ویژگی‌های فضای $C(X)$ با m- توپولوژی

سوسن افروز* و منیره پیمان

*دانشکدهٔ علوم پایه- دانشگاه علوم و فنون دریایی خرمشهر

گروه ریاضی- دانشگاه شهید چمران اهواز

پست الکترونیکی: **safrooz@kmsu.ac.ir**

چکیده

در این مقاله خواهیم دید که فضای $C(X)$ همراه با m - توپولوژی؛ یعنی $C_m(X)$ یک فضای هاسدروف و منظم است و نشان می‌دهیم که $C_m(X)$ شمارای نوع اوّل است اگر و تنها اگر فضای X شبه فشرده باشد. ثابت می‌کنیم که $C_m(X)$ بسیار دور از تقریباً P- فضا است و شبه فشرده نیست. همچنین مجموعهٔ توابع مقسوم‌علیهٔ صفر در $C_m(X)$ بسته است اگر و تنها اگر فضای X تقریباً P- فضا باشد. مجموعه عناصر یکهٔ $C_m(X)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم و با کمک این مجموعه خواهیم دید که $C_m(X)$ هرگز ناهمبند شدید نمی‌باشد. سرانجام ثابت می‌کنیم که $C_\infty(X)$ در $C_m(X)$ بسته است و بستار $C_k(X)$ بر حسب ایدآل‌های ماکسیمال $C(X)$ شناسایی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: *یکه مثبت، m - توپولوژی، تقریباً P- فضا، شمارای نوع اوّل، شبه فشرده، مقسوم علیه صفر، $C_K(X)$، $C_\infty(X)$، ناهمبند شدید*

۱- مقدمه

در این مقاله $C(X)$ ($C^*(X)$) حلقهٔ توابع پیوسته و حقیقی (کراندار) روی فضای کاملاً منظم و هاسدروف X می‌باشد. آشکارا $C^*(X) \subseteq C(X)$ و هنگامی که این دو حلقه بر هم منطبق شوند، فضای X را شبه‌فشرده نامیم. برای هر $f \in C(X)$، مجموعهٔ $Z(f)=\{x\in X : f(x)=0\}$ را صفر- مجموعهٔ f می‌گوییم و برای هر ایدآل I در $C(X)$، $Z[I]$ را گردایهٔ همهٔ صفر- مجموعه‌های $Z(f)$ می‌گیریم که $f \in I$. در صورتی که $Z(f) \in Z[I]$ نتیجه بدهد $f \in I$، آنگاه I را یک z- ایدآل می‌نامیم. اگر $Z(f)=\varnothing$، آنگاه f را یکه می‌گوییم که در این صورت $\frac{1}{f}$ نیز تابعی پیوسته است. هرگاه هر G_δ- مجموعهٔ ناتهی در X دارای درون ناتهی باشد، فضای X تقریباً P- فضا نامیده می‌شود و در صورتی که هر G_δ-

مجموعــه در فــضای X بــاز باشــد، فــضا را P - فــضا می‌گوییم. هنگامی که بستار هر مجموعـهٔ بـاز در X یـک مجموعهٔ باز باشد، فضای X را ناهمبند شدید مـی‌نـامیم. مراجع [۱ و ۲] را برای آگاهی از ویژگی‌های بیش‌تر ایـن مفاهیم ببینید.

ایــدآل I در $C(X)$ را آزاد گــوییم، هرگــاه $\bigcap_{f\in I} Z(f)=\varnothing$ و در غیـر ایـن صـورت ثابـت نامیـده می‌شـود. $C_k(X)$ از همـهٔ توابـع $f\in C(X)$ تـشکیل مــی‌شــود کــه بــستار $X\setminus Z(f)$ در X فــشرده باشد. $C_k(X)$ یک ایـدآل در $C(X)$ اسـت و برابـر بـا اشتراک همه ایدآل‌های آزاد در $C(X)$ می‌باشد. همچنین $C_\infty(X)$ عبارت از گردایهٔ توابع پیوستهٔ چـون f اسـت که برای هر $n\in\mathbb{N}$، مجموعهٔ $\left\{x\in X : |f(x)|\geq \frac{1}{n}\right\}$ در X فشرده باشـد. $C_\infty(X)$ در $C^*(X)$ یـک ایـدآل است و برابر با اشتراک همهٔ ایدآل‌های ماکـسیمال آزاد در $C^*(X)$ مــی‌باشــد. آشــکارا دیــده مــی‌شــود کــه $C_k(X)\subseteq C_\infty(X)$؛ برای آگاهی بیش‌تر در خصوص ایــن دو ایـدآل، خواننــده را بــه مراجــع [۲ و ۳] ارجـاع می‌دهیم.

برای هر $f\in C(X)$ و هـر یکـهٔ مثبـت u در $C(X)$، تعریف می‌کنیم:

$$N_u(f)=\{\, g\in C(X): |f-g|<u \,\}.$$

گرادیهٔ متشکل از عناصر $N_u(f)$ که $f\in C(X)$ و u یکـهٔ مثبـت در $C(X)$ اسـت، یــک پایــه بــرای یـک توپولوژی روی $C(X)$ خواهـد بـود. ایـن توپولـوژی را m - توپولوژی روی $C(X)$ مـی‌نـامیم. در صـورتی کـه یکهٔ مثبت u را کراندار فـرض کنـیم، آن‌گـاه توپــولوژی مشابــه‌ای را می‌تــوان روی $C^*(X)$ نیز تعریـف کـرد. بــدیهی اسـت m - توپولـوژی روی $C^*(X)$ بــا m - توپولوژی نسبی روی آن یکی اسـت. $C^*(X)$ همـراه بـا m - توپولوژی نسبی، یک حلقهٔ توپولوژیکی است و این توپولوژی شامل توپولوژی نُرم یکنواخـت روی $C^*(X)$ است، مرجع [۲]، ۲M را ببینید. در مرجع [۴] ثابت شـده است که این دو توپولوژی روی $C^*(X)$ یکی است اگر و تنها اگر فضای X شبه فشرده باشد. از این پس فـضای $C(X)$ همراه با m - توپولـوژی را همـان‌گونـه کـه در مرجع [۵] نمایش داده شده با $C_m(X)$ نشان می‌دهیم.

همان‌گونه که از عنوان مقاله پیداست، هدف مـا بررسی ویژگی‌های این فضا می‌باشد. تا حدود زیـادی در برقراری ارتباط میان $C_m(X)$ و X موفق شده‌ایـم و بـا مطالعـهٔ زیرمجموعـه‌هـای خاصـی از ایـن فـضا، از قبیـل مجموعهٔ یکه‌های $C(X)$ و مجـموعهٔ مقـسوم علـیه‌هـای صفر $C(X)$ توانـسته‌ایم برخـی از ویژگی‌های $C_m(X)$ را آشکار کنیم.

۲- ویژگی‌های فضای $C_m(X)$

اگر چه معرفی این فضا در مرجع [۴] نخـست بـه خـاطر به‌دست آوردن بعضی از خواص $C(X)$ و ارتبـاط آن بـا توپولوژی‌های دیگر روی $C(X)$ بوده است، ولی بعـدها این فضا خود مورد توجه بیش‌تری قرار گرفت و بـسیاری از خواص این فضا توسط ریاضی‌دانان دیگر بررسی شـد. مثلاً در مرجع [۵] نـشان داده شـده اسـت کـه $C_m(X)$ هرگز فشرده موضعی نیست و چند ویژگـی $C_m(X)$ بـا ویژگی‌های معـادل آن در فـضای X در مراجـع [۵ و ۶] مورد مطالعه قرار گرفـته‌اند. در مرجـع [۷] انـواع تــوابع کاردیــنالی در فـــضای $C_m(X)$، مانند چگـالی، وزن و غیره در ارتباط با نظایر آن در فضای X مقایسه و ارزیابی شده است. نخستین پرسشی که در این فـضا مطـرح شـد، شناسایی ایدآل‌های بسته در این فضا بود که سال‌ها بعد به

دو روش مختلف در مراجع [۸ و ۹] انجام شد. در واقع بستار یک ایدآل I در $C_m(X)$ چیزی جز اشتراک همهٔ ایدآل‌های ماکسیمال شامل I نیست و به این ترتیب یک ایدآل در $C_m(X)$ بسته است اگر و تنها اگر به صورت اشتراک ایدآل‌های ماکسیمال باشد. مسلماً با شناخت بیش‌تر ویژگی‌های این فضا می‌توان بهتر به واقعیت‌های موجود در این فضا و همچنین در حلقهٔ توابع پیوسته حقیقی روی این فضا پی برد. در این بخش نشان می‌دهیم فضای X شبه فشرده است اگر و تنها اگر $C_m(X)$ شمارای نوع اوّل باشد. علاوه بر آن در این بخش می‌بینیم که این فضا هرگز شبه‌فشرده و P - فضا نمی‌باشد.

۲- ۱ قضیه: فضای $C_m(X)$ شمارای نوع اوّل است اگر و تنها اگر فضای X شبه فشرده باشد.

اثبات: ابتدا نشان می‌دهیم که اگر X شبه فشرده نباشد، آن‌گاه $C(X)$ شمارای نوع اوّل نیست. برای این منظور، تابع ثابت صفر را در $C(X)$ در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم برای هر خانواده‌ی شما را از همسایگی‌های باز تابع ثابت صفر در $C_m(X)$، یک همسایگی باز از این تابع وجود دارد که شامل هیچ یک از عناصر این خانواده نیست. چون X شبه فشرده نیست، یک تابع بی‌کران f در $C(X)$ وجود دارد. در نتیجه $g=f^{۲}+۱$ یکه مثبت بی‌کران در $C(X)$ است. پس دنبالهٔ اکیداً صعودی $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ از اعداد حقیقی مثبت و همچنین دنبالهٔ $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ در X وجود دارد به طوری که $\lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty$ و برای هر $n=۱,۲,۳,\ldots$، $g(x_n)=a_n$.

حال فرض کنیم $\{N_{\pi_n}(\circ)\}_{n\in\mathbb{N}}$ خانواده‌ای شمارش‌پذیر و دلخواه از همسایگی‌های باز شامل تابع ثابت صفر است که در آن هر π_n تابع یکه مثبت می‌باشد. اکنون یکه مثبت Ψ را در $C(X)$ چنان می‌یابیم که $N_\Psi(\circ)$ شامل هیچ یک از عناصر خانوادهٔ $\{N_{\pi_n}(\circ)\}_{n\in\mathbb{N}}$ نباشد.

برای هر $n\in\mathbb{N}$، قرار می‌دهیم $b_n=\frac{۱}{۲}\pi_n(x_n)$. بدیهی است $\sigma\in C(\mathbb{R})$ وجود دارد به طوری که برای هر $x>\circ$، $\sigma(x)>\circ$، و برای هر $n\in\mathbb{N}$، $\sigma(a_n)=\frac{۱}{b_n}$.

حال قرار می‌دهیم $\Psi=\frac{۱}{\sigma o g}$. در این صورت Ψ در $C(X)$ یکه مثبت می‌باشد و برای هر $n\in\mathbb{N}$، داریم:

$$\Psi(x_n)=\frac{۱}{\sigma(g(x_n))}=\frac{۱}{\sigma(a_n)}=b_n\leq\frac{۱}{۲}\pi_n(x_n)$$

در نتیجه $N_\Psi(\circ)$ شامل هیچ یک از $N_{\pi_n}(\circ)$ ها نیست؛ یعنی $f\equiv\circ$ در $C(X)$ دارای یک پایه‌ی باز شمارا نیست. به این ترتیب $C_m(X)$ یک فضای شمارای نوع اوّل نخواهد بود. به عکس، اگر X شبه فشرده باشد، آن‌گاه m - توپولوژی روی $C(X)$ همان توپولوژی نُرم یکنواخت است و به این ترتیب فضا متریک است و در نتیجه شمارای نوع اوّل می‌باشد. ■

لازم به ذکر است که در هر حلقهٔ توپولوژیکی (گروه توپولوژیکی) بین همسایگی‌های هر دو نقطه یک تناظر دوسویی و حافظ شمول وجود دارد. بنابراین قضیهٔ فوق نشان می‌دهد که اگر X شبه‌فشرده نباشد، آن‌گاه هیچ نقطه‌ای از آن دارای پایه باز شمارا نیست.

قبل از این که به قضیهٔ بعدی بپردازیم، از این پس برای سادگی، بستار و درون یک مجموعهٔ A در فضای $C_m(X)$ را به ترتیب با $cl_m A$ و $\mathrm{int}_m A$ نشان می‌دهیم.

۲- ۲ قضیه: $C_m(X)$ یک فضای هاسدروف و منظم است.

اثبات: گیریم $f,g\in C(X)$ و $f\neq g$. پس $x_\circ\in X$ وجود دارد که $f(x_\circ)\neq g(x_\circ)$. اکنون یکه مثبت u را در $C(X)$ چنان در نظر می‌گیریم که $u(x_\circ)=\frac{1}{2}|f(x_\circ)-g(x_\circ)|$ و نشان می‌دهیم $N_u(f)\cap N_u(g)=\varnothing$. برای این منظور، فرض کنیم $h\in N_u(f)\cap N_u(g)$. در این صورت، $|f-h|<u$ و $|g-h|<u$ و بنابراین $|f-g|<2u$. پس $|f(x_\circ)-g(x_\circ)|<2u(x_\circ)=|f(x_\circ)-g(x_\circ)|$ و این یک تناقض است. در نتیجه مجموعه‌های باز و مجزای $N_u(f)$ و $N_u(g)$ به ترتیب شامل f و g وجود دارد؛ یعنی $C_m(X)$ یک فضای هاسدروف است.

برای این که نشان دهیم $C_m(X)$ منظم است، فرض کنیم G یک مجموعهٔ باز در $C_m(X)$ است و $f\in G$. پس یکهٔ مثبت u در $C(X)$ وجود دارد که $N_u(f)\subseteq G$. اکنون نشان می‌دهیم $cl_m(N_{\frac{u}{2}}(f))\subseteq N_u(f)$. برای این منظور، فرض می‌کنیم $g\in cl_m(N_{\frac{u}{2}}(f))$، پس $N_{\frac{u}{2}}(g)\cap N_{\frac{u}{2}}(f)\neq\varnothing$. اگر تابع h را متعلق به این اشتراک ناتهی در نظر بگیریم، آن‌گاه خواهیم داشت $|h-f|<\frac{u}{2}$، $|g-h|<\frac{u}{2}$ و در نتیجه $|g-f|<u$؛ یعنی $g\in N_u(f)$. به این ترتیب $f\in N_{\frac{u}{2}}(f)\subseteq cl_m N_{\frac{u}{2}}(f)\subseteq G$ و در نتیجه $C_m(X)$ منظم است. ■

گرچه $C_m(X)$ فاقد بعضی از ویژگی‌های توپولوژیکی است ولی آن هم خود از ویژگی‌های $C_m(X)$ محسوب می‌شود. در این قسمت نشان می‌دهیم $C_m(X)$ هیچ‌گاه شبه‌فشرده نیست. همچنین مشاهده خواهیم کرد که $C_m(X)$ نه تنها فاقد نقطهٔ منفرد است بلکه حتی شامل تقریباً P- نقطه هم نیست و بنابراین فضای $C_m(X)$ بسیار دور از تقریباً P- فضا می‌باشد.

۲- ۳ قضیه: هیچ نقطه از $C_m(X)$، تقریباً P- نقطه نیست.

اثبات: فرض کنیم $f\in C(X)$ و برای هر $n\in\mathbb{N}$، تابع ثابت u_n را که برای هر $x\in X$ به صورت $u_n(x)=\frac{1}{n}$ تعریف می‌شود، در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم $\bigcap_{n=1}^{\infty} N_{u_n}(f)=\{f\}$. چون برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم، $f\in N_{u_n}(f)$، پس $\{f\}\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty} N_{u_n}(f)$. اکنون فرض کنیم $g\in\bigcap_{n=1}^{\infty} N_{u_n}(f)$ و $g\neq f$. در نتیجه $x_\circ\in X$ وجود دارد که $f(x_\circ)\neq g(x_\circ)$. علاوه بر این برای هر $n\in\mathbb{N}$ و هر $x\in X$ داریم $|f(x)-g(x)|<u_n(x)$. پس برای هر $n\in\mathbb{N}$، $|f(x_\circ)-g(x_\circ)|<\frac{1}{n}$؛ یعنی $f(x_\circ)=g(x_\circ)$ که یک تناقض است و در نتیجه $\bigcap_{n=1}^{\infty} N_{u_n}(f)=\{f\}$. اکنون نشان می‌دهیم $\{f\}$ باز نیست. برای این منظور، کافی است نشان دهیم برای هر یکه مثبت u، $N_u(f)\neq\{f\}$. چون $\left|f-(\frac{u}{2}+f)\right|=\frac{u}{2}<u$، پس $\frac{u}{2}+f\in N_u(f)$ و بنابراین $N_u(f)\neq\{f\}$؛ یعنی $\{f\}$ در $C_m(X)$ باز نیست. در نتیجه $\operatorname{int}_m\{f\}=\varnothing$. امّا از آن جا که $\bigcap_{n=1}^{\infty} N_{u_n}(f)$ اشتراک شمارایی از مجموعه‌های باز در فضای $C_m(X)$ می‌باشد، یک G_δ- مجموعه است. پس G_δ- مجموعهٔ $\{f\}$ که شامل f می‌باشد، درون تهی است. به این ترتیب f یک تقریباً P- نقطه نخواهد بود. ■

۲- ۴ نتیجه: فضای $C_m(X)$ بسیار دور از تقریباً P - فضا و در نتیجه بسیار دور از P - فضا است. ■

۲- ۵ قضیه: $C_m(X)$ هرگز یک فضای شبه فشرده نخواهد بود و از این رو $C_m(X)$ هرگز شمارا فشرده نیست.

اثبات: فرض کنیم $x_\circ \in X$. تابع $\varphi : C_m(X) \to \mathbb{R}$ که برای هر $f \in C(X)$ به صورت $\varphi(f) = f(x_\circ)$، تعریف شده درنظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم $\varphi \in C(C_m(X))$. برای این منظور، فرض کنیم $\varepsilon > \circ$ و $g \in N_\varepsilon(f)$. در این صورت،

$$| g(x_\circ) - f(x_\circ) | < \varepsilon$$

و در نتیجه $\varphi(g) \in (f(x_\circ) - \varepsilon \ , \ f(x_\circ) + \varepsilon)$؛ یعنی $\varphi(N_\varepsilon(f)) \subseteq (f(x_\circ) - \varepsilon , f(x_\circ) + \varepsilon)$ و بنابراین φ پیوسته است. اکنون نشان می‌دهیم φ کراندار نیست. برای این منظور، دنبالهٔ یکه‌های ثابت $\{u_n\}$، که برای هر $x \in X$ به صورت $u_n(x) = n$ تعریف شده‌اند را درنظر می‌گیریم. چون برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\varphi(u_n) = u_n(x_\circ) = n$، پس φ کراندار نیست و در نتیجه $C_m(X)$ شبه‌فشرده نخواهد بود. به طور مشابه، می‌توان دید که فضای $C^*(X)$ با m - توپولوژی نیز شبه‌فشرده نیست. ■

۳- زیرمجموعه‌های باز، بسته و چگال در $C_m(X)$

در هر فضای توپولوژی شناسایی مجموعه‌های باز، بسته و چگال اهمیت دارد. بسیاری از ایدآل‌ها در $C_m(X)$ بسته‌اند. در واقع بستار یک ایدآل در $C_m(X)$ عبارت است از اشتراک ایدآل‌های ماکسیمال شامل آن و بنابراین یک z - ایدآل است، مرجع [۲]، ۷P و مراجع [۸ و ۹] را ببینید. ولی هر z - ایدآلی در $C_m(X)$ لزوماً بسته نیست، مانند $O_\circ = \{ f \in C(\mathbb{R}) : 0 \in \operatorname{int}_{\mathbb{R}} Z(f) \}$ در $C(\mathbb{R})$ که یک z - ایدآل است و به سادگی دیده می‌شود که بسته نیست. از آنجا که عناصر یکه در ایدآل‌های $C(X)$ وجود ندارند، درون هر ایدآل سره از $C_m(X)$ تهی است. زیرا اگر I یک ایدآل سره در $C_m(X)$ باشد و $f \in \operatorname{int}_m I$، آن‌گاه بایستی یکه مثبت u وجود داشته باشد که $N_u(f) \subseteq \operatorname{int}_m I \subseteq I$. امّا $f + \frac{u}{۲} \in N_u(f) \subseteq I$ نتیجه می‌دهد که $u \in I$ و این تناقض است. این موضوع نشان می‌دهد که هیچ ایدآل سره‌ای از $C_m(X)$ باز نیست. در این بخش وضعیت برخی از زیرمجموعه‌های مهم $C_m(X)$ را به لحاظ بسته، باز و چگال بودن بررسی خواهیم کرد. بستار بعضی از ایدآل‌های $C_m(X)$ مانند $C_k(X)$ را شناسایی می‌کنیم و سرانجام نشان می‌دهیم $C_m(X)$ هرگز ناهمبند شدید نیست.

۳- ۱ گزاره: $C^*(X)$ در $C_m(X)$ هم باز و هم بسته است.

اثبات: فرض می‌کنیم $f \in C_m(X)$ نقطهٔ حدی $C^*(X)$ باشد. همسایگی $N_۱(f)$ را برای f در $C_m(X)$ درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $h \in N_۱(f) \bigcap C^*(X)$. در این صورت $| f - h | \leq ۱$ نتیجه می‌دهد که $| f | \leq | h | + ۱$ و بنابراین $f \in C^*(X)$؛ یعنی $C^*(X)$ در $C_m(X)$ بسته است. اکنون فرض می‌کنیم $f \in C^*(X)$ و یکه $u = ۱$ را درنظر می‌گیریم. در این صورت $N_۱(f) \subseteq C^*(X)$، چرا که اگر $g \in N_۱(f)$، آن‌گاه $| g | \leq | f | + ۱$ نتیجه می‌دهد g کراندار است و بنابراین $C^*(X)$ باز نیز هست. ■

۳- ۲ نتیجه: اگر X شبه‌فشرده نباشد، آن‌گاه $C_m(X)$ ناهمبند است. ■

از زیرمجموعه‌های مهّم دیگر $C_m(X)$، مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbb{R}$، مجموعهٔ D متشکل از عناصر مقسوم علیه صفر و مجموعه U شامل عناصر یکه است. به سادگی دیده می‌شود که $\mathbb{R}$ زیر فضای گسسته $C_m(X)$ است. نشان می‌دهیم U در $C_m(X)$ باز است و $cl_m D = C_m(X) \setminus U$، سپس با استفاده از این واقعیت‌ها، خواهیم دید که بسته بودن مجموعه عناصر مقسوم علیه صفر در $C_m(X)$ معادل است با این که X یک تقریباً P - فضا باشد.

۳- ۳ گزاره: مجموعهٔ U در $C_m(X)$ باز است.

اثبات: اگر $u \in U$، آن‌گاه یکه مثبت $\pi = \frac{|u|}{۲}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت $N_\pi(u) \subseteq U$، زیرا اگر $f \in N_\pi(u)$ ، آن‌گاه $|f-u| < \frac{|u|}{۲}$ نشان می‌دهد که $Z(f) = \varnothing$؛ یعنی f یکه است. ■

۳- ۴ قضیه: $cl_m D = C_m(X) \setminus U$.

اثبات: از آن‌جا که بنا به گزارهٔ ۳ - ۳، U باز است، پس $C_m(X) \setminus U$ بسته می‌باشد و بنابراین $cl_m D \subseteq C_m(X) \setminus U$. اکنون فرض می‌کنیم $f \in C_m(X) \setminus U$ و π یکه مثبت باشد. نشان می‌دهیم $N_\pi(f) \bigcap D \neq \varnothing$. تابع h را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) + \frac{\pi(x)}{۲} & , \quad f(x) \leq -\frac{\pi(x)}{۲} \\ \circ & , \quad |f(x)| \leq \frac{\pi(x)}{۲} \\ f(x) - \frac{\pi(x)}{۲} & , \quad f(x) \geq \frac{\pi(x)}{۲} \end{cases}$$

آشکار است که $h \in C(X)$ و $|f-h| < \pi$؛ یعنی $h \in N_\pi(f)$. از طرفی مجموعهٔ $G = \left\{ x \in X : \ |f(x)| < \frac{\pi(x)}{۲} \right\}$ در X باز و ناتهی است، چرا که $\varnothing \neq Z(f) \subseteq G$. از آن‌جا که $G \subseteq Z(h)$، پس $\operatorname{int}_X Z(h) \neq \varnothing$ و بنابراین $h \in D$؛ یعنی $N_\pi(f) \bigcap D \neq \varnothing$ که نتیجهٔ مطلوب است. ■

۳- ۵ نتیجه: D در $C_m(X)$ بسته است اگر و تنها اگر X یک تقریباً P - فضا باشد. ■

در صورتی که فضای X یک P - فضا باشد، آن‌گاه مجموعه عناصر یکه $C(X)$ نقش پررنگ‌تری در $C_m(X)$ دارد.

۳- ۶ قضیه: اگر X یک P - فضا باشد، آن‌گاه مجموعهٔ U در $C_m(X)$ چگال است.

اثبات: فرض کنیم $f \in C(X)$ و π یکه مثبت در $C(X)$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$u(x) = \begin{cases} f(x) + \frac{\pi(x)}{۲} & , \quad f(x) \geq \circ \\ f(x) - \frac{\pi(x)}{۲} & , \quad f(x) < \circ \end{cases}$$

چون X یک P - فضاست، صفر- مجموعهٔ $\{x \in X : f(x) \geq \circ\}$ در X باز است، در نتیجه هر دو مجموعهٔ $E = \{x \in X : f(x) \geq \circ\}$ و $F = \{x \in X : f(x) < \circ\}$ در X باز و بسته خواهند بود و از آن‌جا که $u|_E$ و $u|_F$ پیوسته می‌باشند، u روی X پیوسته است. علاوه بر این $|f-u| < \pi$؛ یعنی $u \in N_\pi(f)$. بدیهی است $u \in U$ و بنابراین $u \in U \bigcap N_\pi(f)$؛ یعنی $U \bigcap N_\pi(f) \neq \varnothing$ و در نتیجه $f \in cl_m U$. ■

اگر U^+ و U^- را به ترتیب مجموعهٔ عناصر یکه مثبت و منفی درنظر بگیریم، آن‌گاه بستار این مجموعه‌ها نیز به لحاظ نتایج حاصل از آن اهمیت دارد. در قضیهٔ زیر مجموعه $C^+(X)$ و $C^-(X)$ را به ترتیب مجموعهٔ توابع پیوسته نامنفی و نامثبت می‌گیریم.

۳- ۷ قضیه: گزاره‌های زیر برقرار هستند.

۱- $cl_m U^+ = C^+(X)$ و $cl_m U^- = C^-(X)$.

۲- $C^+(X) \bigcup C^-(X) \subseteq cl_m U$.

۳- $C^+(X)$ در $C_m(X)$ باز نیست ولی U^+ در $C_m(X)$ باز است.

اثبات: (۱) فرض کنیم $f \in C^+(X)$ و $u \in U^+$. در این صورت $f + \frac{u}{۲} \in U^+$ و از آن‌جا که $\left| f - (f + \frac{u}{۲}) \right| = \frac{u}{۲} < u$، داریم

$f + \frac{u}{۲} \in N_u(f)$.

در نتیجه $f + \frac{u}{۲} \in U^+ \bigcap N_u(f)$؛ یعنی $U^+ \bigcap N_u(f) \neq \varnothing$ و بنابراین $f \in cl_m U^+$. پس $C^+(X) \subseteq cl_m U^+$. حال اگر $g \in C(X)$ و $x_۰ \in X$ موجود باشد به طوری که $g(x_۰) < ۰$ و قرار دهیم $r_۰ = \frac{۱}{۲} | g(x_۰) |$، آن‌گاه تابع ثابت $r_۰$ یکه مثبت در $C(X)$ است؛ یعنی $r_۰ \in U^+$ و به علاوه $N_{r_۰}(g) \bigcap U^+ = \varnothing$، زیرا اگر فرض کنیم $u \in N_{r_۰}(g) \bigcap U^+$، در این صورت $|g(x_۰) - u(x_۰)| \geq |g(x_۰)| = ۲ r_۰ > r_۰$؛ یعنی $u \notin N_{r_۰}(g)$ که یک تناقض است. در نتیجه $N_{r_۰}(g) \bigcap U^+ = \varnothing$ و بنابراین $g \notin cl_m U^+$؛ یعنی $cl_m U^+ = C^+(X)$. به طور مشابه ثابت می‌شود که $cl_m U^- = C^-(X)$.

(۲) با استفاده از قسمت (۱)، اثبات آشکار است.

(۳) فرض می‌کنیم $u \in U^+$، نشان می‌دهیم $N_{\frac{u}{۲}}(u) \subseteq U^+$. اگر $f \in N_{\frac{u}{۲}}(u)$، آن‌گاه $| f - u | < \frac{u}{۲}$. در این صورت $Z(f) = \varnothing$، زیرا اگر $x_۰ \in Z(f)$، آن‌گاه $u(x_۰) < \frac{u(x_۰)}{۲}$ که غیرممکن می‌باشد، پس f یکه است. اکنون نشان می‌دهیم $f > ۰$. اگر $x_۰ \in X$ و $f(x_۰) < ۰$، آن‌گاه $u < |f(x_۰) - u| < \frac{u}{۲}$ که باز هم تناقض است و به این ترتیب $f \in U^+$. برای این که نشان دهیم $C^+(X)$ باز نیست، $f \in C^+(X)$ را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که $Z(f) \neq \varnothing$. اگر π یکهٔ مثبت باشد، آن‌گاه $f - \frac{\pi}{۲} \in N_\pi(f)$ ولی $f - \frac{\pi}{۲} \notin C^+(X)$، چرا که اگر $x \in Z(f)$، آن‌گاه $f(x) - \frac{\pi(x)}{۲} < ۰$. این نشان می‌دهد که $cl_m U^+ = C^+(X)$ باز نیست. ■

با استفاده از قسمت‌های (۱) و (۳) در قضیهٔ ۳- ۷، نتیجه زیر آشکار است.

۳- ۸ نتیجه: $C_m(X)$ ناهمبند شدید نیست. ■

از آن‌جا که $C_\infty(X)$ برابر با اشتراک ایدآل‌های ماکسیمال آزاد در $C^*(X)$ است، مطابق ۶A در [۲]، $C_\infty(X)$ در $C^*(X)$ با توپولوژی نُرم یکنواخت بسته است. همچنین مطابق ۷P در [۲]، ایدآل‌های بسته در $C^*(X)$ با m- توپولوژی برابر با اشتراک ایدآل‌های ماکسیمال در $C^*(X)$ است اگر و تنها اگر X شبه فشرده باشد. ولی $C_\infty(X)$، حتی اگر X شبه فشرده نباشد، در $C_m(X)$ بسته است.

۳- ۹ قضیه: $C_\infty(X)$ در $C_m(X)$ بسته است.

اثبات: فرض می‌کنیم $f \in cl_m C_\infty(X)$، نشان می‌دهیم برای هر $n \in \mathbb{N}$، مجموعهٔ $\left\{x \in X : |f(x)| \geq \frac{۱}{n}\right\}$ در X فشرده است. بنا به فرض، برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $N_{\frac{۱}{۲n}}(f) \cap C_\infty(X) \neq \varnothing$. اگر $g \in N_{\frac{۱}{۲n}}(f) \cap C_\infty(X)$، آن‌گاه $|f-g| < \frac{۱}{۲n}$ و مجموعهٔ $\left\{x \in X : |g(x)| \geq \frac{۱}{۲n}\right\}$ در X فشرده است. پس $|g| \geq |f| - \frac{۱}{۲n}$ و بنابراین

$$\left\{x \in X : |f(x)| \geq \frac{۱}{n}\right\} \subseteq \left\{x \in X : |g(x)| \geq \frac{۱}{۲n}\right\}.$$

در نتیجه مجموعهٔ $\left\{x \in X : |f(x)| \geq \frac{۱}{n}\right\}$ نیز در X فشرده است و از این رو $f \in C_\infty(X)$. ■

۳- ۱۰ نتیجه: $cl_m C_k(X) \subseteq C_\infty(X)$.

اثبات: چون $C_k(X) \subseteq C_\infty(X)$ و $C_\infty(X)$ بسته است، نتیجه مطلوب آشکار است. ■

اکنون بستار $C_k(X)$ را در $C_m(X)$ به صورت اشتراک ایدآل‌های ماکسیمال شناسایی می‌کنیم.

۳- ۱۱ قضیه: $cl_m(C_k(X)) = \bigcap_{p \in \beta X \setminus X} M^p$.

اثبات: بنابر $7E$ در [۲]، داریم $C_k(X) = \bigcap_{p \in \beta X \setminus X} O^p$، پس $C_k(X) \subseteq \bigcap_{p \in \beta X \setminus X} M^p$. از آن‌جا که هر ایدآل ماکسیمال بسته و در نتیجه اشتراک ایدآل‌های ماکسیمال بسته است، از این رو،

$$cl_m C_k(X) \subseteq \bigcap_{p \in \beta X \setminus X} M^p.$$

اکنون فرض کنیم $f \in \bigcap_{p \in \beta X \setminus X} M^p$؛ یعنی $\beta X \setminus X \subseteq cl_{\beta X} Z(f)$. برای هر یکهٔ مثبت u در $C(X)$، باید نشان دهیم $N_u(f) \cap C_k(X) \neq \varnothing$.

برای این منظور تابع $g : X \to \mathbb{R}$ را به شرح زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + \frac{u(x)}{۲} & , \quad f(x) \leq -\frac{u(x)}{۲} \\ ۰ & , \quad |f(x)| \leq \frac{u(x)}{۲} \\ f(x) - \frac{u(x)}{۲} & , \quad f(x) \geq \frac{u(x)}{۲} \end{cases}$$

پیداست که $g \in C(X)$ و

$$H = \left\{x \in X : |f(x)| \geq \frac{u(x)}{۲}\right\}$$

یک صفر- مجموعه در X است. قرار می‌دهیم $H = Z(h)$ که $h \in C(X)$ و نشان می‌دهیم $Z(f) \subseteq X \setminus Z(h) \subseteq Z(g)$. برای این منظور، فرض می‌کنیم $f(x)=۰$، در نتیجه $x \notin H$ و بنابراین $x \in X \setminus Z(h)$. همچنین اگر $x \in X \setminus Z(h)$، آن‌گاه $|f(x)| < \frac{u(x)}{۲}$ و بنابراین $x \in Z(g)$. اکنون بنابر ۷.۱۴ در [۲]، $cl_{\beta X} Z(g)$ یک همسایگی از $cl_{\beta X} Z(f)$ است و از این رو داریم $\beta X \setminus X \subseteq cl_{\beta X} Z(f) \subseteq \mathrm{int}_{\beta X} cl_{\beta X} Z(g)$. در نتیجه $g \in \bigcap_{p \in \beta X \setminus X} O^p = C_k(X)$. از طرف دیگر، برای هر $x \in X$، $|f(x) - g(x)| < u(x)$؛ یعنی $|f-g| < u$. پس $g \in N_u(f)$ و بنابراین $g \in N_u(f) \cap C_k(X)$. ■

تشکّر و قدردانی

نویسندگان مقاله، مراتب تشکّر و قدردانی خود را از آقای دکتر فریبرز آذرپناه برای راهنمایی‌های ارزشمندشان در مورد محتوی این مقاله ابراز می‌دارند.

مراجع

[1] Azarpanah, F., On almost P-space, Far East J. Math. Sci. (FJMS), Special Volume Part I (Geometry and Topology), (2000) 121-132.

[2] Gillman, L. and Jerison, M., Rings of continuous function, Springer-Verlag, (1976).

[3] Azarpanah, F. and Sondararajan, T., when the family of functions vanishing at infinity is an ideal of $C(X)$, Rocky Mountain J. Math. 31, 4 (2001) 1133-1140.

[4] Hewitt, E., Rings of real–valued continuous function I, Tranc. Amer. Math. Soc., 64 (1948) 45-99.

[5] Gomez-perez, J. and McGovern, W.W., The m-topology on $C_m(X)$ revisited, Topology Appl., 153 (2006) 1838-1848.

[6] Van Douwen, E., Nonnormality or hereditary paracompactness of some spaces of real functions, Topology Appl. 39, 1 (1991) 3-32.

[7] DiMaio, G., Holá, L., Holý, D. and Macoy, R.A., Topologies on the space of continuous functions, Topology Apply., 86, 2 (1998) 105-122.

[8] Gillman, L., Henriksen, M. and Jerison, M., On a theorem of Gelfand and Kolmogoroff concerning maximal ideals in rings of continuous functions, Proc. Amer. Math. Soc., 5, 3 (1954) 447-455.

[9] Shirota, T., On ideals in rings of continuous functions, Proc. Japan. Acad., 30 (1954) 85-89.

[10]Willard, S., General Topology, Addison wesley, Reading Mass., (1970).