نشریه بین المللی علوم مهندسی، شماره ۲، جلد۱۷، تابستان ۱۳۸۵، صفحه ۴۱- ۳۵
دانشگاه علم و صنعت ایران

چند روش تعامدی برای تحلیل غیرخطی هندسی

محمد رضایی پژند و محمد تاتار

چکیده: تاکنون شیوه‌های تعامدی زیادی برای تحلیل غیرخطی سازه‌ها به کار رفته است. از مهمترین آنها می‌توان به روشهای تعامدی: صفحهٔ قائم، صفحهٔ قائم بهنگام و تعامدی بار نامیزان اشاره نمود. باید دانست، بیشتر آنها کاستیهایی را برای تحلیل پاره‌ای از سازه‌ها دارند. در این مقاله، چند روش تعامدی جدید پیشنهاد می‌شود. راهکارهای مزبور، بر اساس بهبود عاملهای فنهای پیشین و افزایش نرخ همگرایی در آنها استوار گردیده‌اند. با تحلیل چند سازه توانایی این شیوه‌ها برای خوانندگان آشکار می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: شیوه‌های تعامدی، تحلیل غیرخطی، صفحهٔ قائم، صفحهٔ قائم بهنگام، تعامدی بار نامیزان، نرخ همگرایی، معادله‌های بی‌بعد

۱. مقدمه

پاره‌ای از سازه‌ها، دارای رفتار غیرخطی پیچیده‌ای هستند. به سخن دیگر، نمودار بار- تغییرمکان آنها، ترکیبی از حالتهای نرم‌شوندگی و سخت‌شوندگی با نقطه‌های حدی بار و تغییرمکان را دارند. در نتیجه، برای بررسی رفتار آنها نیاز به یک تحلیل پیشرفته می‌باشد. روش طول قوس ثابت یکی از این گونه تحلیلها می‌باشد که توجه زیادی به آن شده است [1]. باید دانست، در این راهکار، پس از محاسبهٔ نخستین پاسخ تقریبی در هر گام بارگذاری، باید مقدار آن را تصحیح نمود. به نخستین تحلیل در هر گام بارگذاری، «گام پیشگویی» گویند. برای تصحیح پاسخ گام پیشگویی، نیاز به حل یک معادلهٔ درجه دوم خواهد بود. همچنین، مشکل انتخاب ریشهٔ درست این معادله وجود دارد. از سوی دیگر، داشتن ریشهٔ موهومی معادلهٔ مزبور در هر گام از تحلیل، سبب واگرایی تحلیل در آن گام خواهد شد. برای رفع این مشکلها، فنهای تعامدی صفحهٔ قائم و صفحهٔ قائم بهنگام پیشنهاد گردیده‌اند [1, 2].

در این شیوه‌ها، دو سطح دارای اهمیت است. نخستین آنها وابسته به سطحی می‌باشد که تکرارها بر روی آن انجام می‌پذیرند. سطح دوم، همانند شکل (۱)، نشانگر فاصله بین نقطهٔ تعادلی $(n-1)$ تا هر یک از نقطه‌های تکرار بر روی سطح تکرار می‌باشد. دو سطح مزبور، برای سازهٔ یک درجه آزادی، با دو بردار $\vec{n}_i^n$ و $\vec{t}_i^{\,n}$ در شکل(۱) به نمایش در آمده‌اند. با توجه به شکل، رابطه‌های وابسته به دو بردار مزبور، به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\vec{t}_i^{\,n} = \Delta u_i^n \,\vec{e}_1 + \Delta\lambda_i^n \,P\,\vec{e}_2 \qquad (۱)$$

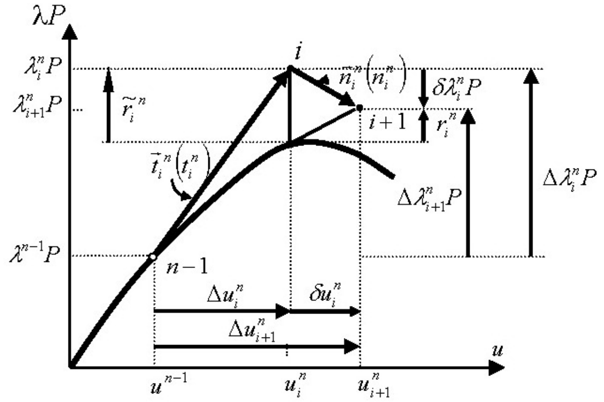
$$\vec{n}_i^n = \delta u_i^n \,\vec{e}_1 + \delta\lambda_i^n \,P\,\vec{e}_2 \qquad (۲)$$

در شکل (۱)، Δu_i^n و $\Delta\lambda_i^n$، به ترتیب، نشانگر تغییرمکان و ضریب بار نموی در گام nام هستند. همچنین، δu_i^n و $\delta\lambda_i^n$، به ترتیب، نمایانگر تغییرمکان و ضریب بار تصحیح‌کننده در هر تکرار و P بردار بار مبنا می‌باشد. در روش صفحهٔ قائم، مکان هندسی نقطه‌های تکرار، از فرض تعامد بردار $\vec{t}_1^{\,n}$ بر بردار $\vec{n}_i^n$ تعیین می‌گردد [3]. برای بهبود شرط همگرایی شیوهٔ صفحهٔ قائم، فن صفحهٔ قائم بهنگام پیشنهاد شده است، که در آن بردار $\vec{t}_i^{\,n}$ را بر $\vec{n}_i^n$ عمود می‌گیرند. باید دانست، راهکارهای مزبور، در تحلیل پاره‌ای از سازه‌های پیچیده دچار واگرایی می‌شوند.

سیمونز و همکاران با حذف عامل بار در فن صفحهٔ قائم بهنگام، روش تعامدی تغییرمکان نامیزان را معرفی کردند [4]. در سالهای ۱۹۸۴ و ۱۹۸۶، به ترتیب، فروید و فورد با توجه به شیوه‌های تعامدی صفحهٔ قائم و بهنگام آن، راهکارهای تعامدی دیگری را ارائه نمودند [5, 6]. همچنین، روش تعامدی بار نامیزان، در سال ۱۹۹۵ توسط کرنک پیشنهاد شد [7, 8]. در این فن، بردار بار نامیزان کاهش یافته r_i^n بر تغییرمکان نموی Δu_i^n عمود می‌گردد. شیوهٔ مزبور کوشش در صفر نمودن بار نامیزان دارد. خاطرنشان می‌نماید، تمامی این راهکارها مقدار $\delta\lambda_i^n$ را محاسبه می‌کنند. رابطه‌ای که برای این منظور به کار می‌رود، «معادلهٔ شرط» نام دارد.

نسخه اصلی مقاله در تاریخ ۱۳۸۲/۴/۲ واصل، و پس از بازنگریهای لازم، در تاریخ ۱۳۸۴/۸/۱۴ به تصویب نهایی رسیده است.
سرپرستی داوری‌ها توسط دبیر تخصصی، دکتر عباس افشار صورت گرفته و مقاله توسط ایشان برای چاپ توصیه شده است.

دکتر محمد رضایی پژند، استاد گروه عمران دانشکدهٔ مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد. mpajand@yahoo.com
محمد تاتار، کارشناس ارشد سازه، گروه عمران دانشکدهٔ مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد. mtat2001@yahoo.com



شکل ۱. فرآیند تحلیل در تکرار i ام

باید آگاه بود، هر یک از روشهایی که تاکنون مطرح شد، در تحلیل پاره‌ای از سازه‌های پیچیده شکست می‌خورند و واگرا می‌شوند. از این رو، در این مقاله تلاش خواهد شد که روشهای تعامدی توانایی رابطه‌سازی گردد. با بررسی عددی این شیوه‌ها، می‌توان به تواناییهای آنها دست یافت. در ادامهٔ کار، نویسندگان چند نمونهٔ عددی را به نظر خوانندگان می‌رسانند.

۲. تعامد طول n_i^n بر t_1^n

در این شیوه، طول نموی t_1^n در گام پیشگویی، همواره بر سطح تکرار n_i^n در تکرارهای تصحیح‌کننده عمود می‌گردد. فن مزبور، مشابه روش صفحهٔ قائم می‌باشد. باید دانست، در راهکار صفحهٔ قائم، بردارهای $\vec{t}_1^{\,n}$ و $\vec{n}_i^{\,n}$، بر اساس نمودار بار- تغییرمکان در فضای با یک درجه آزادی تعریف می‌شوند. رابطه‌های (۱) و (۲)، در شکل (۱)، نشانگر این ویژگی هستند. یادآوری می‌کند، در بیشتر مسأله‌های واقعی، نمودار بار- تغییرمکان در فضایی با ابعاد زیاد قرار دارد. از این رو، نویسندگان بردارهای t_i^n و n_i^n را در حالت چند بعدی، بر اساس شکل (۱)، به صورت زیر می‌نویسند:

$$t_i^n = \Delta u_i^n + \Delta\lambda_i^n P \tag{۳}$$

$$n_i^n = \delta u_i^n + \delta\lambda_i^n P \tag{۴}$$

در این رابطه‌ها، بردارهای بار و تغییرمکان به جهتهای معینی محدود نشده‌اند. با توجه به تعریف و مشابه فن صفحهٔ قائم، معادلهٔ شرط به صورت زیر خواهد بود:

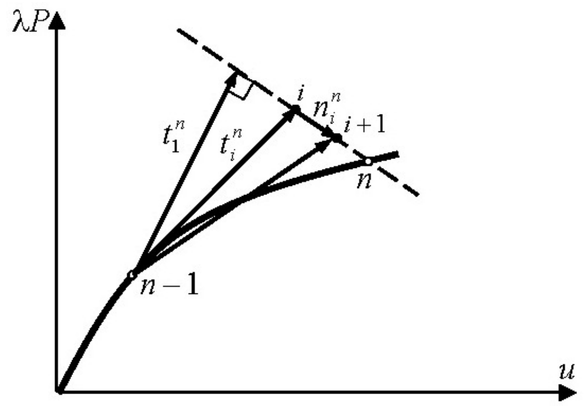
$$t_1^{nT} n_i^n = 0 \tag{۵}$$

مرحله‌های تکرار را می‌توان در شکل (۲) دید.

با استفاده از رابطه‌های (۳) و (۴)، معادلهٔ (۵) به شکل زیر در می‌آید:

$$\left(\Delta u_1^n + \Delta\lambda_1^n P\right)^T \left(\delta u_i^n + \delta\lambda_i^n P\right) = 0 \tag{۶}$$

برای محاسبهٔ مقدار $\delta\lambda_i^n$ در رابطهٔ (۶)، باید اصل رویهم گذاری باتوز و دات را به کار برد [9]. اصل مزبور به صورت رابطهٔ زیر نوشته می‌شود:



شکل ۲. تعامد طول n_i^n بر t_1^n

$$\delta u_i^n = \delta u_i''^n + \delta\lambda_i^n \delta u_i'^n \tag{۷}$$

بر اساس شکل (۱)، مقدارهای $\delta u_i''^n$ و $\delta u_i'^n$، به ترتیب، زیر اثر بار نامیزان $\tilde{r}_i^{\,n}$ و بار مبنای P ایجاد می‌شوند و از رابطه‌های زیر نتیجه می‌گردند:

$$K_i^n \,\delta u_i''^n = \tilde{r}_i^n \tag{۸}$$

$$K_i^n \,\delta u_i'^n = P \tag{۹}$$

چون مقدارهای $\tilde{r}_i^{\,n}$ و P، در آغاز هر تکرار معلوم می‌باشند، می‌توان به حل معادله‌های (۸) و (۹) پرداخت. همچنین، رابطهٔ (۷) در معادلهٔ (۶) قرار می‌گیرد. سپس، مقدار $\delta\lambda_i^n$ به صورت زیر پیدا خواهد شد:

$$\delta\lambda_i^n = -\frac{\left(\Delta u_1^n + \Delta\lambda_1^n P\right)^T \delta u_i''^n}{\left(\Delta u_1^n + \Delta\lambda_1^n P\right)^T \left(\delta u_i'^n + P\right)} \tag{۱۰}$$

پس از آن، با استفاده از رابطهٔ (۷)، مقدار δu_i^n محاسبه می‌شود. باید دانست، راهکار مزبور تقریبی از روش طول قوس ثابت است. همچنین، مرتبهٔ همگرایی این فن از درجهٔ دو می‌باشد.

۳. تعامد طول δu_i^n بر t_1^n

برای بهبود مرتبهٔ همگرایی در فن پیشین، اینک راهکار دیگری پیشنهاد می‌گردد. در این شیوه، عامل بار در بردار n_i^n حذف می‌شود. با انجام این کار، معادلهٔ شرط به صورت زیر خواهد بود:

$$t_1^{nT} \delta u_i^n = 0 \tag{۱۱}$$

با توجه به رابطهٔ (۳)، معادلهٔ (۱۱) به شکل زیر در می‌آید:

$$\left(\Delta u_1^n + \Delta\lambda_1^n P\right)^T \delta u_i^n = 0 \tag{۱۲}$$

باید افزود، رابطهٔ (۱۱) هنگامی برقرار می‌گردد که مقدار δu_i^n در هر تکرار صفر شود. در سازهٔ یک درجه آزادی، با صفر کردن تغییرمکان نامیزان δu_i^n، در نخستین تکرار تصحیح‌کننده، همگرایی به دست می‌آید. در نتیجه، پاسخ گام پیشگویی به عنوان پاسخ نهایی پذیرفته می‌شود. در این صورت، مرتبهٔ همگرایی در این شیوه بینهایت

خواهد بود. از سوی دیگر، در سازهٔ چند درجه آزادی، معادلهٔ (۱۱)، نشانگر تعامد بردار t_1^n بر δu_i^n در هر تکرار می‌باشد.
اینک، با جایگذاری رابطهٔ (۷) در (۱۲)، مقدار $\delta\lambda_i^n$ به صورت زیر در دسترس قرار می‌گیرد:

$$\delta\lambda_i^n = -\frac{\left(\Delta u_1^n + \Delta\lambda_1^n P\right)^T \delta u_i''^n}{\left(\Delta u_1^n + \Delta\lambda_1^n P\right)^T \delta u_i'^n} \qquad (۱۳)$$

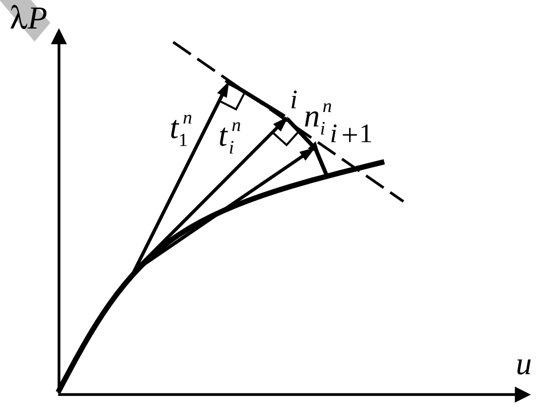
۴. تعامد طول n_i^n بر t_1^n

باید آگاه بود، این شیوه مشابه فن صفحهٔ قائم بهنگام می‌باشد. در اینجا، راهکار صفحهٔ قائم بهنگام برای بهبود شرطهای همگرایی روش صفحهٔ قائم به کار می‌رود. برای رسیدن به این هدف، معادلهٔ شرط مزبور به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$t_i^{n^T} n_i^n = 0 \qquad (۱۴)$$

با به کار بردن رابطه‌های لازم در معادلهٔ (۱۴)، مقدار $\delta\lambda_i^n$ به صورت زیر به‌دست می‌آید :

$$\delta\lambda_i^n = -\frac{\left(\Delta u_i^n + \Delta\lambda_i^n P\right)^T \delta u_i''^n}{\left(\Delta u_i^n + \Delta\lambda_i^n P\right)^T \left(\delta u_i'^n + P\right)} \qquad (۱۵)$$



شکل ۳. تعامد طول n_i^n بر t_i^n

باید آگاه بود، در این روش نیز مرتبهٔ همگرایی از درجهٔ دو است.

۵. تعامد طول δu_i^n بر t_i^n

این شیوه، همانند فن (۳)، برای بهبود همگرایی روش (۴) به کار می‌رود. این بار، معادلهٔ (۱۱) به صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$t_i^{n^T} \delta u_i^n = 0 \qquad (۱۶)$$

با استفاده از رابطهٔ (۳)، معادلهٔ (۱۶) به شکل زیر در می‌آید:

$$\left(\Delta u_i^n + \Delta\lambda_i^n P\right)^T \delta u_i^n = 0 \qquad (۱۷)$$

این رابطه، نشانگر تعامد بردار t_i^n بر δu_i^n است. از سوی دیگر، با توجه به صفر شدن δu_i^n در هر تکرار و در حالت یک بعدی، مرتبهٔ همگرایی بینهایت می‌گردد. با قرار دادن معادلهٔ (۷) در (۱۷)، مقدار $\delta\lambda_i^n$ از رابطهٔ زیر حساب می‌شود:

$$\delta\lambda_i^n = -\frac{\left(\Delta u_i^n + \Delta\lambda_i^n P\right)^T \delta u_i''^n}{\left(\Delta u_i^n + \Delta\lambda_i^n P\right)^T \delta u_i'^n} \qquad (۱۸)$$

۶. مثال‌ها

در اینجا، نویسندگان برای شناخت ویژگیهای روشهای مورد بحث، نمونه‌های عددی فراوانی را حل نموده‌اند. با توجه به حجم محدود مقاله، به تحلیل چهار مسأله پرداخته می‌شود. مثالهای مزبور خرپاهای مستوی و فضایی می‌باشند که دارای رفتار غیرخطی هندسی هستند [10]. چون نرخ همگرایی روشهای تحلیلی برای سازهٔ یک درجه آزادی تعیین می‌گردد، بنابراین، در مثال نخست از سازهٔ یک درجه آزادی برای نخستین ارزیابی شیوه‌ها استفاده خواهد شد. خاطرنشان می‌نماید، نویسندگان برای انجام تحلیل در گامهای پیشگویی، از نمو اندازهٔ تغییرمکان بهره جسته‌اند. همچنین، برای متغیر نمودن گامهای نموی رابطهٔ خودکار زیر را به کار می‌برند:

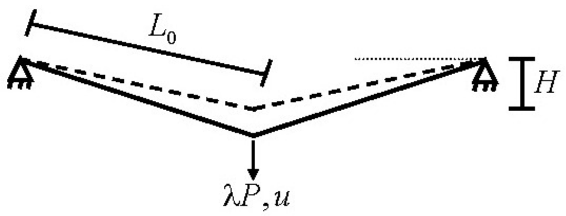
$$\left|\Delta u_1^n\right| = \pm\left|\Delta u_1^{n-1}\right|\left(\frac{J_D}{J_{n-1}}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۹)$$

در اینجا، $\left|\Delta u_1^n\right|$ و $\left|\Delta u_1^{n-1}\right|$، به ترتیب، اندازهٔ بردار تغییرمکان نموی در گامهای پیشگویی از نموهای n و $(n-1)$ ام هستند. برای جلوگیری از افزایش بیش از حد مقدار $\left|\Delta u_1^n\right|$، اندازهٔ بیشینهٔ آن در مثالهای یکم و دوم، به ترتیب، به مقدارهای $\left(1.5*\left|\Delta u_1^1\right|\right)$ و $\left(\left|\Delta u_1^1\right|\right)$ محدود می‌گردد. در رابطهٔ (۱۹)، J_{n-1} تعداد تکرارهای گام $(n-1)$ و J_D تعداد تکرارهای است که به وسیلهٔ تحلیلگر تعیین می‌شود. افزون بر اینها، مقدارهای $J_{\max}$ و $\lambda_{\max}$، به ترتیب، به عنوان بیشینه تعداد تکرار و ضریب بار مشخص می‌گردند. از سوی دیگر، معیار همگرایی با نسبت $\left(\varepsilon_C \ge \max_k \left|\delta_k u_i^n / u_{ki}^n\right|\right)$ تعیین خواهد شد. در این نامعادله، ε_C مقدار خطای مجاز و زیرنویس k، نشانگر مؤلفهٔ k ام از بردار مربوطه است.
باید دانست، معادله‌هایی که در رابطه‌سازی شیوه‌های پیشنهادی به کار می‌روند، دارای ابعاد یگانه‌ای نیستند. این ویژگی، سبب ایجاد مشکلهای عددی خواهد شد. برای کاهش مشکلهای مزبور، می‌توان درایه‌های هر یک از بردارهای بار و تغییرمکان را بر درایه‌های بردار نظیرشان در گام پیشگویی نخستین گام بارگذاری تقسیم نمود. در این صورت، این معادله‌ها به فضای بدون بعد انتقال می‌یابند.

۶-۱. خرپای میله‌ای

این سازه، همانند شکل (۴)، به‌صورت یک خرپای دو عضوی با خیز کم اختیار می‌شود. رابطه‌سازی این خرپا، با در نظر گرفتن تنها یک

درجه آزادی در جهت نیروی خارجی λP، یا همان جهت u، صورت می‌گیرد [11].



شکل ۴. خرپای میله‌ای

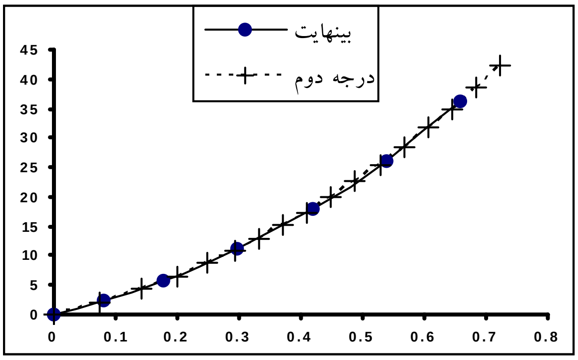
مشخصه‌های فیزیکی این س ازه، به صورت: $A = 50mm^2$، $E = 2*10^5 N/mm^2$، $L_0 = 500mm$ و $H = 25mm$ فرض می‌گردند. در اینجا، A، E و L_0، به ترتیب، سطح مقطع، ضریب کشسانی مواد و طول نخستین هر عضو، و H، جست خرپا می‌باشد. برای انجام تحلیل به‌صورت خودکار، مقدارهای: $P = 1000N$، $\Delta\lambda_1^1 = 0.2$، $\lambda_{\max} = 4.5$، $J_D = 3$، $J_{\max} = 5$ و $\varepsilon_C = 10^{-5}$ انتخاب می‌شوند. در این سازه، P بردار بار مبنا و $\Delta\lambda_1^1$ ضریب بار نموی در نخستین گام پیشگویی است. بر اساس نمودار شکل (۵)، سازهٔ مزبور دارای رفتار ساده سخت‌شوندگی می‌باشد.
نتیجه‌های تحلیل را می‌توان در جدول (۱) دید. برای آسانی کار، شمارهٔ بخش و روش یکسان اختیار می‌شوند. بر اساس جدول مزبور، کلیهٔ شیوه‌های با همگرایی بینهایت، در هر گام بارگذاری با دو تکرار به جواب می‌رسند. تکرار نخست، مربوط به گام پیشگویی می‌باشد. بنابراین، رابطهٔ تعامدی برای تکرار دوم به کار می‌رود. این ویژگی، درستی مرتبهٔ همگرایی بینهایت در فنهای تعامدی مربوطه را تأیید می‌کند. تحلیل با این روشها، در شش نمو و دوازده تکرار انجام می‌پذیرد. از سوی دیگر، همانند جدول (۱)، راهکارهای با نرخ همگرایی درجهٔ دوم، به شانزده نمو و شصت و چهار تکرار نیازمندند. این ویژگی نمایانگر افزایش هزینهٔ محاسبات بر اساس نرخ همگرایی پایین است. شکل (۵)، نشانگر پیروزی شیوه‌های تعامدی، با نرخهای همگرایی درجه دو و بینهایت، در پیمودن نمودار بار- تغییرمکان خرپای میله‌ای می‌باشد.

جدول ۱. تحلیل خرپای میله‌ای

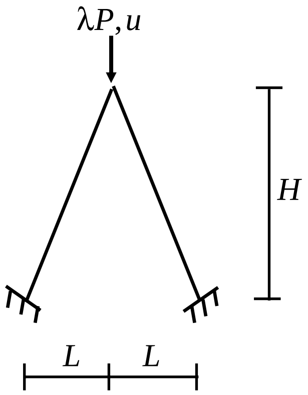
روش	نرخ همگرایی	تعداد نمو	تعداد تکرار
فنهای (۳) و (۵)	بینهایت	۶	۱۲
شیوه‌های (۲) و (۴)	درجه دوم	۱۶	۶۴

۲-۶. خرپای دو عضوی

این سازه، همانند شکل (۶)، دو عضو و دو درجه آزادی دارد. این مثال برای بررسی مسأله کمانش و پایداری توسط تعدادی از پژوهشگران مورد توجه قرار گرفته است [12, 13].



شکل ۵. نمودار بار- تغییرمکان خرپای میله‌ای
(محور عمودی: $(\lambda P/AE)\times 10^{-5}$ **محور افقی:** u/H)

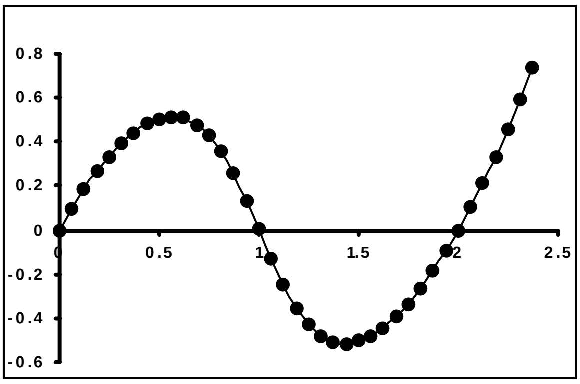


شکل ۶. خرپای دو عضوی خیزدار

باید دانست، مشخصه‌های این سازه، بدون بعد هستند. این خرپا، مثال مناسبی برای بررسی شیوه‌های پیشنهادی خواهد بود که معادلهٔ وابسته آنها دارای ابعاد مختلفی می‌باشند. مشخصه‌های سازه به صورت: $A = 1$، $E = 100$، $H = 250$ و $L = 100$ فرض می‌شوند. برای انجام تحلیل، مقدارهای: $P = 100$، $\Delta\lambda_1^1 = 0.1$، $\lambda_{\max} = 0.8$، $J_D = 3$، $J_{\max} = 10$ و $\varepsilon_C = 10^{-5}$ به کار می‌روند.
مسیر ایستایی خرپای شکل (۶)، دارای شیب تندی در شاخهٔ بازگشت بار است. نمودار مزبور را می‌توان در شکل (۷) دید. همچنین، نتیجهٔ تحلیل به‌وسیله جدول (۲) در دسترس قرار می‌گیرد. با توجه به جدول مزبور، تمامی فنهای با نرخ همگرایی بینهایت توانایی گذر از نمودار بار- تغییرمکان را با کمترین تعداد نمو و تکرار دارا می‌باشند. بر خلاف آن، روشهای با همگرایی درجه دوم، در گذر از شاخهٔ بازگشت بار دچار واگرایی می‌شوند. این ویژگی، نمایانگر کاستی راهکارهای مربوطه است.

جدول ۲. تحلیل خرپای دو عضوی خیزدار

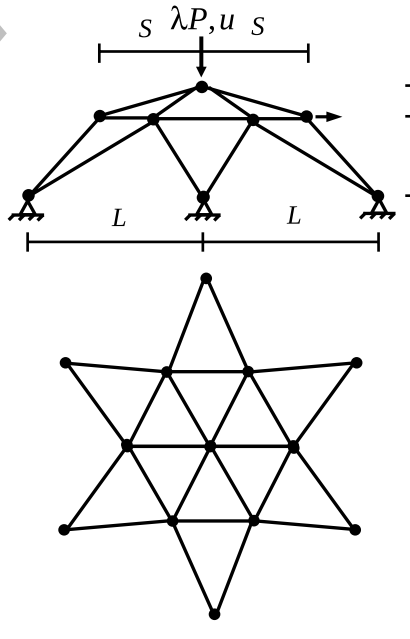
روش	نرخ همگرایی	تعداد نمو	تعداد تکرار
فنهای (۳) و (۵)	بینهایت	۳۸	۷۶
شیوه‌های (۲) و (۴)	درجه دوم	—	—



شکل ۷. نمودار بار- تغییرمکان خرپای دو عضوی
(محور عمودی: $(\lambda P/AE)\times10^{-4}$ **محور افقی:** u/H)

۳-۶. طاق خرپایی ۲۴ عضوی

سازهٔ (۸)، به دو صورت خرپا و قاب فضایی، توسط برخی از پژوهشگران برای تحلیل غیرخطی به کار رفته است [8, 14]. در اینجا، سازه به صورت خرپای فضایی با ۲۴ عضو و ۲۱ درجه آزادی مورد تحلیل قرار می‌گیرد.

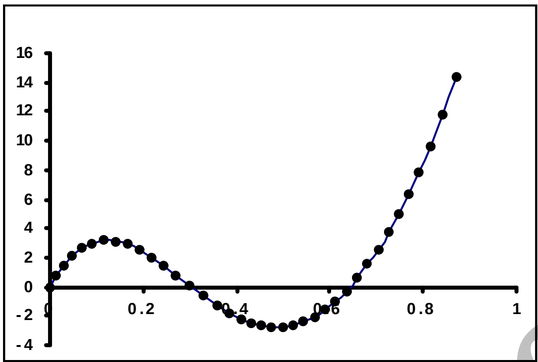


شکل ۸. طاق خرپایی ۲۴ عضوی

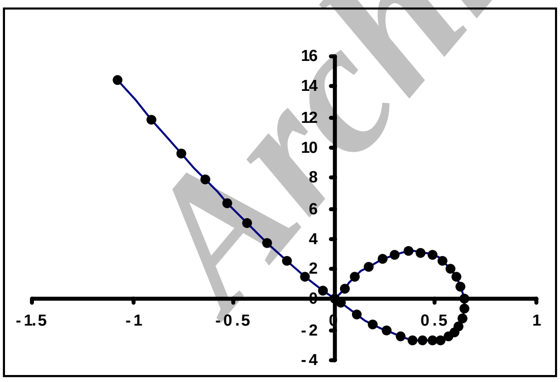
مشخصه‌های خرپا به صورت: $E=3*10^3 N/mm^2$ ، $A=317mm^2$ ، $H=62.16mm$ ، $L=433mm$ ، $S=250mm$ و $W=20mm$ انتخاب می‌شوند. در آغاز تحلیل، مقدارهای: $P=150N$ ، $\Delta\lambda_1^1=0.5$ ، $\lambda_{\max}=10$ ، $J_D=5$ ، $J_{\max}=15$ و $\varepsilon_C=10^{-4}$ فرض می‌گردند. بر اساس نتیجه‌های جدول (۳)، از میان فنهای با نرخ همگرایی بینهایت، شیوهٔ (۳) در تحلیل طاق خرپایی شکل (۸) دچار واگرایی می‌شود. بر خلاف آن، راهکار (۵) توانایی پیمودن نمودار بار- تغییرمکان طاق مزبور را دارا می‌باشد. این نمودار را می‌توان در شکل (۹) دید. نمودار مزبور، برای دو درجه آزادی u و v در شکل (۸) رسم می‌گردد. نتیجه‌های تحلیل فن (۵)، در جدول (۳) درج گردیده است.

جدول ۳. تحلیل طاق خرپایی ۲۴ عضوی

روش	نرخ همگرایی	تعداد نمو	تعداد تکرار
تعامد طول t_1^n بر δu_i^n (۳)	بینهایت	—	—
تعامد طول t_i^n بر δu_i^n (۵)	بینهایت	۳۷	۱۴۱



الف: نمودار تغییرمکان در جهت u
(محور عمودی: $(\lambda P/AE)\times10^{-4}$ **محور افقی:** u/H)

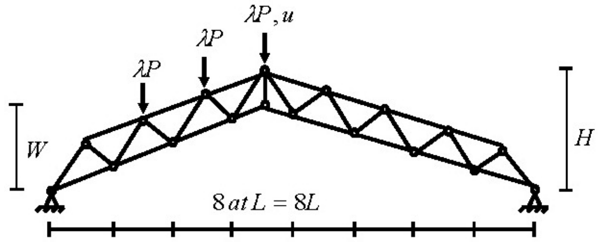


ب: نمودار تغییر مکان در جهت v
(محور عمودی: $(\lambda P/AE)\times10^{-4}$ **محور افقی:** $(v/H)\times10^{-2}$)
شکل ۹. نمودار بار- تغییرمکان طاق خرپایی ۲۴ عضوی

۶-۴ خرپای قوسی ۳۳ عضوی

همانند شکل (۱۰)، این خرپای گنبدی دارای ۳۳ عضو و ۳۲ درجه آزادی است. این سازه، به دلیل بارگذاری و هندسه نامتقارن، رفتار غیرخطی شدیدی دارد [15].

مشخصه‌های سازه برابر با: $A=300mm^2$ ، $E=3*10^5 N/mm^2$ ، $H=110mm$ ، $L=100mm$ و $W=70mm$ می‌باشند در آغاز تحلیل، مقدارهای نخستین: $P=2*10^5 N$ ، $\Delta\lambda_1^1=0.3$ ، $\lambda_{\max}=2$ ، $J_D=6$ ، $J_{\max}=10$ و $\varepsilon_C=10^{-4}$ فرض می‌گردند.

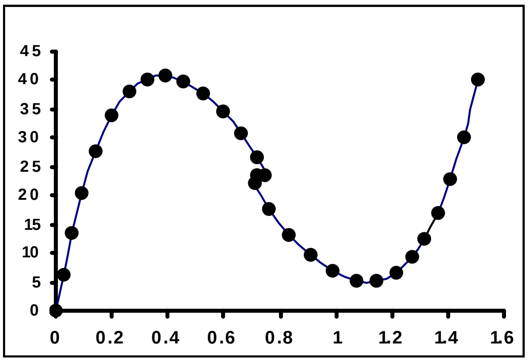


شکل ۱۰. خرپای قوسی ۳۳ عضوی

سازهٔ مزبور، دارای رفتار پیچیده‌ای همانند شکل (۱۱) است. در نمودار بار- تغییرمکان این سازه، شاخه‌های بازگشت بار و تغییرمکان وجود دارند. یادآوری می‌کند، از میان راهکارهای پیشنهادی، فن تعامدی t_i^n بر δu_i^n (روش ۵)، توانایی خوبی در تحلیل سازه‌های پیشین داشت. نویسندگان، برای اطمینان از توانایی روش مزبور در تحلیل سازه‌های پیچیده، سازهٔ شکل (۱۰) را با این شیوه مورد تحلیل قرار می‌دهند. نتیجه‌های تحلیل به صورت نمودار شکل (۱۱) و جدول (۴) درج شده‌اند. بر اساس این نتیجه‌ها، راهکار (۵) توانایی تحلیل مثال مزبور را بخوبی دارا می‌باشد.

جدول ۴. تحلیل خرپای قوسی ۳۳ عضوی

روش	نرخ همگرایی	تعداد نمو	تعداد تکرار
تعامد طول t_i^n بر δu_i^n (۵)	بینهایت	۲۹	۱۶۸



شکل ۱۱. نمودار بار- تغییرمکان خرپای قوسی ۳۳ عضوی
(محور عمودی: $(\lambda P/AE)\times10^{-4}$ محور افقی: u/H)

۷. نتیجه‌گیری

در این مقاله، از راهکارهای تعامدی سخن به میان آمد. همچنین، چند روش تعامدی برای تحلیل غیرخطی سازه‌ها رابطه‌سازی شد. باید افزود، برای محاسبهٔ ضریب بار نموی در هر تکرار با روشهای تعامدی، تنها نیاز به حل یک رابطهٔ خطی می‌باشد. از میان شیوه‌های تعامدی پیشنهادی، تنها فن تعامدی t_i^n بر δu_i^n (روش ۵)، راهکاری مناسب برای تحلیل سازه‌های پیچیده است. روش مزبور، ترکیبی از فنهای صفحهٔ قائم بهنگام و تعامد تغییرمکان نامیزان می‌باشد که برای سازهٔ با درجه آزادی زیاد گسترش یافته‌اند. این راهکار نرخ همگرایی بینهایت دارد.

مراجع

[1] Hinton E., Owen D.R.J. and Taylor C., *Recent Advances in Nonlinear Computational Mechanics* Pinneridge Press Limited Swansea, U.K., 1982.

[2] Wempner G.A., "*Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solids*", Int.J.Solids.Struct., Vol.15, 1979, pp.529-551.

[3] Riks E., "*An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems*", Int.Solid.Struct., Vol.15, 1979, pp.529-551.

[4] Gierliniski J.T. and Smith T.R.G., "*A Variable Load Iteration Procedure for Nonlinear Finite Element Analysis*", Comput.Struct., Vol.21, No.5, 1985, pp.1085-1094.

[5] Kouhia R., "*On the Solution of Non-Linear Finite Element Equations*", Comput.Struct., Vol.44, No.1/2, 1992, pp.243-254.

[6] Ford B.W.R and Stiemer S.F., "*Improved Arc Length Orthogonallity Methods for Nonlinear Finite Element Analysis*", Comput.Struct., Vol.27, 1987, pp.625-630.

[7] Krenk S., "*An Ortogonal Residual Procedure for Non-Linear Finite Element Equations*", Int.J.Numer.Meth.Eng., Vol.38, 1995, pp.823-839.

[8] Krenk S. and Hededal O., "*A Dual Ortogonality Procedure for Non-Linear Finite Element Equations*", Comp.Meth.Appl.Mech.Eng., Vol.123, 1995, pp.95-107.

[9] Batoz J.L. and Dhatt G., "*Incremental Displacement Algoritm for Nonlinear Problems*", Int.J.Numer.Meth.Eng., Vol.14, 1979, pp.1262-1266.

[10] Fellipa C.A., "*Nonlinear Finite Element Methods*", Asen 5107, http:\\Kaswww. Colorado.edu/Courses.d/Nfemd/, (Spring 1999).

[11] Crisfild M.A., *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, J.Willy & Sons, New York, 1991.

[12] Hartono W., Nishino F., Fujiwara O. and Karasudhi P., "*On Tracing Bifurcation Equilibrium Paths of Geometrically Nonlinear Structures*", Struc.Eng./Earth.Eng., Vol.4, No.1, 1987, pp.11-17.

[13] Casciaro R., Salerno G. and Lanzo A.D., "*Finite Element Asymptotic Analysis of Slender Elastic Structures: A Simple Approch*", Int.J.Numer.Meth.Eng., Vol.35, 1992, pp.1397-1426.

[14] Meek J.L. and Tan H.S., "*Geometrically Nonlinear Analysis of Space Frame by an Incremental Iterative Technique*", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol.42, 1984, pp.261-282.

[15] Krishnamoorthy C.S., Ramesh G. and Dinesh K.U., "*Post-Buckling Analysis of Structures by Three-Parameter Constrained Solution Techniques*", Finit.Elem.Anal.Design., Vol.22, 1996, pp.109-142.