نشریه بین المللی علوم مهندسی، شماره ۱، جلد۱۷، بهار ۱۳۸۵، صفحه ۵۶- ۵۳
دانشگاه علم و صنعت ایران

مدلسازی نفوذ سیال در اجسام متخلخل

عبداله شیدفر، حسین آذری و تورج صادقی

چکیده: مسائل نفوذ از نوع مسائل معادلات با مشتقات جزئی سهمی‌گون غیر خطی با ضریب نفوذ وابسته به مقدار جریان سیال در اجسام متخلخل می باشند، این ضریب معمولاً ناشناخته است و در برخی از موارد افرادی به حل آنها همت گماشته‌اند. در این مقاله جریان سیال تک‌فاز (همگن) در اجسام متخلخل مدلسازی می‌شود، وجود و یکتایی جواب برای مساله نفوذ اجسام متخلخل اثبات می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مدلسازی ریاضی، مساله نفوذ، اجسام متخلخل، تخلخل، وجود و یکتایی جواب

۱. مقدمه

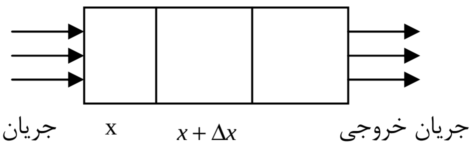
ماده متخلخل جسم جامدی است با حفره‌ها یا فضاهای خالی که این حفره ها و فضاها به طور متصل یا منفرد، منظم یا تصادفی در درون جسم پخش شده‌اند. دست‌یابی به معادلات نفوذ سیال در اجسام متخلخل به جهت کاربردهای وسیع در اندازه‌گیری منابع نفت و آب موجود در شن و ماسه و منابع زیر زمینی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. برای اولین بار دارسی در سال ۱۹۵۶ نرخ شار جرمی سیال در ماده متخلخل را به صورت زیر بیان کرد:

$$q = -\frac{k}{\mu}\nabla p \qquad (۱-۱)$$

که در آن q نرخ شار جرمی سیال، ∇p گرادیان فشار سیال در جهت جریان سیال، μ لزجت سیال و k قابلیت نفوذ در ماده متخلخل موسوم به تراوایی می‌باشد و مقدار آن معمولاً به ساختار جسم متخلخل وابسته است.

۲. مدلسازی ریاضی

در این قسمت به مدلسازی نفوذ سیال تک فاز در جسم متخلخل می‌پردازیم. برای این منظور جریان سیال تک فاز (همگن) در جسم متخلخل در حالت یک بعدی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. حجم کنترل دیفرانسیلی به طول Δx تا $x+\Delta x$ مطابق شکل زیر در نظر بگیرید:



شکل۱. حجم کنترل دیفرانسیلی

اگر m_x مولفه افقی بردار جرم سیال باشد، آنگاه جرم ورودی به حجم کنترل در نقطه x در مدت زمان Δt برابر است با $m_x A\Delta t$ جرم سیال خروجی در نقطه $x+\Delta x$ از حجم کنترل در همین مدت زمان برابر $m_{x+\Delta x}A\Delta t$ می‌باشد.

هم چنین میزان تغییر جرم داخلی سیال در مدت زمان Δt نیز برابر است با $\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(u\Phi\Delta v\right)\right)\Delta t$ که در آن ϕ نسبت حجم حفره‌ها به حجم کل جسم یعنی تخلخل ماده متخلخل و u چگالی جرمی سیال می‌باشد. در صورتی که ازاله جرم در حجم کنترل با نرخ $\tilde{q}$ در واحد حجم در واحد زمان رخ دهد آنگاه کل جرم ذخیره شده در مدت زمان Δt برابر است با $\tilde{q}\Delta v\Delta t$. با توجه به اصل بقای جرم داریم:

= کل جرم خروجی- کل جرم ورودی
مقدار جرم ذخیره شده+ تغییرات جرم داخلی

با جایگزاری معادل ریاضی جملات بیان شده در اصل بقاجرم می‌یابیم:

$$\left(m_x - m_{x+\Delta x}\right)A\Delta t = \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(u\Phi\Delta v\right)\right)\Delta t + \tilde{q}\Delta v\Delta t \qquad (۲-۱)$$

با تقسیم طرفین (۱-۲) بر $\Delta v\Delta t$ با توجه به این که $\Delta v = A\Delta x$ می‌یابیم:

نسخه اصلی مقاله در تاریخ ۱۳۸۳/۶/۱۶ واصل، و پس از بازنگریهای لازم، در تاریخ ۱۳۸۴/۲/۲۵ به تصویب نهایی رسیده است.
دکتر عبداله شیدفر، استاد ریاضی، عضو هیات علمی وابسته دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان. shidfar@iust.ac.ir
دکتر حسین آذری استادیار دانشکده ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران.
تورج صادقی، دبیر ریاضی مدارس طالش، گیلان.

$$\frac{m_x - m_{x+\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\partial}{\partial t}\left(u\,\phi\right) + \tilde{q} \qquad (۳-۱)$$

با فرض $\Delta x \to 0$ نتیجه می شود:

$$\frac{-\partial m_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}\left(u\,\phi\right) + \tilde{q} \qquad (۴-۱)$$

از طرفی جرم سیال را می‌توان به صورت جمله‌ای از نرخ شار جرمی و چگالی جرمی بیان کرد:

$$m_x = uq_x \qquad (۵-۱)$$

با جاِگزینی (۱-۵) در (۱-۴) می‌یابیم:

$$\frac{-\partial}{\partial x}\left(u\,q_x\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(u\,\phi\right) + \tilde{q} \qquad (۶-۱)$$

با جایگزینی (۱-۱) در (۱-۶) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{\mu}u\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(u\,\phi\right) + \tilde{q} \qquad (۷-۱)$$

معادله (۱-۷) حالت کلی معادله نفوذ سیال همگن در ماده متخلخل می‌باشد . اگر μ و ϕ ثابت باشند و هیچ چشمه یا چاهی در میدان جریان وجود نداشته باشد، آنگاه معادله (۱-۷) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\,u\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \phi\mu\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (۸-۱)$$

با فرض ثابت بودن k داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{\phi\mu}{k}\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (۹-۱)$$

برای مایعات ایده‌ال داریم:

$$\frac{l}{u}\frac{du}{dp} = c$$

درنتیجه:

$$udp = \frac{1}{c}du \qquad (۱۰-۱)$$

با قرار دادن (۱-۱۰) در (۱-۹) معادله نفوذ مایعات ایده آل در ماده متخلخل همگن ایزوتروپ در حالت یک بعدی به صورت زیر در می-آید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\phi\mu c}{k}\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (۱۱-۱)$$

بسیاری از مولفین در حل مسائل ضریب k را ثابت می گیرند و به مسائل خطی نفوذ می رسند که در اغلب اوقات قابل حل هستند. برای این منظور می توان به مراجع [1] ، [2] ، [3] و[4] مراجعه کرد. در مسائل اجسام متخلخل k وابسته به u، چگالی جرمی است. چنانچه بنویسیم $a(u) = \frac{k}{\Phi\mu c}$ آنگاه (۱-۱۱) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (۱۲-۱)$$

با اعمال شرایط اولیه کرانه ای برای معادله (۱-۱۲) به مساله زیر می‌رسیم که یک مساله جریان سیال در اجسام متخلخل است.

$$\partial_t u(x,t) = a(u)\,\partial_{xx}u \qquad 0<t<T,\quad 0<x<1 \qquad (۱۳-۱)$$

$$u(x,0) = 0 \qquad 0\le x\le 1 \qquad (۱۴-۱)$$

$$a\left(u(0,t)\right)\partial_x u(0,t) = g(t) \qquad 0\le t\le T \qquad (۱۵-۱)$$

$$\partial_x u(1,t) = 0 \qquad 0\le t\le T \qquad (۱۶-۱)$$

$$u(0,t) = f(t) \qquad 0\le t\le T \qquad (۱۷-۱)$$

در این مسئله توابع f(t) و g(t) معلوم و u و a(u) مجهول می باشند (مراجع[5-10]).

۳. وجود ویکتایی جواب مساله اجسام متخلخل

در ادامه مساله (۱-۱۳) - (۱-۱۷) را در نظر گرفته ، وجود و یکتایی جواب آن را بررسی می کنیم.

جهت اثبات وجود ویکتایی جواب برای مساله (۱-۱۳) – (۱-۱۷) نیاز به تعریف بنیادی زیر داریم:

۳-۱ تعریف: فرض کنید:

$$Q_T = \left\{(x,t)\middle|0<x<1, 0<t<T\right\}, I = \left\{x\middle|0<x<M\right\}$$

$C^a\left(\bar{Q}_T\right)$ ،$C^{1+a}\left(\bar{Q}_T\right)$ و $C^{2+a}\left(\bar{Q}_T\right)$ را به ترتیب فضای توابع باناخ با نرمهای متناهی به شکل زیر باشند:

$$|u|_{a,Q_T} = |u|_{0,Q_T} + H_{a,Q_T}(u) \qquad (۱-۲)$$

$$|u|_{1+a,Q_T} = |u|_{a,Q_T} + |\partial_x u|_{a,Q_T} \qquad (۲-۲)$$

$$|u|_{2+a,Q_T} = |u|_{a,Q_T} + |\partial_x u|_{a,Q_T} + |\partial_{xx} u|_{a,Q_t} + |\partial_t u|_{a,Q_T} \qquad (۳-۲)$$

که در آن $|u|_{0,Q_T} = \sup_{Q_T}|u|$ و

$$H_{a,Q_T}(u) = \sup_{(x_1,t_1),(x_2,t_2)\in Q_T}\frac{\left|u(x_1,t_1) - u(x_2,t_2)\right|}{\left(|x_1-x_2|^2 + |t_1-t_2|\right)^{\frac{a}{2}}}$$

زوج (u,a) یک جواب مساله (۱-۱۳) – (۱-۱۷) است هرگاه:

۱. $a(s)\in[A,B], u(x,t)\in C^{2+a}(Q_T)$ که در آن $B = \max_{Q_T} u(x,t), A = \min_{Q_T} u(x,t)$ و برای $A\le s\le B$ داریم:

$$.\,a(s) > 0$$

۲. u(x,t) و a(s) جواب مساله (۱-۱۳) – (۱-۱۷) باشند.

همچنین فرض کنید توابع f وg در شرایط زیر صدق کنند:

I. $f(t), g(t)\in C^1[0,T]$

$f(0) = g(0) = 0$

II. به ازای هر $t\in[0,T]$ $f'(t), g'(t)\ge 0$ با محاسبه (۱-۱۳) در x=0 و استفاده از شرط (۱-۱۷) داریم:

$$f'(t) = a\left(f(t)\right)\partial_{xx}u(0,t) \qquad (۴-۲)$$

با توجه به این که $f'(t)>0$ در نتیجه به ازای هر $s\in\left[f(0),f(t)\right]$ ، معکوس تابع s=f(t) یعنی $t=f^{-1}(s)$ موجود می‌باشد با توجه به این نتایج می‌یابیم:

$$a(s)=\frac{f'\left(f^{-1}(s)\right)}{\partial_{xx}u\left(0,f^{-1}(s)\right)} \qquad (۵-۲)$$

۲-۳ لم: فرض کنید (u,a) جواب مساله (۱-۱۳) – (۱-۱۶) باشد در این صورت u در (۱-۱۷) صدق می کند اگر و فقط اگرa(u) در (۲- ۵) صدق کند.

اثبات: اگر (u,a) جواب مساله (۱-۱۳) – (۱-۱۷) باشد واضح است که a(u) در (۲-۵) صدق می کند حال فرض کنید a(u) در (۲-۵) و u(x,t) در (۱-۱۳) – (۱-۱۶) صدق کنند نشان می‌دهیم که u(0,t)=f(t). برای این منظور به ترتیب از (۱-۱۳) – (۲- ۵) داریم:

$$\partial_t u(0,t)-a\left(u(0,t)\right)\partial_{xx}u(0,t)=0 \qquad (۶-۲)$$

$$f'(t)-a\left(f(t)\right)\partial_{xx}u(0,t)=0 \qquad (۷-۲)$$

با کم کردن رابطه (۲-۶) از (۲-۷) می‌یابیم

$$\partial_t u(0,t)-f'(t)=\left(a\left(u(0,t)\right)-a\left(f(t)\right)\right)\partial_{xx}u(0,t)$$

با فرض

$a(t)=u(0,t)-f(t)$، تابعی چون $\theta(t)$ وجود دارد به طوری که $0<t<T$ ، $|\theta(t)|\le|u(0,t)|-f(t)$

در نتیجه: $\alpha'(t)=\theta(t)\partial_{xx}u(0,t)\alpha(t)$

از [5] داریم:

$$\alpha'(t\leq)M\alpha(t)$$

که در آن M عددی مثبت می باشد. از نامساوی گرانول و $\alpha(0)=0$ نتیجه می شود:

$$|\alpha(t)|\le\alpha(0)\exp\left(M\int_0^1\alpha(\tau)d\tau\right)$$

در نتیجه $|\alpha(t)|=0$ و بدین طریق اثبات لم به پایان می رسد.

حال فرض کنید u(x,t) در شرایط زیر صدق می کند:

$$0<x<1 \quad 0<t<T$$

$$u(x,t)=\frac{f'\left(f^{-1}(w)\right)}{\partial_{xx}w\left(0,f^{-1}(w)\right)}\partial_{xx}u \qquad (۸-۲)$$

$$u(x,0)=0 \qquad 0\le x\le 1 \qquad (۹-۲)$$

$$\frac{f'\left(f^{-1}(w)\right)}{\partial_{xx}w\left(0,f^{-1}(w)\right)}\partial_x u(0,t)=g(t) \qquad 0\le t\le T \qquad (۱۰-۲)$$

$$\partial_{xx}u(1,t)=0 \qquad (۱۱-۲)$$

$$u(0,t)=f(t) \qquad (۱۲-۲)$$

که در آن w(x,t) تابعی معلوم و متعلق به C_M مجموعه تمام توابعی چون w(x,t) که در شرایط زیر صدق می کنند:

۱. $|.|_{1+a,Q_T}$ نرم مجموعه C_M است و اعدادی مثل M و $\delta M>0$ و $0<\alpha<\delta<1$ موجودند بطوری که $|w|_{1+a,Q_T}<M$

۲. w(x,t) در شرایط اولیه کرانه ای (۲-۹) - (۲-۱۲) صادق باشد.

هم اکنون توجه می کنیم که تبدیلu =TW تابع W و $w\in C_M$، را به تابعی چون u جواب مساله (۲-۸) – (۲-۱۲) متناظر می کند. از قضیه (۲-۵) مرجع [7] نتیجه می گیریم که به ازای هر W مفروض مساله (۲-۸) – (۲-۱۱) دارای جواب یکتایی چون u واقع در $C^{2+a}(Q_T)$ است و این جواب در نا مساوی زیر صدق می کند:

$$|u|_{2+a,Q_T}\le const\|g\|$$

۳-۳. قضیه: اگر f(t) و g(t) در شرایط I و II صدق کنند، آنگاه به ازای هر $w(x,t)\in C_M$ تبدیل u=TW دارای یک نقطه ثابت است.

اثبات: برای اثبات این قضیه از قضیه نقطه ثابت شودر استفاده می‌کنیم. طبق این قضیه هرگاه عملگر پیوسته T روی زیر مجموعه محدب بسته y از فضای باناخ x طوری تعریف شده باشد که Ty پیش فشرده باشد، آنگاه، T نقطه ثابتی دارد.

برای این منظور نخست نشان می دهیم T و C_M را به روی خودش می انگارد. با فرض $u_0=u-\psi$ که در آن: $\psi\in C^{1+a}(Q_T)$ و روی کرانه $\bar{Q}_T$ داریم: $\psi(x,t)=u(x,t)$ در نتیجه u_0 در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\partial_t u-\frac{f'\left(f^{-1}(w)\right)}{\partial_{xx}w\left(0,f^{-1}(w)\right)}\partial_{xx}u_0=\frac{f'\left(f^{-1}(w)\right)}{\partial_{xx}w\left(0,f^{-1}(w)\right)}\partial_{xx}\psi-\partial_t\psi \qquad (۱۳-۲)$$

$$u_0(x,t)=0 \qquad 0\le x\le 1 \qquad (۱۴-۲)$$

$$u_0(0,t)=0 \qquad 0\le t\le T \qquad (۱۵-۲)$$

$$u_0(1,t)=0 \qquad 0\le t\le T \qquad (۱۶-۲)$$

طبق قضیه ۴ فصل ۷ مرجع [11]، به ازای $\alpha<1$ عدد ثابتی چون k می توان یافت به طوری که به ازای هر $w\in C_M$ داریم:

$$|u_0|_{1+a}\le k\left|\partial_t\psi-\frac{f'\left(f^{-1}(w)\right)}{\partial_{xx}w\left(0,f^{-1}(w)\right)}\right|_{0,Q_T}$$

با انتخاب $M>k|\partial_t\psi|_{0,Q_T}+k\left|\frac{f'\left(f^{-1}(w)\right)}{\partial_{xx}w\left(0,f'\left(f^{-1}(w)\right)\right)}\right|_{0,Q_T}$ و

$$|\partial_{xx}\psi|_{0,Q_T}+|\psi|_{1+a,Q_T}$$

می یابیم:

$$|u|_{1+a,Q_T} < M \qquad (۱۷-۲)$$

اکنون با توجه به قضیه ۱ فصل ۷ مرجع [11] می توان گفت که تبدیل u=TW ، C_M را به روی زیر مجموعه پیش فشرده از خودش می نگارد. برای کامل کردن اثبات کافی است پیوستگی T را ثابت کنیم برای این منظور می نویسیم $u_0 = u - u_m$ که در آن u=TW و $u_m = Tw_m$ جواب های مساله (۲-۱۳) – (۲-۱۶) می‌باشند را در نظر بگیرید، در نتیجه u_0 در معادله زیر صدق می کند (قضیه ۴ فصل ۷ مرجع [11])

$$\partial_t u_0 - \frac{f'\left(f^{-1}(w_m)\right)}{\partial_{xx} w_m\left(0, f^{-1}(w_m)\right)}\partial_{xx}u_0$$

$$= \left(\frac{f'\left(f^{-1}(w)\right)}{\partial_{xx} w\left(0, f^{-1}(w)\right)} - \frac{f'\left(f^{-1}(w_m)\right)}{\partial_{xx} w_m\left(0, f^{-1}(w_m)\right)}\right)\partial_{xx}u$$

اگر $|w_m - w|_{1+a,Q_T} \to 0$ آنگاه

$$\varepsilon_m = \sup_{Q_T}\left|\frac{f'\left(f^{-1}(w_m)\right)}{\partial_{xx} w_m\left(0, f^{-1}(w_m)\right)} - \frac{f'\left(f^{-1}(w)\right)}{\partial_{xx} w\left(0, f^{-1}(w)\right)}\right|$$

$$\partial_{xx}u \to 0$$

$$|u|_{1+a,Q_T} = |Tw_m - Tw|_{1+a,Q_T} \le c\varepsilon_m \to 0$$

با توجه به این که در نرم $1+\alpha$ هنگامی که $w_m \to w$ آنگاه $Tw_m \to Tw$ می توان گفت که T یک تبدیل پیوسته است.

حال در مرحله ای قرار گرفته ایم که میتوانیم قضیه نقطه ثابت شودر را به کار بریم ونتیجه بگیریم که تبدیل u=TW دارای یک نقطه ثابت است ، این موضوع وجود جواب برای مساله (۱-۱۳) – (۱-۱۷) را ثابت می کند.

۴. نتیجه گیری

در این مقاله در جریان تک فاز همگن در اجسام متخلخل مدلسازی ریاضی شده و نتیجه حاصل مساله ای از نوع یک مساله نفوذ خطی است. با به کارگیری قضیه شودر وجود و یکتایی جواب مساله اجسام متخلخل به اثبات می‌رسد.

مراجع

[1] DuChateau P., "*Monotonicity and uniqueness results in identifying an unknown coefficient in nonlinear diffusion equation*", SIAM J.Appl. Math., 41, No.2, 1981, pp. 310-323.

[2] Muzylev N. V., "*Uniqueness theorems for some converse problem of heat conduction*", USSR Comput. Math. Phys., 20, No. 2, 1980, pp. 120-134.

[3] Shidfar A., Azari H., "*Identification of unknown terms in a nonlinear parabolic problem*", Proceedings of ATCM 95, Singapore, 1995, pp. 806-814.

[4] Shidfar A., Azari H., "*Aninverse problem for a nonlinear diffusion equation, Nonlinear Analysis Theory*", Math, and Appl., 28, No. 4, 1997, pp. 589-593.

[5] Shidfar A., Azari H., "*Determination of Unknown Coefficient in Porous Media*", International Journal of Applied Mathematics, Vol. 9, No. 3, 2002, pp. 243-252.

[6] Cannon J. R., DuChateau P., "*An invers problem for a nonlinear diffusion equation*", SIAM J. Appl. Math., 39, No. 2, 1980, pp. 272-289.

[7] Solonnikov V. A., Ladyzhenskaya O. A., Uralceva N. N., "*Linear and Quasilinear Equation of Parabolic Type*", AMS, Providence RI, 1986.

[8] Cannon J. R., Yin H., "*A uniqueness theorem for a class of nonlinear parabolic inverse problems*", Invers Problems, 4, 1988, pp. 411-416.

[9] Bear, *Dynamic of Fluids in Porous Media*, 2nd Ed. Elsevier, New York, 1975.

[10] Thomas J. W., *Numerical Partial Diffusion Equation*, Springer Verlag, New York, 1995.

[11] Friedman A., *Partial Differential Equation of parabolic Type*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1964.