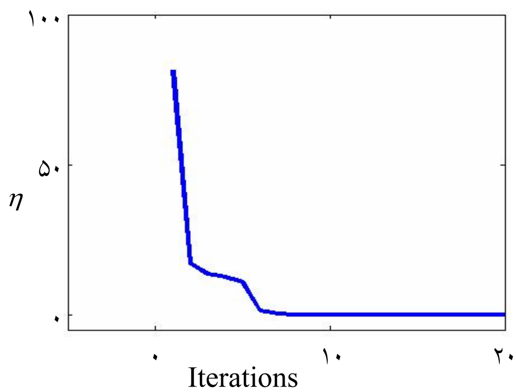
مثال ۷– مسألهٔ برنامه‌ریزی کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
\min\ & \frac{\|-3x_1+4x_2+5\|^2}{-x_1+2x_2+4}+\frac{\|-3x_1+8x_2+4\|^2}{x_1+x_2+5} \\
s.t.\ & -x_1+2x_2+4>0 \\
& x_1+x_2+5>0 \\
& 2x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+2x_1-x_2-6\le 0
\end{aligned}
\qquad (۲۹)
$$

با تبدیل مسألهٔ بالا به SOCP و حل آن توسط روش نقطهٔ درونی و با $\varepsilon=10^{-11}$ جواب بهینهٔ مسألهٔ $x' = (-1/24, 0/33, 0, 0)$ با شکاف دوگانی $\eta=10^{-12}$ پس از ۲۰ تکرار به‌دست می‌آید، پس جواب بهینهٔ مسألهٔ اصلی $x^* = (-1/24, -0/33)$ است، به شکل‌های ۱۳ و ۱۴ توجه کنید.



شکل ۱۳– همگرایی مسیرها با روش نقطهٔ درونی

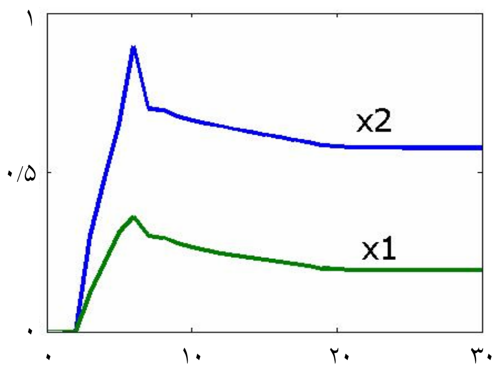


شکل ۱۴– شکاف دوگانی (η) مربوط به SOCP.

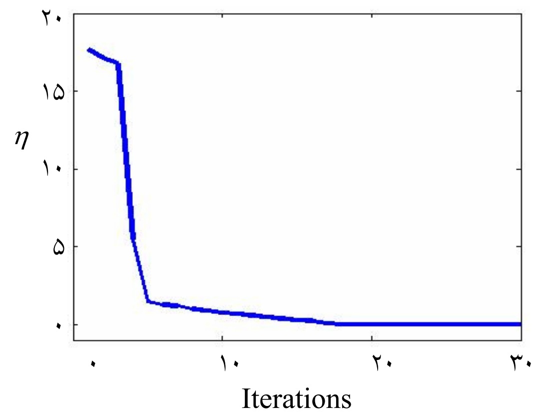
مثال ۸– مسألهٔ برنامه‌ریزی کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min\ & \frac{۴x_۱^۲+۴x_۲^۲-۴x_۱x_۲-x_۱-۴x_۲+۶}{۳x_۱-۷x_۲+۴} \\ & +۳x_۱^۲+۲x_۲^۲+۲x_۱x_۲-۴x_۱-۲x_۲+۴ \qquad (۳۰) \\ s.t.\ & ۳x_۱-۷x_۲+۴>۰ \\ & x_۱,x_۲\geq ۰ \end{aligned}$$

با تبدیل مسألهٔ (۳۰) به SOCP و حل آن توسط روش نقطهٔ درونی و با $\varepsilon=۱۰^{-۶}$ جواب بهینهٔ مسألهٔ SOCP با $x^{\prime}=$ (۰/۵۷۷۲، ۰/۱۹۲۸، ۰/۳۲۸۱، ۰/۳۹۹۴، ۰/۰۰۲) شکاف دوگانی $\eta=۱۰^{-۷}$ پس از ۲۷ تکرار به‌دست می‌آید، جواب مسألهٔ اصلی $x^{*}=$ (۰/۵۷۷۲، ۰/۱۹۲۸) است، به شکل‌های ۱۵ و ۱۶ توجه کنید.



شکل ۱۵- همگرایی مسیرها با روش نقطهٔ درونی



شکل ۱۶- شکاف دوگانی (η) مربوط به SOCP

نتیجه‌گیری

در این مقاله از روش نقطهٔ درونی کاهش پتانسیل اولیه- دوگان برای حل مسائل برنامه‌ریزی مخروط مرتبهٔ دوم استفاده شده است. سپس رده‌هایی از مسائل برنامه‌ریزی‌های کسری به مسائل از نوع برنامه‌ریزی مخروط مرتبهٔ دوم تبدیل شده و با حل روش مذکور جواب بهینهٔ مسألهٔ اصلی به‌دست می‌آید. امید می‌رود که بتوان مسائل برنامه‌ریزی کسری با قیود کسری را به مسائل برنامه‌ریزی مخروط مرتبهٔ دوم تبدیل و با روش مذکور و یا با روش‌های دیگر حل کرد.

مراجع

[1] Sousa lobo, M., Vanndebergh, L., Boyd, S. and Lebret, H., Application of second order cone programming, Published in Linear Alegebra an its November Applications, 284 (1998) 193-228.

[2] Akerblad, H., A second order cone programming algorithm for model Predictive control, licentiuet thesis department of signals, sensors and systems, royal institute of technology stockholm sweden, (2002) 1-84.

[3] Wang, B. and Terlaky, T., Implementation of intrior point methods for second order conic optimization, A thesis Submitted to the School of Graduate Studies in Partial Fulfilment the Requirements for Degree Master of Scinence, McMaster, University, (2003) 4-17.

[4] Nestrov, Y. and Nemirosvki, A., Interior–point polynomial methods in SIAM Philadelphia PA, convex programming, 13 (1994).

[5] Lobo, M.S., Vandenberghe, L. and Boyd, S., Socp: Software for Second-Order Cone Programming. Information Systems Laboratory, Stanford University, (1997).