# بررسی ساختاری کلاس مجموعه‌های ضربی- بسته

علی رضایی‌علی‌آباد
گروه ریاضی- دانشگاه شهید چمران اهواز
پست الکترونیکی: **aliabady_r@scu.ac.ir**

**چکیده**

*مجموعهٔ ضربی- بسته یکی از مفاهیم بسیار مهم و مفید در جبر است. با این همه تا کنون در هیچ کتاب یا مقاله‌ای مجموعه‌های ضربی- بسته به عنوان یک کلاس با ساختاری جبری مورد مطالعه قرار نگرفته است. در این مقاله یک ساختار جبری روی کلاس مجموعه‌های ضربی- بسته تعریف شده و مورد بررسی قرار می‌گیرد. به ویژه، شرایطی بررسی خواهد شد که تحت آن، این ساختار جبری با حلقهٔ بولی P(X) یکریخت باشد.*

**واژه‌های کلیدی:** *مجموعهٔ ضربی-بسته، ایدآل اول، ایدآل اول پاد مینیمال، حلقهٔ بولی، نیم‌مشبکه*

## بخش ۱.
### مقدمه

**۱-۱ نمادها و تعاریف مقدماتی.** در این مقاله همهٔ حلقه‌ها تعویض‌پذیر و یکدار هستند. مجموعهٔ ایدآل‌های اول مینیمال روی یک ایدآل I را با Min(I) و اشتراک همهٔ ایدآل‌های اول مینیمال در $R$، یعنی Min((0)) را با $\eta(R)$ نمایش می‌دهیم. فرض کنیم $R$ یک حلقه باشد. $S \subseteq R$ را مجموعهٔ ضربی- بسته می‌گوییم هرگاه $۱ \in S$ و اگر $s_۱, s_۲ \in S$، آن‌گاه $s_۱s_۲ \in S$. مجموعهٔ ضربی- بستهٔ $S$ را اشباع شده می‌گوییم، در صورتی که از $s_۱s_۲ \in S$ نتیجه شود $s_۱, s_۲ \in S$. اشتراک همهٔ مجموعه‌های ضربی- بسته اشباع شدهٔ شامل مجموعهٔ ضربی- بسته $S$ یک مجموعهٔ ضربی- بسته اشباع شده است که آن را اشباع شدهٔ $S$ می‌نامیم. فرض کنیم که $A$ مجموعه‌ای از ایدآل‌های اول در $R$ باشد؛ در این صورت $R \setminus \bigcup_{P \in A} P$ یک مجموعهٔ ضربی- بسته است که آن را با $S_A$ نمایش می‌دهیم. هرگاه $A = \{P\}$ باشد؛ در آن صورت برای راحتی از نماد $S_P$ به جای $S_A$ استفاده می‌کنیم. به‌راحتی دیده می‌شود که $S$ یک مجموعهٔ ضربی- بسته اشباع شده است اگر و تنها اگر مجموعهٔ $A$ متشکل از ایدآل‌های اول وجود داشته باشد که $S = S_A$. مجموعهٔ مرتب جزیی $X$ را مشبکه می‌گوییم هرگاه تحت دو عمل $a \vee b = \sup\{a,b\}$ و $a \wedge b = \inf\{a,b\}$ بسته باشد. به علاوه مجموعهٔ مرتب جزیی $X$ را نیم مشبکه می‌گوییم، هر گاه تحت یکی از این دو عمل بسته باشد. برای آشنایی با سایر نمادها و مفاهیم معرفی نشده،

در صورت لزوم، خواننده می‌تواند به هر کتاب جبر تعویض‌پذیر از جمله مراجع [۳ -۱] مراجعه نماید.

در بخش دوم این مقاله به ازای مجموعهٔ ضربی- بستهٔ مفروض $T$ و ایدآل $I$، ایدآل $T(I)$ را تعریف می‌کنیم و سپس خواص آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش سوم مقاله روی خانوادهٔ مجموعه‌های ضربی- بسته حلقهٔ $R$ یک رابطهٔ هم‌ارزی تعریف می‌کنیم و سپس نشان خواهیم داد که مجموعهٔ حاصل، با یک ترتیب طبیعی یک نیم مشبکه است؛ همچنین با یک عمل طبیعی یک نیم گروه یکدار است. در انتها ثابت خواهیم کرد که اگر مجموعهٔ این کلاس‌های هم‌ارزی متناهی باشد، با اعمال طبیعی، با حلقه بولی $P(X)$، که $X$ یک مجموعهٔ متناهی است، یکریخت است.

**بخش ۲.**

فرض کنیم که مجموعهٔ ضربی- بسته $T$ و ایدآل $I$ در حلقهٔ $R$ مفروض باشند. قرار می‌دهیم

$$T(I)=\{a\in R:\exists t\in T \ni at\in\sqrt{I}\}.$$

در واقع $T(I)$ تصویر معکوس $T^{-1}(\sqrt{I})$ تحت نگاشت طبیعی $R\to T^{-1}(R)$ است. دو لم زیر کارایی این مفهوم را نشان می‌دهد.

**۲- ۱ لم.** گیریم $T$ یک مجموعهٔ ضربی- بسته و $I$ یک ایدآل حلقهٔ $R$ باشد. در این صورت

الف) $T(I)$ یک ایدآل نیم اول شامل $\sqrt{I}$ است.

ب) $T(I)=T(\sqrt{I})$.

پ) $T(I)$ سره است اگر و تنها اگر $T\cap I=\varnothing$؛ که این هم معادل است با $T\cap\sqrt{I}=\varnothing$؛ این نیز معادل است با این که $T\cap T(I)=\varnothing$.

**اثبات.** اثبات معمولی است و به دلیل طولانی بودن از آن صرف‌نظر می‌کنیم.

**۲- ۲ لم.** با مفروضات و علایم بالا، احکام زیر برقرارند:

الف) اگر $I$ و $J$ دو ایدآل در $R$ باشند، آن‌گاه $T(IJ)=T(I\cap J)=T(I)\cap T(J)$. بنابراین اگر $I$ و $J$ دو ایدآل در $R$ باشند و $I\subseteq J$، آن‌گاه $T(I)\subseteq T(J)$. عکس این حکم درست نیست؛ زیرا اگر $P\in Min(I)$ و $S=R\setminus P$، آن‌گاه $S(I)=S(P)$؛ در حالی که $P\not\subseteq I$.

ب) اگر $T_1\subseteq T_2$ آن‌گاه $T_1(I)\subseteq T_2(I)$؛ عکس این حکم درست نیست؛ زیرا اگر $P$ و $Q$ دو ایدآل اول متمایز باشند که $P_1\subseteq P_2$ و بگیریم $T_1=R\setminus P_1$ و $T_2=R\setminus P_2$، آن‌گاه $P_1=T_1(P_1)=T_2(P_2)$ در حالی که $T_1\not\subseteq T_2$.

پ) اگر $T_1$ و $T_2$ دو مجموعهٔ ضربی- بسته در $R$ باشند، آن‌گاه $T_1(T_2(I))=(T_1T_2)(I)$ بنابراین $T(T(I))=T(I)$.

ث) $\frac{T(I)}{I}=\frac{T}{I}(\bar{0})$.

ح) با فرض این که $P$ یک ایدآل اول و $T$ یک مجموعهٔ ضربی- بسته در $R$ باشند، در این صورت اگر $T\cap P=\varnothing$، آن‌گاه $T(P)=P$ در غیر این صورت $T(P)=R$.

**اثبات.** اثبات معمولی است و به دلیل طولانی بودن از آن صرف‌نظر می‌کنیم.

**۲-۳ قضیه.** $T(I)=\sqrt{I}$ اگر و تنها اگر $T\cap P=\varnothing$ برای هر $P\in Min(I)$.

**اثبات.** ($\Rightarrow$) فرض کنیم که $P\in Min(I)$. گیریم $a\in T(I)$ دلخواه باشد؛ در این صورت $t\in T$ وجود

دارد که $at \in \sqrt{I} \subseteq P$. و چون با توجه به فرض $t \notin P$، پس $a \in P$. بنابراین $T(I) \subseteq P$ برای هر $P \in Min(I)$ و در نتیجه

$$\sqrt{I} \subseteq T(I) \subseteq \bigcap_{P \in Min(I)} P = \sqrt{I}.$$

بنابراین $T(I) = \sqrt{I}$.

$\Leftarrow$) فرض کنیم که $P \in Min(I)$ و $a \in P$. پس یک $c \notin P$ موجود است که $ac \in \sqrt{I}$. حال اگر به فرض خلاف که $a \in T$، آن‌گاه لزوماً $c \in T(I) = \sqrt{I} \subseteq P$ و این یک تناقض است.

**۲-۴ تعریف.** مجموعهٔ همهٔ زیر مجموعه‌های ضربی- بسته در $R$ را با $\mathcal{T}(R)$ و مجموعهٔ همهٔ زیر مجموعه‌های ضربی- بستهٔ اشباع شده در $R$ را با $\mathcal{S}(R)$ نمایش می‌دهیم. علاوه بر آن فرض کنیم که $I$ یک ایدآل سره در $R$ باشد، $S \in \mathcal{T}(R)$ و $S \cap I = \varnothing$؛ قرار می‌دهیم

$$A_{S,I} = \{T \in \mathcal{T}(R) : S \subseteq T, T \cap I = \varnothing\}.$$

برای راحتی به جای علامت $A_{S,I}$ از علامت $A_S$ و در صورتی که $S=\{۱\}$، به جای $A_S$ از نماد $A$ استفاده می‌کنیم.

**۲-۵ نتیجه.** اگر $I$ یک ایدآل $R$ باشد، آن‌گاه یک $S \in \mathcal{S}(R)$ وجود دارد که $S(I) = \sqrt{I}$.

**اثبات.** کافی است بگیریم $S = R \setminus \bigcup_{P \in Min(I)} P$؛ در این صورت بنابر قضیهٔ بالا نتیجه واضح است.

**۲-۶ قضیه.** فرض کنیم که $I$ یک ایدآل سره در $R$ باشد و $S \in \mathcal{T}(R)$ که $S \cap I = \varnothing$؛ در این صورت $A_S$ دارای عنصر ماکسیمال است و علاوه بر آن هر عنصر ماکسیمال $S_{\circ}$ در $A_S$، به صورت $R \setminus P$ است که در آن $P$ یک ایدآل اول مینیمال روی $I$ است.

**اثبات.** با توجه به این که $T(R)$ تحت اجتماع زنجیر بسته است، و با استفاده از لم تسورن، ماکسیمال داشتن $A$ بدیهی است. اکنون فرض کنیم که $S_{\circ}$ یک عنصر ماکسیمال در $A$ باشد. ابتدا نشان می‌دهیم که $S_{\circ}(I)$ یک ایدآل اول است. برای این منظور فرض کنیم که $a,b \notin S_{\circ}(I)$؛ پس برای هر $s \in S_{\circ}$، $as, bs \notin \sqrt{I}$. بنابراین مجموعه‌های

$$T_۱ = \{a^n s : s \in S_{\circ}, n \in N_{\circ}\},$$
$$T_۲ = \{b^n s : s \in S_{\circ}, n \in N_{\circ}\}$$

ضربی- بسته هستند و $T_۱ \cap I = T_۲ \cap I = \varnothing$. در نتیجه بنابر ماکسیمال بودن $S_{\circ}$ بایستی داشته باشیم $T_۱ = T_۲ = S_{\circ}$. پس $a,b \in S_{\circ}$ و در نتیجه $ab \in S_{\circ}$. از این رو بنا بر لم ۲-۱، قسمت «پ»، $ab \notin S_{\circ}(I)$. بنابراین $S_{\circ}(I)$ یک ایدآل اول شامل $I$ است. حال فرض کنیم $P \in Min(I)$ چنان باشد که $I \subseteq P \subseteq S_{\circ}(I)$. در این صورت $S_{\circ}(P) \subseteq S_{\circ}(S_{\circ}(I)) = S_{\circ}(I)$ و در نتیجه $S_{\circ}(P)$ یک ایدآل سره است و از این هم نتیجه می‌شود که $S_{\circ} \cap P = \varnothing$ و به تبع آن $S_{\circ} \subseteq R \setminus P$. حال، با توجه به ماکسیمال بودن $S_{\circ}$، از رابطه اخیر نتیجه می‌شود که $S_{\circ} = R \setminus P$.

**۲-۷ نتیجه.** نگاشت $S \to S(I)$ یک تناظر یک به یک بین عناصر ماکسیمال $A$ و $Min(I)$ برقرار می‌کند.

**اثبات.** با توجه به قضیه بالا کافی است نشان دهیم که $S = S_P$ برای هر $P \in Min(I)$ یک عنصر ماکسیمال در $A$ است. بنابر قضیهٔ بالا یک ایدآل $Q \in Min(I)$ وجود دارد که $S_Q$ یک عنصر ماکسیمال در $A$ است و $S_P \subseteq S_Q$؛ در نتیجه $Q \subseteq P$ و از این هم نتیجه می‌شود که $Q = P$. بنابراین $S_P = S_Q$ در $A$ ماکسیمال است.

**۲- ۸ قضیه.** گیریم $T_0 \in \mathcal{T}(R)$؛ در این صورت $S_0 \in \mathcal{S}(R)$ وجود دارد که $S_0(I)=T_0(I)$.

**اثبات.** قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{B}=\{T\in\mathcal{T}(R): T_0\subseteq T,\quad T(I)=T_0(I)\}.$$

نشان می‌دهیم که $\mathcal{B}$ دارای عنصر ماکسیمال است. این حکم واضح است؛ زیرا به سادگی ثابت می‌شود که اگر $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ زنجیری از مجموعه‌های ضربی- بسته در $R$ باشد، آن‌گاه $(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda)(I)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(S_\lambda(I))$. اکنون نشان می‌دهیم که هر عنصر ماکسیمال در $\mathcal{B}$ اشباع شده است. فرض کنیم $S$ یک عنصر ماکسیمال در $\mathcal{B}$ باشد و $s_1s_2\in S$. واضح است که $\bigcup_{n=0}^{\infty} s_1^n S = T\in\mathcal{T}(R)$. ثابت می‌کنیم که $T(I)=T_0(I)$. فرض کنیم که $a\in T(I)$؛ پس $s_1^n s\in T$ وجود دارد که $as_1^n s\in\sqrt{I}$. بنابراین $a(s_1s_2)^n s\in\sqrt{I}$ و چون $a(s_1s_2)^n s\in S$، پس $a\in S(I)=T_0(I)$. بنابراین $T(I)=T_0(I)$ و در نتیجه $T\in\mathcal{B}$ و چون $S$ ماکسیمال است، لاجرم بایستی $S=T$ و این هم نتیجه می‌دهد که $s_1\in S$. به طور مشابه نتیجه می‌شود که $s_2\in S$. بنابراین $S$ اشباع شده است.

**۲- ۹ نتیجه.** فرض کنیم $T\in\mathcal{T}(R)$ و $S$ مجموعهٔ ضربی- بستهٔ اشباع شدهٔ $T$ باشد. در این صورت $S(I)=T(I)$.

**اثبات.** با توجه به قضیهٔ بالا مجموعهٔ اشباع شدهٔ $S_0$ شامل $T$ وجود دارد که $S_0(I)=T(I)$. بدیهی است که $S\subseteq S_0$ و در نتیجه

$$T(I)\subseteq S(I)\subseteq S_0(I)=T(I)\Rightarrow T(I)=S(I).$$

می‌دانیم که در حلقهٔ $R$، ایدآل اول $P$ یک ایدآل اول مینیمال روی ایدآل $I$ است، اگر و تنها اگر برای هر $a\in P$ یک $c\notin P$ وجود داشته باشد که $ac\in\sqrt{I}$ یا به عبارت دیگر $P$ یک ایدآل اول مینیمال روی $I$ است اگر و تنها اگر $(\sqrt{I}:a)\nsubseteq P$ برای هر $a\in P$. این مفهوم الهام بخش تعریف زیر است.

**۲- ۱۰ تعریف.** گیریم $I$ یک ایدآل سره در حلقهٔ $R$ باشد. ایدآل اول $P$ را یک ایدآل پاد- مینیمال روی $I$ گوییم هرگاه برای هر $r\in R\setminus\sqrt{I}$ داشته باشیم $(\sqrt{I}:r)\subseteq P$. به‌علاوه، ایدآل $P$ را یک ایدآل اول پاد- مینیمال گوییم هرگاه $(\eta(R):r)\subseteq P$ برای هر $r\notin\eta(R)$. بدیهی است که اگر $R$ یک حلقه کاهش یافته باشد، آن‌گاه ایدآل $P$ یک ایدآل اول پاد- مینیمال است هرگاه برای هر $0\neq a\in R$، $Ann(a)\subseteq P$.

**۲- ۱۱ لم.** فرض کنیم $P$ یک ایدآل اول و $I$ یک ایدآل سرهٔ دلخواه در $R$ باشند. در این صورت

الف) $P$ یک ایدآل اول پاد– مینیمال روی $I$ است اگر و تنها اگر برای هر $r\in R\setminus\sqrt{I}$، $(I:r)\subseteq P$؛

ب) اگر $P$ ایدآل اول پاد- مینیمال روی $I$ باشد، آن‌گاه $\sqrt{I}\subseteq P$.

**اثبات.** الف $\Leftarrow$) چون $(I:r)\subseteq(\sqrt{I}:r)$، حکم بدیهی است.

الف $\Rightarrow$) فرض کنیم که $r\in R\setminus\sqrt{I}$ و $a\in(\sqrt{I}:r)$. پس $ar\in\sqrt{I}$ و در نتیجه $n\in N$ وجود دارد که $a^nr^n\in I$. از سوی دیگر $r\notin\sqrt{I}$؛ در نتیجه $r^n\notin\sqrt{I}$ و از این رو $(I:r^n)\subseteq P$. بنابراین $a^n\in P$ و لذا $a\in P$.

ب) کافی است قرار دهیم $r=1$.

بنابراین بدون این که از کلیت مطلب کم شود همواره می‌توان ایدآل $I$ را نیم اول در نظر گرفت.

**۲- ۱۲ قضیه.** گیریم $I$ یک ایدآل نیم اول و $Q$ یک ایدآل اول در $R$ باشند. در این صورت احکام زیر هم ارزند:

الف) $Q$ یک ایدآل اول پاد- ینیمال روی $I$ است.

ب) $\bigcup_{P \in Min(I)} P \subseteq Q$.

پ) $S_Q(I) = I$.

**اثبات.** الف $\Leftarrow$ ب) فرض کنیم $a \in P \in Min(I) = X$. از $a \in P$ نتیجه می‌شود که $c \notin P$ وجود دارد به قسمی که $ac \in I$. واضح است که $c \notin I$ و در نتیجه $a \in (I:c) \subseteq Q$. پس $P \subseteq Q$ برای هر $P \in X$ و در نتیجه $\bigcup_{P\in X} P \subseteq Q$.

ب $\Leftarrow$ پ) آشکار است که همواره $I \subseteq S_Q(I)$. به عکس، گیریم $a \in S_Q(I)$؛ پس $s \in S_Q$ وجود دارد که $as \in I$. چون $s \notin Q$، پس $as \in P$ و $s \notin P$ برای هر $P \in X$. بنابراین $a \in P$ برای هر $P \in X$ و در نتیجه $a \in \bigcap_{P\in X} P = I$.

پ $\Leftarrow$ الف) فرض کنیم $r \in R \setminus I$؛ پس $r \notin S_Q(I)$؛ یعنی $rs \notin I$ برای هر $s \in S_Q$ و این هم یعنی $(I:r) \bigcap S_Q = \varnothing$؛ بنابراین $(I:r) \subseteq Q$.

**۲-۱۳ نتیجه.** فرض کنیم $I$ یک ایدآل نیم اول باشد و $P \in Min(I)$. در این صورت $P$ یک ایدآل اول پاد- مینیمال روی $I$ است اگر و تنها اگر $I=P$.

**۲- ۱۴ لم.** گیریم $I$ یک ایدآل نیم اول غیر اول و $Q$ یک ایدآل اول پاد- مینیمال روی $I$ باشند. در این صورت $a \in P$ اگر و تنها اگر برای هر $P \in Min(I) = X$ یک $c \in Q \setminus P$ موجود باشد که $ac = I$.

**اثبات.** $\Leftarrow$) فرض کنیم $a \in P$؛ پس یک $c \notin P$ وجود دارد که $ac \in I$؛ یعنی $c \in (I:a)$. حال، اگر $a \in I$، آن‌گاه مسئله منتفی شده است، در غیر این صورت نتیجه می‌شود که $c \in (I:a) \subseteq Q$ و در نتیجه $c \in Q \setminus P$.

$\Rightarrow$ بدیهی است.

**۲- ۱۵ قضیه.** احکام زیر برای هر ایدآل $I$ در حلقه $R$ معادلند:

الف) ایدآل اول پاد – مینیمال روی $I$ وجود دارد.

ب) ایدآل $\sum_{a\notin I} (I:a)$ سره است.

پ) ایدآل (سره) $J$ وجود دارد که $(J:c) = I$ برای هر $c \notin J$.

**اثبات.** الف $\Leftarrow$ ب) بدیهی است.

ب $\Leftarrow$ پ) می‌گیرم $J = \sum_{a\notin I} (I:a)$. حال فرض کنیم $c \notin J$ و $b \in (I:c)$. پس $bc \in I$؛ یعنی $c \in (I:b)$. با توجه به تعریف $J$ و این که $c \notin J$، نتیجه می‌شود که $b \in I$. بنابراین $(I:c) \subseteq I$ و لذا تساوی برقرار است.

پ $\Leftarrow$ الف) با این قرار که $X = Min(I)$، با توجه به فرض و با توجه به این که $(I:a) = I \Leftrightarrow a \notin \bigcup_{P\in X} P$، می‌توان نوشت:

$$\forall c \notin J,\ \ (I:c) = I \Rightarrow\ \ \forall c \notin J,\ \ c \notin \bigcup_{p\in X} P \Rightarrow$$

$$R \setminus J \subseteq R \setminus \bigcup_{P\in X} P \Rightarrow \bigcup_{P\in X} P \subseteq J\ .$$

حال کافی است ایدآل اول $Q$ را چنان بگیریم که شامل $J$ باشد. در این صورت بنابر مطلب قبل، $Q$ یک ایدآل اول پاد– مینیمال روی $I$ خواهد بود.

**۲- ۱۶ نتیجه.** ایدآل نیم اول $I$ در $C(X)$ دارای ایدآل اول پاد – مینیمال است اگر و تنها اگر $O^p(X) \subseteq I$

برای یک $p \in \beta X$، برای آشنایی بیش‌تر با مفاهیم $O^p(X)$ و $\beta X$، رجوع شود به مرجع [۴].

**اثبات**. $\Leftarrow$) فرض کنیم $O^p(X) \not\subseteq I$ برای هر $p \in \beta X$. پس $P_1, P_2 \in Min(I)$ وجود دارند که $p \neq q$، $O^p(X) \subseteq P_1$ و $O^p(X) \subseteq P_2$ واضح است که $P_1 + P_2 = C(X)$ و در نتیجه هیچ ایدآل اول شامل $\bigcup_{P \in Min(I)} P$ وجود ندارند؛ یعنی ایدآل اول پاد-مینیمال روی $I$ وجود ندارند. $\Rightarrow$) بدیهی است.

**بخش ۳.**

در این بخش هدف اصلی این است که روی خانواده مجموعه‌های ضربی- بسته یک حلقه، یک ساختار جبری بیابیم و آن را مورد مطالعه قرار دهیم.

**۳-۱ تعریف.** گیریم $I$ یک ایدآل در حلقهٔ $R$ باشد. رابطه زیر را روی $\mathcal{T}(R)$ تعریف می‌کنیم:

$$S \equiv T (\text{mod } I) :\Leftrightarrow S(I) = T(I).$$

به راحتی می‌توان نشان داد که رابطهٔ فوق یک رابطهٔ هم‌ارزی است. کلاس هم‌ارزی هر عنصر $S$ را با $[S]$ و یا $\overline{S}$ و مجموعهٔ همهٔ کلاس‌های هم‌ارزی را با $\overline{\mathcal{T}}_I(R)$ و یا به اختصار با $\overline{\mathcal{T}}(R)$ نمایش می‌دهیم. اکنون می‌توان ترتیب جزیی زیر را روی $\overline{\mathcal{T}}(R)$ تعریف کرد:

$$\overline{S} \leq \overline{T} :\Leftrightarrow S(I) \subseteq T(I).$$

به سادگی می‌توان دید که از $T \subseteq S$ نتیجه می‌شود $\overline{S} \leq \overline{T}$؛ اما عکس این حکم برقرار نیست.

به عنوان مثال اگر $P$ و $Q$ دو ایدآل اول در حلقهٔ $R$ باشد به قسمی که $P \subseteq Q$. حال اگر قرار دهیم $I=P$، $T=R\backslash P$ و $S=R\backslash Q$، آن‌گاه $S \equiv T (\text{mod } I)$؛ به عبارت دیگر $\overline{S} = \overline{T} = \overline{\{1\}}$. در واقع در این مثال مجموعهٔ کلاس‌های هم‌ارزی برابر است با $\{\overline{R}, \overline{\{1\}}\}$.

**۳-۲ لم.** فرض کنیم $S,T \in \mathcal{T}(R)$ و $S(I) \subseteq T(I)$ در این صورت $ST(I) = T(I)$.

**اثبات**. واضح است که $T(I) \subseteq ST(I)$. اکنون فرض کنیم که $a \in ST(I)$؛ پس $s \in S$ و $t \in T$ وجود دارند که $ast \in \sqrt{I}$. بنابراین $at \in S(I) \subseteq T(I)$. از این رو $t' \in T$ موجود است که $att' \in \sqrt{I}$ و چون $tt' \in T$، پس $a \in T(I)$.

**۳-۳ نتیجه.** $\overline{S} \leq \overline{T}$ اگر و تنها اگر عنصری از کلاس $\overline{T}$ شامل عنصری از کلاس $\overline{S}$ باشد.

**اثبات**. با توجه به لم ۳-۲ ساده است.

با استفاده از لم تسورن به راحتی می‌توان دید که کلاس $\overline{T}$، با رابطهٔ شمول دارای عناصر ماکسیمال و مینیمال است.

**۳-۴ قضیه:** $\overline{S} \vee \overline{T} = \overline{ST}$ برای هر $\overline{S}, \overline{T} \in \overline{\mathcal{T}}(\text{R})$.

**اثبات**. واضح است که $\overline{S}, \overline{T} \leq \overline{ST}$. حال فرض کنیم $\overline{S}, \overline{T} \leq \overline{S}_\circ$؛ باید نشان دهیم که $\overline{ST} \leq \overline{S}_\circ$. بنابر نتیجهٔ قبل بدون این که از کُلیّت مسأله کم شود می‌توان فرض کرد که $S, T \subseteq S_\circ$. بنابراین می توان نوشت:

$$ST \subseteq S_\circ \;\Rightarrow\; ST(I) \subseteq S_\circ(I) \Rightarrow \overline{ST} \leq \overline{S}_\circ .$$

**۳-۵ نتیجه.** اگر $\overline{S}_1, \overline{S}_2, \overline{T}_1, \overline{T}_2 \in \overline{\mathcal{T}}(R)$، $\overline{S}_1 = \overline{S}_2$ و $\overline{T}_1 = \overline{T}_2$، آن‌گاه $\overline{S_1T_1} = \overline{S_2T_2}$.

**اثبات**. با توجه به قضیهٔ بالا بدیهی است.

براساس مطالب اخیر $\overline{\mathcal{T}}(R)$، با عمل بالا یک نیم مشبکه است و برای هر $S \in \overline{\mathcal{T}}(R)$

$$\bar{1} \vee \bar{S} = \overline{1S} = \bar{S} \quad \therefore \quad \bar{1} \le \bar{S},$$

$$\bar{R} \vee \bar{S} = \overline{RS} = \bar{R} \quad \therefore \quad \bar{S} \le \bar{R}.$$

به علاوه اگر تعریف کنیم $\bar{S}\,\bar{T} := \overline{ST}$، آن‌گاه بنابر مطالب بالا این عمل خوش تعریف است و $\bar{\mathcal{T}}(R)$ با این عمل یک نیم‌گروه تعویض‌پذیر و یکدار خواهد بود.

**۳-۶ تعریف.** عنصر $\bar{T} \in \bar{\mathcal{T}}(R)$ را سره گوییم هرگاه $\bar{T} \ne \bar{R}$؛ یعنی $T \cap I = \varnothing$. از این پس منظور از عنصر ماکسیمال در $\bar{\mathcal{T}}(R)$، عنصر ماکسیمال سره است.

**۳-۷ قضیه.** عنصر $\bar{T}$ در $\bar{\mathcal{T}}(R)$ ماکسیمال است اگر و تنها اگر $P \in Min(I)$ وجود داشته باشد به قسمی که $\bar{S}_P = \bar{T}$.

**اثبات** $\Leftarrow$) با توجه به نتیجه ۲-۷ بدیهی است.

$\Rightarrow$) فرض کنیم $\bar{T} \in \bar{\mathcal{T}}(R)$ ماکسیمال باشد. بنابر قضیهٔ ۲-۶ مجموعهٔ ضربی- بسته ماکسیمال $S$ مجزا از $I$ وجود دارد که $P = R \setminus S \in Min(I)$ و $T \subseteq S$ بنابراین و با توجه به ماکسیمال بودن $\bar{T}$ می‌توان نوشت:

$$T \subseteq S \Rightarrow \bar{T} \subseteq \bar{S} \Rightarrow \bar{T} = \bar{S}.$$

**۳-۸ لم.** برای هر عنصر سره $\bar{T} \in \bar{\mathcal{T}}(R)$ یک عنصر ماکسیمال $\bar{S}$ در $\bar{\mathcal{T}}(R)$ وجود دارد که $\bar{T} \le \bar{S}$.

**اثبات.** با توجه به قضیهٔ ۲-۶ بدیهی است.

**۳-۹ نتیجه.** تابع $\varphi : Min(I) \to \bar{\mathcal{T}}(R)$ با ضابطه $\varphi(P) = \bar{S}_P$ یک تناظر یک به یک است.

**اثبات.** با توجه به نتیجه ۲-۷ بدیهی است.

ممکن است این طور به نظر برسد که اگر $\bar{S} \in \bar{\mathcal{T}}(R)$ ماکسیمال باشد، آن‌گاه کلاس $\bar{S}$ تک عضوی است؛ ولی چنین نیست. حتی مجموعهٔ عناصر اشباع شده این کلاس نیز ممکن است تک عضوی نباشد.

به عنوان مثال فرض کنیم $I \subseteq P \subseteq Q$ که در آن $\{P\} = Min(I)$ و $Q \ne P$؛ در این صورت اگر بگیریم $S_1 = R \setminus P$ و $S_2 = R \setminus Q$، آن‌گاه $S_1$ و $S_2$ اشباع شده‌اند و $\bar{S}_1 = \bar{S}_2$ ماکسیمال است؛ زیرا $S_1(I) = S_2(I) = P$. البته در این حالت $\bar{\mathcal{T}}(R)$ دو عضوی است. مثال زیر یک مثال غیر بدیهی در این زمینه است. فرض کنیم $X$ یک فضای توپولوژی و $x_1, \dots, x_n \in X$ غیر P-نقطه باشند و

$$M_i = \{f \in C(X) :\ f(x_i) = 0\}.$$

چون $x_i$ها $P$- نقطه نیستند، برای هر $1 \le i \le n$ ایده‌آل اول $P_i$ چنان وجود دارد که $P_i \subseteq M_i$ و $P_i \ne M_i$ (برای آشنایی با مفهوم $P$- نقطه و نتایج مربوط به آن، رجوع شود به [۱]). قرار می‌دهیم $I = \bigcap_{i=1}^{n} P_i$؛ در این صورت اگر بگیریم $S_i = R \setminus P_i$ و $T_i = R \setminus M_i$، آن‌گاه $S_i$ و $T_i$ اشباع شده‌اند و $\bar{T}_i = \bar{S}_i$ ماکسیمال است؛ زیرا $S_i(I) = T_i(I) = P_i$.

**۳-۱۰ لم.** فرض کنیم $X = Min(I)$ متناهی باشد و $A \subseteq X$؛ در این صورت $S_A(I) = \bigcap_{P \in A} P$.

**اثبات.** واضح است که $Q \not\subseteq \bigcup_{P \in A} P$ برای هر $Q \in X \setminus A$؛ پس $Q \cap S_A \ne \varnothing$ برای هر $Q \in X \setminus A$ و در نتیجه $S_A(Q) = R$ برای هر $Q \in X \setminus A$. از سوی دیگر $P \cap S_A = \varnothing$ برای هر $P \in A$. بنابراین $S_A(P) = P$ برای هر $P \in A$. از این رو

$$S_A(I) = S_A((\bigcap_{P \in A} P) \cap (\bigcap_{P \in X \setminus A} P))$$

$$= (\bigcap_{P \in A} S_A(P)) \cap (\bigcap_{P \in X \setminus A} S_A(P)) = \bigcap_{P \in A} P.$$

**۳-۱۱ قضیه.** فرض کنیم که $X = Min(I)$. در این صورت

الف) $\overline{\mathcal{T}}(R)$ متناهی است، اگر و تنها اگر $X$ متناهی باشد؛

با فرض این که $X$ متناهی و تابع $\varphi : P(X) \to \overline{\mathcal{T}}(R)$ با ضابطهٔ $\varphi(A) = \overline{S}_A$ باشد، آن‌گاه

ب) $\varphi$ یک تناظر یک به یک است؛

پ) $A \subseteq B$ اگر و تنها اگر $\varphi(B) \le \varphi(A)$؛ یعنی $\overline{S}_B \le \overline{S}_A$.

**اثبات.** الف $\Leftarrow$) واضح است که $S_P(I) = P \neq Q = S_Q(I)$ برای هر دو عنصر متمایز $P, Q \in X$. پس اگر $\overline{\mathcal{T}}(R)$ متناهی باشد، آن‌گاه $X$ نیز متناهی است.

الف $\Rightarrow$) فرض کنیم که $\overline{T} \in \overline{\mathcal{T}}(R)$ و A مجموعه همهٔ عناصر مجزا با $T$ در $X$ باشد. بنابراین با توجه به لم ۲-۱ قسمت «پ»، نتیجه می‌شود که $T(P) = R$ برای هر $P \in \mathrm{B} = X \setminus \mathrm{A}$. پس می‌توان نوشت:

$$T(I) = T((\bigcap_{P\in \mathrm{A}} P) \bigcap (\bigcap_{P\in \mathrm{B}} P)) = ((\bigcap_{P\in \mathrm{A}} T(P)) \bigcap (\bigcap_{P\in \mathrm{B}} T(P)) = \bigcap_{P\in \mathrm{A}} P \,.$$

بنابراین $\overline{\mathcal{T}}(R)$ متناهی است.

ب) گیریم $\overline{T} \in \overline{\mathcal{T}}(R)$. در این صورت بنا بر لم ۳-۱۰ و اثبات قسمت «الف» همین قضیه، $A \subseteq X$ وجود دارد که $T(I) = S_A(I)$. پس $\varphi(A) = \overline{S}_A = \overline{T}$. بنابراین $\varphi$ پوشاست. یک به یک بودن $\varphi$ نتیجه ساده‌ای از قسمت «پ» همین قضیه است.

پ) فرض کنیم $A \subseteq B$؛ پس به وضوح $S_B \subseteq S_A$ و در نتیجه $\overline{S}_B \le \overline{S}_A$. به عکس، فرض کنیم $\overline{S}_B \le \overline{S}_A$ در این صورت بنابر لم بالا نتیجه می‌شود که $\bigcap_{P\in B} P = S_B(I) \subseteq S_A(I) = \bigcap_{P\in A} P$. با توجه به رابطهٔ اخیر اگر $P_\circ \in A$، آن‌گاه $\bigcap_{P\in B} P \subseteq P_\circ$، و چون $B$ متناهی است، پس $P \in B$ موجود است که $P \subseteq P_\circ$ و در نتیجه $P = P_\circ$. بنابراین به وضوح نتیجه می‌شود که $A \subseteq B$.

اکنون آماده‌ایم تا قضیه اساسی این بخش را که در واقع نتیجه‌ای از قضیهٔ ۳-۱۲ است، بیان و اثبات کنیم.

**۳-۱۲ قضیه.** با فرض این که $X = Min(I)$ متناهی باشد، آن‌گاه $\overline{\mathcal{T}}(R)$ همراه با عمل ضرب قبلی و عمل جمع زیر یک حلقهٔ بولی است.

$$\forall A, B \in P(X) \quad \overline{S}_A + \overline{S}_B = \overline{S}_{A\Delta B} \,.$$

**اثبات.** تابع $\varphi : P(X) \to \overline{\mathcal{T}}(R)$ را با ضابطهٔ $\varphi(A) = \overline{S}_A$ درنظر می‌گیریم. واضح است که بنا بر قضیهٔ قبل این تابع دوسویی و عمل جمع تعریف شده روی $\overline{\mathcal{T}}(R)$ خوش‌تعریف است. کافی است نشان دهیم که اعمال جمع و ضرب تعریف شده روی $\overline{\mathcal{T}}(R)$ با اعمال جمع و ضرب القاء شده از این تابع دوسویی روی $\overline{\mathcal{T}}(R)$ یکی است. برای این منظور کافی است ثابت کنیم که

$$\overline{S}_A . \overline{S}_B = \varphi(A) . \varphi(B) = \varphi(A \bigcap B) = \overline{S}_{A\cap B} \,.$$

پس بایستی نشان دهیم $\overline{S}_A \vee \overline{S}_B = \overline{S}_{A\cap B}$. بنابر قضیهٔ بالا $\overline{S}_A, \overline{S}_B \le \overline{S}_{A\cap B}$. حال فرض کنیم که $\overline{S}_A, \overline{S}_B \le \overline{S}_D$؛ باز هم بنابر قضیهٔ بالا نتیجه می‌شود که $D \subseteq A, B$. پس $D \subseteq A \bigcap B$ و در نتیجه $\overline{S}_{A\cap B} \le \overline{S}_D$.

از استدلال بالا به سادگی دیده می‌شود که اگر $|Min(I)| = n$، آن‌گاه $|\overline{\mathcal{T}}(R)| = ۲^n$. قضیهٔ بالا این سؤال را به ذهن می‌آورد که: «اگر $X$=$Min(I)$ نامتناهی باشد آیا باز هم می‌توان شکل نمایش $T(I)$ را بر حسب عناصر $Min(I)$ نوشت؟» برای پاسخ به این پرسش به دو لم زیر نیاز داریم.

**۳-۱۳ لم.** گیریم $Q \in Min(T(I))$. در این صورت $Q \bigcap T = \varnothing$.

**اثبات.** فرض کنیم $a \in Q$؛ پس $b \notin Q$ وجود دارد که $ab \in T(I)$ و در نتیجه $t \in T$ وجود خواهد داشت که $abt \in \sqrt{I}$. حال اگر به فرض خلاف $a \in T$، آن‌گاه نتیجه می‌شود که $b \in T(I) \subseteq Q$ و این تناقض است.

**۳-۱۴ لم.** گیریم $P \in Min(I)$ و $T \in \mathcal{T}(R)$. در این صورت $T(I) \subseteq P$ اگر و تنها اگر $P \bigcap T = \varnothing$.

**اثبات.** ⇐) فرض کنیم $t \in P \bigcap T$ در این صورت $b \notin P$ موجود است که $bt \in \sqrt{I}$ و در نتیجه $b \in T(I)$. بنابراین $T(I) \not\subseteq P$.

⇒) فرض کنیم $a \in T(I)$؛ پس $t \in T$ وجود دارد که $at \in \sqrt{I} \subseteq P$ و چون $P \bigcap T = \varnothing$، پس $t \notin P$ و در نتیجه $a \in P$.

**۳-۱۵ قضیه.** فرض کنیم $I$ یک ایدآل در $R$ و $T \in \mathcal{T}(R)$ به قسمی که $T \bigcap I = \varnothing$؛ در این صورت $A \subseteq Min(I)$ وجود دارد که

$$T(I) = \bigcap_{P \in A} P = S_A(I).$$

**اثبات.** چون $J = T(I)$ نیم اول است، پس $J = \bigcap_{P \in Min(J)} P$. قرار می‌دهیم

$$A = \{P \in Min(I) : \exists Q \in Min(J) \ni P \subseteq Q\}.$$

واضح است که هر $Q \in Min(J)$ یک ایدآل اول شامل $I$ است و در نتیجه یک $P \in Min(I)$ وجود دارد که $P \subseteq Q$. بنابراین نتیجه می‌شود که

$$\bigcap_{P \in A} P \subseteq J = T(I). \qquad (۱)$$

از سوی دیگر بنابر لم ۳-۱۳، $Q \bigcap T = \varnothing$ برای هر $Q \in Min(J)$ و در نتیجه $P \bigcap T = \varnothing$ برای هر $P \in A$. از این رو بنا بر لم ۳-۱۴، $T(I) \subseteq P$ برای هر $P \in A$. پس

$$T(I) \subseteq \bigcap_{P \in A} P. \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) تساوی نتیجه می‌شود. اکنون نشان می‌دهیم که $T(I) = S_A(I)$. با توجه به قضیهٔ ۲-۸ می‌توان فرض کرد که $T = R \setminus \bigcup_{P \in B} P$ و چون $Q \subseteq \bigcup_{P \in B} P$ برای هر $Q \in A$، پس بدون این که از کُلیّت مطلب کم شود می‌توان فرض کرد که $A \subseteq B$. واضح است که

$$\bigcap_{P \in A} P = T(I) = S_B(I) \subseteq S_A(I) \subseteq \bigcap_{P \in A} P.$$

بنابراین $T(I) = S_A(I)$.

**۳-۱۶ نتیجه.** فرض کنیم $Q$ یک ایدآل اول در $R$ و $A = \{P \in Min(I) :\ P \subseteq Q\}$. در این صورت $S_Q(I) = \bigcap_{P \in A} P$.

**اثبات.** واضح است که $S_Q(I) \subseteq P$ برای هر $P \in A$. پس

$$S_Q(I) \subseteq \bigcap_{P \in A} P. \qquad (۱)$$

با توجه به قضیهٔ ۳-۱۵، $B \subseteq Min(I)$ وجود دارد که $S_Q(I) = S_B(I) = \bigcap_{P \in B} P$ و به علاوه $P \bigcap S_Q = \varnothing$ برای هر $P \in B$. از این رو $\bigcup_{P \in B} P \subseteq Q$. بنابراین $B \subseteq A$ و در نتیجه با توجه به (۱)

$$S_Q(I) \subseteq \bigcap_{P \in A} P \subseteq \bigcap_{P \in B} P = S_Q(I).$$

لذا تساوی نتیجه می‌شود.

**۳-۱۷ نتیجه.** فرض کنیم $Q$ یک ایدآل اول در $R$ باشد. $S_Q(I)$ یک ایدآل اول است اگر و تنها اگر مجموعهٔ $A = \{P \in Min(I) :\ P \subseteq Q\}$ تک عضوی باشد.

**اثبات**. با توجه به نتیجه قبل بدیهی است.

در پایان و به اختصار به مفهوم تعامد در $\bar{\mathcal{T}}(R)$ خواهیم پرداخت و با نتیجه‌ای در این زمینه مقاله را به پایان می‌بریم.

**۳-۱۸ تعریف.** $\bar{S},\bar{T} \in \bar{\mathcal{T}}(R)$ را مکمل متعامد گوییم هرگاه $\bar{S} \vee \bar{T} = \bar{R}$؛ در این صورت می‌نویسیم $\bar{S} \perp \bar{T}$.

به سادگی می‌توان دید که

$$\bar{S} \perp \bar{T} \Leftrightarrow \overline{ST} = \bar{R} \Leftrightarrow (ST)(I) = R$$
$$\Leftrightarrow ST \bigcap I \neq \varnothing.$$

همچنین اگر $T \bigcap I \neq \varnothing$ (یعنی $\bar{T} = \bar{R}$)، آنگاه $\bar{S} \perp \bar{T}$ برای هر $\bar{S} \in \bar{\mathcal{T}}(R)$؛ چنین مکمل متعامدی را بدیهی می‌گوییم.

**۳-۱۹ قضیه.** گیریم $\bar{R} \neq \bar{S} \in \bar{\mathcal{T}}(R)$ در این صورت $\bar{S}$ دارای مکمل متعامد غیربدیهی است اگر و تنها اگر یک $s \in S$ موجود باشد که $(I:s) \not\subseteq \sqrt{I}$.

**اثبات.** $\Leftarrow$) گیریم $\bar{T}$ مکمل متعامد $\bar{S}$ باشد؛ پس $\overline{ST} = \bar{R}$؛ یعنی $ST \bigcap I \neq \varnothing$. بنابراین $s \in S$ و $t \in T$ وجود دارند که $st \in I$ و چون $T \bigcap \sqrt{I} = \varnothing$، پس $(I:s) \not\subseteq \sqrt{I}$.

$\Rightarrow$) فرض کنیم $s \in S$ چنان باشد که $(I:s) \not\subseteq \sqrt{I}$. بنابراین $t \notin \sqrt{I}$ وجود دارد به قسمی که $st \in I$. قرار می‌دهیم $T = \{t^n : n \in N_0\}$ واضح است که $T \in \mathcal{T}(R)$ و $T \bigcap I = \varnothing$. بنابراین $\bar{T} \neq \bar{R}$؛ از سوی دیگر $st \in ST \bigcap I$، پس $ST \bigcap I \neq \varnothing$ و در نتیجه $\overline{ST} = \bar{R}$. از این رو $\bar{T}$ مکمل متعامد نابدیهی $\bar{S}$ است.

## مراجع


[1] Zariski, O. and Samuel, P., *Commutative Algebra* Vol 1, Springer-verlag, Reprinted in China, 1 (2001).

[2] Herestein, I.N., *Topics in Algebra*, Vikas Publicatios, Published in India, (1971).

[3] Sharp, R.Y., *Steps in Commutative Algebra*, Cambridge University Press, (1990).

[4] Gillman, L. and Jerison, M., *Rings of continuous functions*, Van. Nostrand Reinhold, New York, (1960).