نشریه بین‌المللی علوم مهندسی، شماره ۳، جلد۱۷، پاییز ۱۳۸۵، صفحه ۳۰-۲۳
دانشگاه علم و صنعت ایران

بهینه‌سازی محدوده نهایی معدنکاری روباز با استفاده از زنجیره‌های مارکف

سید محمد اسماعیل جلالی*، کوروش شهریار و مجید عطایی‌پور

چکیده: اغلب روش‌هایی که تاکنون برای بهینه‌سازی محدوده نهایی معدنکاری روباز ارائه شده‌اند، مبتنی بر روش‌های جزمی و قطعی هستند. الگوریتم جدیدی که در این مقاله ارائه شده است از یک منطق احتمالی قوی مبتنی بر زنجیره‌های مارکف بهره می‌برد و به این دلیل از سایر الگوریتم‌ها کاملاً متمایز است. این الگوریتم بر روی یک ماتریس، موسوم به ماتریس انتقال، که متناظر با مدل اقتصادی دو بعدی متداول محدوده معدنکاری است، تعریف می‌شود. با کاربرد این الگوریتم می‌توان بخشی از محدوده معدنکاری را که احتمال دست یابی به سود حداکثر در صورت استخراج آن بخش بیشتر از سایر محدوده‌های محتمل است، تعیین نمود. در این مقاله به حل مساله به صورت دو بعدی پرداخته شده است اما به سادگی می‌توان از الگوریتم ارائه شده برای حل مسایل سه بعدی نیز سود جست.

واژه‌های کلیدی: معدن روباز، محدوده نهایی معدنکاری روباز، بهینه‌سازی، زنجیره مارکف، فرایند تصادفی

۱. مقدمه

تعیین محدوده بهینه معدنکاری در معادن روباز به دلایل اقتصادی و نیز به دلیل تعیین محل‌های دپوی باطله، جانمایی محل کارخانه‌های کانه‌آرایی و فرآوری و همچنین برای برنامه‌ریزی تولید معدن، همواره مورد توجه طراحان معادن بوده است.

امروزه طراحان معدن برای تعیین محدوده بهینه معدنکاری روباز، ابتدا کانسار و بخشی از سنگهای اطراف آن را بصورت یک بلوک بزرگ مدلسازی و سپس به بلوک‌های کوچکتر تقسیم می‌نمایند که به آن مدل بلوکی[2] کانسار می‌گویند. اگر در یک مدل بلوکی به هر بلوک، مواد عیار متوسط مواد تشکیل دهنده آن اختصاص داده شود، مدل مذکور را مدل بلوکی عیاری[3] و چنانچه به هر بلوک، ارزش اقتصادی متناظر با آن تخصیص یابد، آن را مدل بلوکی اقتصادی[4] می‌نامند.

هدف اصلی از تعیین محدوده بهینه معدنکاری روباز، یافتن مجموعه‌ای از بلوک‌ها است که با اعمال محدودیت‌های فنی، یکی از عوامل موردنظر بهره بردار معدن (فلز محتوی یا سود) بیشینه گردد. همه روش‌هایی که تاکنون برای بهینه سازی محدوده معدنکاری روباز ارایه شده‌اند، ارایه دهنده راه‌حل‌های جزمی و قطعی برای یافتن محدوده بهینه معدنکاری هستند اما روشی که در این مقاله معرفی شده است، یک روش جدید احتمالی[5] مبتنی بر روش های ریاضی است. در این روش با کاربرد اصول احتمالی زنجیره‌های مارکف[6] محدوده نهایی معدنکاری بر روی یک مدل اقتصادی دو بعدی جستجو می‌گردد.

۲. پیشینه مطالعات انجام شده

از سال ۱۹۶۰ تاکنون، روش‌ها و الگوریتم‌های مختلفی برای بهینه سازی اقتصادی محدوده معدنکاری روباز معرفی و مورد استفاده قرار گرفته است. این روشها را به طور کلی می‌توان به دو گروه مشتمل بر روش‌های ریاضی[7] و روش‌های جستجوگر[8] تقسیم کرد.

مقاله در تاریخ ۱۳۸۳/۸/۹ دریافت شده و در تاریخ ۱۳۸۴/۹/۱۱ به تصویب نهایی رسیده است.

سیدمحمد اسماعیل جلالی، دانشجوی دکترای مهندسی استخراج معدن، دانشکده مهندسی معدن و متالورژی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، jalalisme@aut.ac.ir
* دکتر جلالی هم‌اکنون استادیار دانشکده معدن و ژئوفیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود هستند.
دکتر کوروش شهریار، دانشیار دانشکده مهندسی معدن و متالورژی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، k.shahriar@aut.ac.ir
دکتر مجید عطایی پور، استادیار دانشکده مهندسی معدن و متالورژی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، map60@aut.ac.ir

2 Block Model
3 Grade Block Model
4 Economic Block Model
5 Probability
6 Markov Chains
7 Rigorous
8 Heuristic

۲-۱. روش‌های ریاضی

این روشها مبتنی بر الگوریتم‌هایی هستند که قادر به یافتن محدوده بهینه واقعی معدن بوده و از یک منطق قوی ریاضی برخوردارند [۱]. در این گروه روش برنامه‌ریزی پویا[۱] و نظریه نمودارها که هر دو توسط لرچ و گراسمن در سال ۱۹۶۵ ارایه شده‌اند و همچنین روش جریان شبکه[۲] که در سال ۱۹۶۸ توسط جانسون معرفی شده است، قرار می‌گیرند [۲].

۲-۲. روش‌های جستجوگر

روش‌های جستجوگر مبتنی بر الگوریتم‌هایی هستند که ماهیتاً تضمینی برای بهینه بودن محدوده معدنکاری تعیین شده ارایه نمی‌دهند [1]. سادگی و سرعت اجرای این الگوریتم‌ها مهمترین ویژگی آنهاست اما معمولا در تدوین چنین الگوریتم‌هایی بعضی از ظرایف از چشم پدیدآورندگان آنها دور می‌ماند و در دوره‌های زمانی مختلف مورد بازنگری قرار می‌گیرند. در این گروه، الگوریتم مخروط متحرک[۳] که در سال ۱۹۶۵ توسط پانا ارایه شده [2] و در سالهای ۱۹۶۶، ۱۹۷۴ و ۱۹۹۹ از دیدگاههای مختلف مورد تجدیدنظر قرار گرفته است، جای دارد.

علاوه بر روش‌های مذکور روش‌های دیگری مانند الگوریتم حمل و نقل[۴] [3] و الگوریتم وراثتی [4] برای بهینه سازی محدوده معدنکاری روباز ارایه شده است که بدلیل عدم ارایه جواب بهینه، چندان مورد توجه قرار نگرفته‌اند.

به هر حال روش‌های ریاضی یا جستجوگر که تاکنون برای بهینه‌سازی اقتصادی محدوده نهایی معدنکاری روباز ارایه شده‌اند، تنها یک محدوده را به عنوان محدوده بهینه معدنکاری روباز معرفی می‌نمایند. در حالی که روش احتمالی ارایه شده در این مقاله احتمال بهینه بودن هر یک از محدوده‌های معدنکاری محتمل را تعیین می‌نماید.

در این شرای می توان محدوده‌ای که با استخراج آن احتمال دستیابی به سود حداکثر بیش از سایر محدوده‌هاست را تعیین نمود.

۳. تعاریف

قبل از ورود به مبحث اصلی بعضی از تعاریف مورد نیاز برای تشریح زنجیره‌های مارکف مرور می‌شود [5].

1 Dynamic Programming
2 Network Flow
3 Moving Cone
4 Transport

۳-۱. بردارها یا نقاط ثابت[۵]

اگر u برداری با n مولفه و A یک ماتریس مربع $n\times n$ باشد، آنگاه می‌توان حاصلضرب $u.A$ را که خود نیز یک ماتریس $1\times n$ (یک بردار سطری) است، تشکیل داد. اگر ضرب $u\neq 0$ در A از طرف چپ، u را تغییر ندهد، u را بردار ثابت (یا نقطه ثابت) A می‌نامند. این شرایط را می‌توان با رابطه شماره ۱ توصیف کرد.

$$u.A=u \qquad (۱)$$

در این حالت به ازای هر مقدار عددی[۶] $k\neq 0$ نیز رابطه زیر برقرار است.

$$(ku)A=k(uA)=ku \qquad (۲)$$

یعنی اگر u بردار ثابت ماتریس A باشد، آنگاه ku، هر مضرب عددی غیر صفر از u، نیز برداری ثابت برای A خواهد بود. به‌عنوان مثال اگر ماتریس A به صورت $A=\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}$ تعریف شود. آنگاه بردار $u=(2,-1)$ نقطه ثابت A خواهد بود. زیرا:

$$uA=(2,-1)\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}$$
$$uA=(2\times 2-1\times 2\,,2\times 1-1\times 3)$$
$$uA=(2,-1)=u$$

۳-۲. بردارهای احتمال[۷] و ماتریس‌های تصادفی[۸]

اگر مولفه‌های بردار $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ نامنفی و مجموع آنها برابر یک باشد، u بردار احتمال نامیده می‌شود.

چنانچه هر یک از سطرهای ماتریس مربع $P=(p_{ij})$، یک بردار احتمال باشد آنگاه P یک ماتریس تصادفی خواهد بود. اگر A و B ماتریس تصادفی باشند، آنگاه حاصلضرب $A.B$ نیز یک ماتریس تصادفی است. بنابراین در حالت خاص، همه توانهای آن، A^n، نیز ماتریس‌های تصادفی خواهند بود.

۳-۳. ماتریس‌های تصادفی منظم[۹]

ماتریس تصادفی P در صورتی ماتریس تصادفی منظم نامیده می‌شود که تمام درایه‌های هر توانی از آن، مثل P^m، مثبت باشند. به عنوان مثال ماتریس تصادفی $A=\begin{pmatrix}0&1\\1/2&1/2\end{pmatrix}$، یک ماتریس منظم است.

5 Fixed points
6 Scalar
7 Probability Vector
8 Stochastic Matrices
9 Regular Stochastic Matrices

اگر P یک ماتریس تصادفی منظم باشد، آنگاه دارای بردار احتمال ثابت یکتایی[1] نظیر t خواهد بود که همه مولفه‌های آن مثبت هستند. در این شرایط رشته $P, P^2, P^3, \ldots$ از توانهای P به ماتریس احتمال T میل می‌کنند که هر کدام از سطرهای آن یک نقطه ثابت t است.

به‌همین ترتیب می‌توان گفت اگر p یک بردار احتمال باشد، آنگاه رشته بردارهای $pP, pP^2, pP^3, \ldots$ به سمت نقطه ثابت t گرایش پیدا خواهند کرد.

P^n به سمت T میل می‌کند، به این معنی است که هر درایه P^n به سمت درایه متناظر آن در T گرایش پیدا می‌کند.

همچنین مفهوم عبارت pP^n به سمت t گرایش می‌یابد نیز این است که هر مولفه pP^n به مولفه متناظر آن از t میل می‌کند.

برای مثال ماتریس تصادفی منظم $P=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$ دارای یک بردار احتمال ثابت یکتا دو مولفه‌ای است که می‌توان آنرا بصورت $t=(x,1-x)$ نشان داد.

در این حالت اگر $tP=t$ باشد، بردار t، بردار احتمال ثابت یکتای P خواهد بود.

برای یافتن مولفه‌های بردار t باید معادله $tP=t$ حل شود.

$$(x,1-x)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}=(x,1-x)$$

بدین ترتیب $t=(1/3,1-1/3)=(1/3,2/3)$ بردار احتمال ثابت یکتای P است و رشته $P, P^2, P^3, \ldots$ به ماتریس $T=\begin{pmatrix}1/3 & 2/3\\ 1/3 & 2/3\end{pmatrix}$ که هر سطر آن عبارت از بردار t است، میل می‌کند.

۴. زنجیره‌های مارکف

ویژگی دستگاهی[2] را که در آن دستگاه، وضعیت کنونی معلوم و وضعیت‌های گذشته هیچ تاثیری بر وضعیت‌های آینده نداشته باشند، ویژگی مارکفی و دستگاهی که دارای این ویژگی است را زنجیره مارکف می‌نامند.

در مباحث فرایندهای تصادفی[3]، زنجیره‌های مارکف از دو دیدگاه حایز اهمیت است.

نخست آنکه دارای نظریه‌ای غنی است که قسمت عمده آن را می‌توان در سطوح مقدماتی فرایندهای تصادفی ارائه کرد و دوم آنکه بسیاری از مسایل طبیعی و کاربردی را می‌توان از طریق آن مدلسازی و تحلیل کرد [6].

1 Unique
2 System
3 Stochastic Processes

برای تشریح الگوریتمی که در این مقاله توصیف شده است ابتدا باید شناخت کافی از زنجیره‌های مارکف و برخی از خواص آن وجود داشته باشد، ذیلاً به این خواص پرداخته می‌شود.

۴-۱. آشنایی با زنجیره‌های مارکف

رشته آزمایش‌هایی که نتایج آنها نظیر $s_1, s_2, s_3, \ldots$ دو ویژگی ذیل را برآورده می‌سازد، فرایند تصادفی زنجیره مارکف (متناهی[4]) نامیده می‌شود [5]:

الف- هر مجموعه به مجموعه متناهی نتایج یعنی $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ که فضای حالت[5] دستگاه نامیده می‌شود، متعلق باشد. اگر نتیجه آزمایش nام، a_i باشد آنگاه دستگاه در زمان n یا در مرحله nام، در حالت a_i قرار دارد.

ب- نتیجه هر آزمایش حداکثر به نتیجه آزمایش بلافصل قبلی وابسته و از نتیجه آزمایشات ماقبل دیگر مستقل باشد. برای هر زوج از حالتها، نظیر (a_i, a_j) احتمال معینی مانند p_{ij} وجود دارد به نحوی که a_j بلافاصله بعد از a_i رخ دهد.

اعداد p_{ij}، احتمال انتقال[6] خوانده می‌شوند و به صورت ماتریسی که به ماتریس انتقال[7] موسوم است، آرایش می‌یابند. ذیلاً ماتریس انتقال P که هر یک از درایه‌های آن احتمال انتقال p_{ij} را نشان می‌دهد، ملاحظه می‌شود.

$$P=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m}\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm}\end{pmatrix}$$

با توجه به آنچه ذکر شد، به هر حالت a_i، سطر iام ماتریس انتقال P یعنی $(p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}, \ldots, p_{im})$، متناظر می‌شود. اگر دستگاه در حالت a_i باشد، آنگاه این بردار سطری، همه نتایج محتمل در آزمایش بعدی را ارائه خواهد کرد و از این رو بردار احتمال به حساب می‌آید. بنابراین در زنجیره مارکف، ماتریس انتقال P، یک ماتریس تصادفی است.

۴-۲. احتمال انتقال بالاتر[8]

درایه p_{ij} در ماتریس انتقال P از زنجیره مارکف، معرف احتمال تغییر دستگاه، از حالت a_i به حالت a_j برای یک مرحله است.

4 Finite
5 State Space
6 Transition Probability
7Transition Matrix
8 Higher Transition Probability

در بعضی موارد لازم است احتمال $p_{ij}^{(n)}$ برای اینکه دستگاه از حالت a_i به حالت a_j دقیقاً n مرحله تغییر یابد، تعریف شود. در این حالت ماتریس $P^{(n)}$ که ماتریس انتقال n مرحله‌ای نامیده می‌شود و درایه‌های آن $p_{ij}^{(n)}$ هستند، باید تشکیل شود. اگر در زنجیره مارکف، P ماتریس انتقال باشد، آنگاه ماتریس انتقال n مرحله‌ای با توان nام P برابر خواهد بود. به عبارت دیگر $P^{(n)} = P^n$.

در هر وضعیت زمانی دلخواه، احتمال اینکه دستگاه در حالت a_i باشد با p_i تعریف می‌شود. این احتمال با بردار احتمال $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ که توزیع احتمال[1] دستگاه در آن زمان است، نشان داده می‌شود.

اگر توزیع احتمال اولیه[2] یعنی توزیع به هنگامی که فرایند آغاز می‌شود، با $p^{(0)} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_m^{0})$ نشان داده شود، آنگاه توزیع احتمال مرحله nام، یعنی توزیع بعد از nامین مرحله، با $p^{(n)} = (p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \dots, p_m^{(n)})$ نشان داده می‌شود.

اگر P در فرایند زنجیره مارکف، ماتریس انتقال و $p = (p_i)$ توزیع احتمال دستگاه در یک وضعیت زمانی دلخواه باشد، آنگاه pP بیانگر توزیع احتمال دستگاه برای یک مرحله بعد و pP^n نشان دهنده توزیع احتمال دستگاه برای n مرحله بعد خواهد بود. به همین ترتیب:

$$p^{(1)} = p^{(0)}P \ , \ p^{(2)} = p^{(1)}P$$
$$p^{(3)} = p^{(2)}P \ , \ \dots \ , \ p^{(n)} = p^{(0)}P^{(n)}$$

۴-۳. توزیع ماندار[3] زنجیره‌های منظم مارکف

اگر ماتریس انتقال P در زنجیره مارکف، منظم باشد، دنباله ماتریس‌های انتقال n مرحله‌ای P^n به ماتریس T که تمام سطرهای آن بردار احتمال ثابت یکتایی مثل t از ماتریس P می‌باشند، گرایش پیدا می‌کند.

بنابراین احتمال $p_{ij}^{(n)}$ در مورد اینکه a_j برای مقادیر بزرگ n رخ دهد از حالت اولیه a_i مستقل بوده و به سمت مولفه t_j از بردار t میل خواهد کرد. به عبارت دیگر اگر P یک ماتریس انتقال منظم باشد، آنگاه برای زمان طولانی، احتمال اینکه حالت a_j رخ دهد تقریباً با مولفه t_j از بردار احتمال ثابت یکتای t ماتریس P برابر است.

بدین ترتیب می‌توان گفت که اثر حالت اولیه یا توزیع احتمال اولیه فرایند با افزایش تعداد مراحل فرایند به تدریج از بین می‌رود. علاوه بر این، هر دنباله‌ای از توزیعات احتمال به سمت بردار احتمال ثابت t از P میل می‌کند. این نوع توزیع به نام توزیع ماندار زنجیره مارکف موسوم است.

1 Probability Distribution
2 Initial Distribution
3 Stationary Distribution

۴-۴. حالت‌های جاذب[4]

حالت جاذب در نوع خاصی از زنجیره‌های مارکف ملاحظه می‌شود که در آنها ماتریس انتقال، منظم نیست.

اگر a_i حالت جاذب زنجیره مارکف با ماتریس انتقال P باشد آنگاه به ازای $j \neq i$، برای هر مقدار n، احتمال انتقال n مرحله‌ای برابر با صفر است، یعنی $p_{ij}^{(n)} = 0$.

بنابراین هر توان P دارای درایه صفر بوده و از اینرو P منظم نخواهد بود. به همین دلیل می‌توان گفت که اگر ماتریس تصادفی P روی قطر اصلی دارای عدد یک باشد آنگاه P منظم نخواهد بود بجز در حالتی که P یک ماتریس 1×1 باشد.

۵. بهینه‌سازی محدوده معدنکاری با الگوریتم زنجیره‌های مارکف

همه روش‌هایی که تاکنون برای بهینه‌سازی محدوده نهایی معدنکاری روباز ارائه شده‌اند، گذشته از اینکه دارای منطق ریاضی یا جستجوگر باشند، روش‌هایی جزمی و قطعی هستند اما الگوریتم ارائه شده در این مقاله که بر پایه زنجیره‌های مارکف بنا شده است، از یک منطق احتمالی و غیر قطعی بهره می‌برد و به این دلیل از سایر الگوریتم‌ها کاملاً متمایز است.

این الگوریتم بر روی یک ماتریس که متناظر با مدل اقتصادی دو بعدی متداول محدوده معدنکاری است، تعریف شده است.

با استفاده از این الگوریتم می توان بخشی از محدوده معدنکاری را که احتمال دست یابی به سود حداکثر در صورت استخراج آن بیشتر از سایر محدوده‌های محتمل است، تعیین نمود.

۵-۱. مدلسازی محدوده معدنکاری

برای مدلسازی محدوده معدنکاری، در اولین گام، محدوده معدنکاری به صورت یک مدل اقتصادی دو بعدی مرسوم، که در این مقاله آن را مدل اقتصادی اولیه می نامیم، تعریف می‌شود. سپس تغییرات لازم بر روی مدل اقتصادی محدوده معدنکاری برای ایجاد مدل میانی اعمال می‌گردد. در آخرین مرحله یک ماتریس دوبعدی به نام ماتریس احتمال به منظور اجرای الگوریتم زنجیره های مارکف بر اساس مدل میانی، تولید می‌شود.

۵-۱-۱. مدل اقتصادی اولیه

مدل اقتصادی اولیه محدوده معدنکاری یک مدل اقتصادی بلوکی دو بعدی است که با توجه به اطلاعات فنی و اقتصادی کانسار و روش استخراج آن تهیه می‌شود.

4 Absorbing States

برای ساخت مدل اقتصادی اولیه، ابتدا محدوده معدنکاری در داخل یک فضای مستطیل شکل جای داده می‌شود و سپس مستطیل مورد نظر در جهات متعامد به مستطیل‌های (بلوک‌های) کوچکتری تقسیم می‌گردد، آنگاه ارزش اقتصادی هر بلوک تعیین می‌شود.

به این ترتیب مدل اقتصادی محدوده معدنکاری در واقع معادل ماتریسی است که هر یک از درایه های آن نشان‌دهنده ارزش اقتصادی یک بلوک (یا بخش معینی از محدوده معدنکاری) است.

در شکل۱، نمونه ای از مدل اقتصادی اولیه محدوده معدنکاری و ماتریس متناظر با آن، $E=[e_{ij}]_{m\times n}$، آورده شده است.

1	0	-1	1	1
-1	1	-1	2	-1

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

شکل ۱. نمونه‌ای از مدل اقتصادی اولیه محدوده معدنکاری و ماتریس متناظر با آن

۲-۱-۵. مدل میانی

برای ساخت مدل میانی که زیربنای تولید ماتریس احتمال است، تغییرات زیر، به ترتیب، بر روی ماتریس متناظر با مدل اقتصادی اولیه اعمال می‌شود:

الف- یک سطر به صورت یک بردار صفر (برداری که تمام مولفه‌های آن صفر است) به بالاترین سطر ماتریس متناظر با مدل اقتصادی اولیه، $E=[e_{ij}]_{m\times n}$، اضافه می‌شود.

در شکل ۲-الف، نتیجه اضافه نمودن سطر صفر به ماتریس E، که در شکل ۱ آمده است، ملاحظه می‌شود. در این حالت ماتریس جدیدی که ماتریس $B=[b_{ij}]_{(m+1)\times n}$، نامگذاری شده است، حاصل می‌شود.

ب- ماتریس دیگری به‌نام $C=[c_{ij}]_{(m+1)\times n}$، که هر درایه آن برابر با مجموعه درایه‌های سطرهای بالاتر در هر ستون از ماتریس B است، تشکیل می‌شود.

به عبارت دیگر:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{i} b_{kj} \qquad (۳)$$

در شکل ۲-ب، ماتریس C که منتج از ماتریس B است، ملاحظه می شود.

ج- از آنجا که در قوانین احتمالات اعداد منفی تعبیر فیزیکی ندارند، برای یافتن ماتریس متناظر با مدل میانی به هر یک از درایه‌های ماتریس C باید کوچکترین عدد مثبت $(k\geq 0)$ به قسمی اضافه می‌شود که ماتریس متناظر با مدل میانی، $M=[m_{ij}]_{(m+1)\times n}$، شامل درایه‌های صفر یا منفی نباشد.

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(الف)

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

(ب)

$$M=\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

(ج)

شکل ۲ . مراحل ساخت ماتریس متناظر با مدل میانی

درایه‌های صفر نیز با توجه به تعاریف زنجیره‌های مارکف قابل پذیرش نیستند. زیرا با وجود درایه‌های صفر ممکن است ماتریس انتقال منظم تشکیل نشود و نتوان از قوانین مربوط به ماتریس‌های تصادفی منظم برای حل مساله استفاده نمود.

طبیعی است در صورتی که از روش‌های جزمی و قطعی متعارف برای یافتن محدوده بهینه معدنکاری استفاده شود، اضافه کردن مقدار ثابت k به درایه‌های ماتریس C، که هر درایه آن ارزش تجمعی بلوک‌های استخراجی را نشان می‌دهد، باعث تغییر ارزش و تغییر محدوده بهینه معدنکاری خواهد شد.

اما در حالتی که از روش احتمالی ارائه شده در این مقاله برای تعیین محدوده بهینه معدنکاری استفاده شود، محدوده مذکور با اضافه کردن یک مقدار ثابت به ارزش تجمعی بلوک‌ها تغییر نخواهد کرد. زیرا در این روش برخلاف روش‌های قطعی که در آنها ارزش مطلق هر بلوک برای تصمیم‌گیری در مورد استخراج یا عدم استخراج آن مورد توجه قرار می‌گیرد، تصمیم‌گیری بر پایه ارزش نسبی هر بلوک در مقایسه با بلوک‌های مجاور آن صورت می‌پذیرد. در شکل ۲-ج، ماتریس میانی حاصل از ماتریس E با انتخاب $k=3$ آورده شده است. ماتریس متناظر با مدل میانی دارای $m+1$ سطر، n ستون و $(m+1)\times n$ درایه است.

۲-۵. منطق الگوریتم

الگوریتم ارایه شده بر این اصل استوار است که احتمال استخراج شدن هر بلوک، متناسب با ارزش اقتصادی کارگاه استخراج متناظر با آن بلوک است.

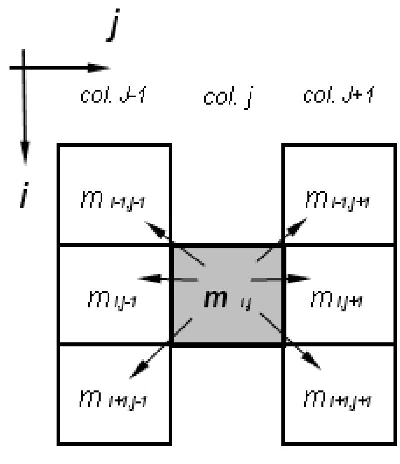
منظور از کارگاه استخراج متناظر با هر بلوک، تمام بلوک‌های بالای یک بلوک به علاوه بلوک مورد نظر می‌باشد. در صورتی که شیب مجاز دیواره‌های محدوده معدنکاری یک به یک در نظر گرفته شود، کف کارگاه استخراجی که در سمت راست یا چپ هر کارگاه قرار دارد می‌تواند هم‌تراز با کارگاه مورد نظر و یا به اندازه یک بلوک پایین‌تر یا بالاتر از آن باشد.

بنابراین در این شرایط در هر سمت کارگاه مورد نظر سه کارگاه محتمل مطابق آنچه در شکل ۳ مشاهده می‌شود، وجود خواهد داشت.

برای اینکه این موضوع در کارگاه‌های واقع در ابتدا و انتهای محدوده مدلسازی شده نیز صادق باشد، لازم است ابتدا و انتهای مدل مستطیل شکل میانی به هم متصل شود. به این ترتیب به جای یک مدل مستطیلی یک مدل واقع بر یک سطح استوانه‌ای حاصل می‌شود.

در این شرایط بر اساس منطق تعریف شده برای الگوریتم مورد نظر، احتمال اینکه محدوده معدنکاری از کارگاه موجود به هر یک از شش کارگاه مجاور تغییر مکان یابد، متناظر با ارزش کارگاه‌های محتمل مجاور آن است.

در واقع در این الگوریتم مساله یافتن محدوده بهینه معدنکاری به جستجو و یافتن محتمل‌ترین کارگاه‌های استخراج منتهی می‌شود.



شکل ۳. نمایش کارگاه‌های محتمل در اطراف هر کارگاه

۵-۳. ماتریس انتقال

ماتریس انتقال با توجه به مدل میانی و مبانی الگوریتم، تشکیل می‌شود. بر این اساس اگر کارگاه استخراجی که با درایه m_{ij} در ماتریس میانی M متناظر است را در نظر بگیریم، کارگاه‌های استخراج مجاور آن متناظر با یکی از درایه‌های $m_{i-1,j+1}$، $m_{i,j+1}$، $m_{i+1,j+1}$، $m_{i-1,j-1}$، $m_{i,j-1}$ و $m_{i+1,j-1}$ خواهند بود (شکل ۳).

در این شرایط، احتمال تغییر موقعیت کارگاه از کارگاه متناظر با درایه m_{ij} به یکی از کارگاه‌های متناظر با درایه‌های فوق الذکر، متناسب با ارزش اقتصادی آنها در نظر گرفته می‌شود. به عنوان مثال با توجه به مدل میانی شکل ۲، احتمال تغییر موقیت کارگاه از موقعیت متناظر با درایه واقع در سطر و ستون دوم به موقعیت متناظر با درایه واقع در سطر اول، دوم و سوم از ستون‌های اول و سوم به ترتیب برابر با 3/16، 4/16، 3/16، 3/16، 2/16، 1/16 است. طبیعی است که در این حالت احتمال تغییر موقعیت کارگاه از موقعیت متناظر با درایه واقع در سطر و ستون دوم به موقعیت متناظر با سایر درایه‌ها، صفر است. در شکل ۴ ماتریس انتقال، K، برای مدل میانی ارایه شده در شکل ۲ آورده شده است.

۵-۴. اجرای الگوریتم زنجیره‌های مارکف

بر اساس منطقی که برای الگوریتم تشریح شده است، برای تعیین محدوده معدنکاری باید در هر ستون از ماتریس متناظر با مدل میانی، کارگاه استخراجی را که احتمال استخراج شدن آن برای دست‌یابی به سود حداکثر، بیشتر از سایر کارگاه‌ها است، جستجو کرد. با توجه به اینکه شرایط هندسی معدنکاری در ماتریس احتمال K، منظور شده است کافی است توزیع ماندار زنجیره مارکف برای ماتریس احتمال محاسبه گردد. به این منظور باید دستگاه معادلات شماره ۴ حل شود.

$$\begin{cases}[X]_{1\times m}[K]_{m\times m}=[X]_{1\times m}\\ \sum_{i=1}^{m}x_i=1\end{cases} \qquad (۴)$$

که در آن $[K]_{m\times m}$ ماتریس انتقال مدل معدنکاری، $[X]_{1\times m}$ بردار احتمال ثابت یکتای متناظر با ماتریس انتقال K و x_i مولفه‌های بردار X است.

از حل این معادلات مقادیر x_i، مولفه‌های بردار X، به دست می‌آید.

در واقع درایه‌های x_i نشان دهنده احتمال باقی ماندن کارگاه استخراج در موقعیت i است.

اگر معادلات فوق به ازای ماتریس انتقال نشان داده شده در شکل ۴ حل شود، مقادیر x_i به ترتیب زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{array}{|lll}
x_1=39/732 & x_2=36/732 & x_3=39/732\\
x_4=36/732 & x_5=42/732 & x_6=80/732\\
x_7=48/732 & x_8=46/732 & x_9=64/732\\
x_{10}=92/732 & x_{11}=42/732 & x_{12}=40/732\\
x_{13}=17/732 & x_{14}=60/732 & x_{15}=51/732
\end{array}$$

مقادیر فوق را می‌توان به صورت یک ماتریس دو بعدی متناظر با مدل میانی با ترتیبی که در شکل ۵ نشان داده شده است، مرتب نمود.

$$X = \begin{bmatrix} 39/732 & 36/732 & 39/732 & 36/732 & 42/732 \\ 80/732 & 48/732 & 46/732 & 64/732 & 92/732 \\ 42/732 & 40/732 & 17/732 & 60/732 & 51/732 \end{bmatrix}$$

شکل ۵. نمایش ماتریسی مقادیر x_i

از آنجا که در محاسبه احتمال تغییر موقعیت کارگاه، از یک کارگاه به کارگاه دیگر، ارزش کارگاه اولیه در نظر گرفته نمی‌شود، مقادیر حاصل باید در ارزش هر کارگاه در ماتریس متناظر با مدل میانی ضرب شوند. به این ترتیب می‌توان احتمال استخراج هر یک از پانزده کارگاه محتمل را تعیین نمود و آنها را در یک مدل هندسی متناظر با مدل میانی محدوده معدنکاری به صورتی که در شکل شماره ۶ نشان داده شده است، جانمایی نمود.

$$K=\begin{bmatrix}
0 & 3/13 & 0 & 0 & 3/13 & 0 & 3/13 & 0 & 0 & 4/13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3/13 & 0 & 3/13 & 0 & 0 & 3/13 & 0 & 4/13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3/14 & 0 & 0 & 3/14 & 0 & 2/7 & 0 & 0 & 2/7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3/20 & 0 & 0 & 3/20 & 0 & 3/20 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 3/20 \\
3/16 & 0 & 3/16 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/8 & 0 & 0 & 3/16 & 0 & 1/16 & 0 & 0 \\
0 & 3/23 & 0 & 3/23 & 0 & 0 & 3/23 & 0 & 4/23 & 0 & 0 & 4/23 & 0 & 6/23 & 0 \\
0 & 0 & 3/16 & 0 & 3/16 & 0 & 0 & 1/8 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/16 & 0 & 3/16 \\
3/23 & 0 & 0 & 3/23 & 0 & 4/23 & 0 & 0 & 4/23 & 0 & 3/23 & 0 & 0 & 6/23 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/14 & 0 & 0 & 2/7 & 0 & 2/7 & 0 & 0 & 3/14 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/5 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 3/10 & 0 & 1/10 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/17 & 0 & 4/17 & 0 & 0 & 4/17 & 0 & 6/17 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 2/5 & 0 & 0 & 1/10 & 0 & 3/10 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4/17 & 0 & 0 & 4/17 & 0 & 3/17 & 0 & 0 & 6/17 & 0
\end{bmatrix}$$

شکل ۴. ماتریس انتقال، K، برای مدل میانی ارایه شده در شکل ۲

$\frac{117}{732}$	$\frac{108}{732}$	$\frac{177}{732}$	$\frac{108}{732}$	$\frac{126}{732}$
$\frac{320}{732}$	$\frac{144}{732}$	$\frac{92}{732}$	$\frac{256}{732}$	$\frac{368}{732}$
$\frac{126}{732}$	$\frac{160}{732}$	$\frac{17}{732}$	$\frac{360}{732}$	$\frac{153}{732}$

شکل ۶. مقادیر احتمال استخراج هر کارگاه در مدل هندسی متناظر با مدل میانی شکل ۴

با توجه به شکل ۶، محتمل‌ترین کارگاه‌های استخراج در هر ستون را می‌توان مشخص کرد. از کنار هم گذاردن این کارگاه‌ها محدوده بهینه معدنکاری که با استخراج آن احتمال دست‌یابی به سود حداکثر، بیشترین مقدار ممکن است، تعیین می‌گردد.

در شکل ۷ سودآورترین محدوده معدنکاری با توجه به محتمل‌ترین کارگاه‌های استخراج که در شکل ۶ نشان داده شده، بر روی مدل اقتصادی اولیه ملاحظه می‌شود.

این محدوده با محدوده‌ای که با کاربرد الگوریتم برنامه‌ریزی پویا[1] بر روی مدل مذکور حاصل می‌شود، یکسان است.

1	0	-1	1	1
-1	1	-1	2	-1

شکل ۷. سودآورترین محدوده معدنکاری با توجه به محتمل‌ترین کارگاه‌های استخراج در شکل ۶

۶. نتیجه‌گیری

الگوریتم جدیدی که در این مقاله ارائه شده است از یک منطق احتمالی با پشتوانه غنی ریاضی بهره می‌برد و از این جهت روش نوینی را برای طراحی محدوده بهینه معدنکاری روباز ارائه می‌نماید و از سایر الگوریتم‌هایی که تا کنون ارائه شده، کاملاً متمایز است.

1 Dynamic Programming algorithm

الگوریتم ارائه شده بر روی مدل اقتصادی دو بعدی مرسوم محدوده معدنکاری اجرا می‌شود و با اجرای آن بخشی از محدوده معدنکاری که در صورت استخراج آن احتمال دست‌یابی به سود حداکثر، بیشتر از سایر محدوده‌های محتمل است، تعیین می‌شود.

در الگوریتم ارائه شده در این مقاله، حل مساله به صورت دو بعدی مورد نظر بوده است اما به سادگی می‌توان از این الگوریتم برای حل مسایل سه بعدی نیز سود جست.

با افزایش ابعاد مدل اقتصادی از دو بعد به سه بعد، تعداد درایه‌های ماتریس انتقال به صورت تصاعدی افزایش می‌یابد اما از آنجا که مراحل ساخت مدل‌های اقتصادی، ماتریس انتقال و حل دستگاه معادلات را می‌توان با تدوین یک برنامه کامپیوتری یا نرم‌افزار به صورت ماشینی انجام داد، افزایش حجم محاسبات چندان نگران کننده نیست.

مراجع

[1] Kim, Y.C., *Ultimate pit limit design methodologies using computer models- the state of the art*, Mining Engineering journal, 1978, No. 30, pp. 1454-1459.

[2] Ataee pour, M., *A Heuristic Algorithm to optimize Stope Boundaries*, Ph.D. Thesis, University of Wollongong, 2000, pp. 2_1-2_24.

[3] Huttagosol, P., Cameron, R. E., *A computer design of ultimate pit limit by using transportation algorithm*, Proceedings of the 23rd Symposium on the application of computers and operations research in the mineral industries, Colorado, 1992, pp. 443-460.

[4] Denby, B., Schofield, D., *Open-pit design and scheduling by use of genetic algorithms*, Trans. IMM, 1994, No. 103, pp. A21-A26.

[5] Lipschutz, S., *Theory and Problems of Probability*, Schaum's Outline Series, McGraw Hill, 1974.

[6] Hoel, P.G., Port, S.C., Stone, C. J., *Introduction to Stochastic Processes*, Houghton Mifflin Company, 1972.