

بهینه‌سازی اقتصادی فرایند کنترلی R2R با استفاده از نمودار کنترلی باقیمانده

رسول نور السناء، رضا برادران کاظم زاده و مهدی کرباسیان

چکیده: کنترل‌کننده‌های R2R (Run-to-Run) مجموعه‌ای از تکنیک‌های آماری و مهندسی کنترل فرایند می‌باشند، که اخیراً در صنایع مختلف نظیر نیمه هادی‌ها و ساخت قطعات اپتیک کاربرد فراوان یافته‌اند. کنترل‌کننده R2R بر پایه رویه میانگین متحرک موزون نمایی، یکی از مهم‌ترین این نوع کنترل‌کننده‌ها می‌باشند. در این کنترل‌کننده از روش تنظیم ورودی فرایند بر اساس اختلاف نتایج حاصل از یک مدل خطی پیش‌بینی‌کننده و خروجی واقعی فرایند در هر مرحله، استفاده می‌گردد. در اکثر مقالات موجود، در زمینه هزینه تنظیم‌های متعدد ورودی هیچ‌گونه بحثی نشده است، در حالی که این نوع کنترل، باعث به‌وجود آمدن هزینه‌هایی از قبیل تغییر در موجودی، اضافه کاری و دیگر هزینه‌ها می‌شود. در این مقاله، این ایده مطرح شده است که ابتدا خروجی هر مرحله با استفاده از نمودارهای کنترل باقیمانده کنترل گردد و در صورت وجود حالت خارج از کنترل، تنظیم فرایند صورت گیرد، تا به این وسیله از تنظیم‌های جزئی متعدد در هر مرحله جلوگیری گردد. در این مقاله با در نظر گرفتن پارامترهای هزینه‌ای مطرح در تنظیم فرایند و نمودار کنترلی باقیمانده، یک مدل اقتصادی به منظور طراحی بهینه رویه ترکیبی R2R و نمودار کنترل باقیمانده توسعه داده شده است.

واژه‌های کلیدی: کنترل‌کننده R2R، نمودار کنترل باقیمانده، بهینه‌سازی اقتصادی

۱. مقدمه

با استفاده از فنون کنترل کیفیت آماری^۱ (SPC)، می‌توان با تأکید روی تعیین وضعیت، تغییرات با دلیل در مشخصات کیفی محصول را کاهش داد. ولی نوع دیگر تغییرات، یعنی تغییرات ذاتی در یک محدوده زمانی قابل پیش‌بینی هستند و از طرف دیگر با تنظیم و اصلاح در متغیرهای مؤثر در فرایند می‌توان آن‌ها را کاهش داد. بنابراین در حالت ایده‌آل، نه تنها تأکید روی تعیین وضعیت باید باشد، بلکه باید تنظیم فرایند و یا کنترل مهندسی فرایند^۲ (EPC) نیز مورد توجه قرار گیرد. در حقیقت می‌توان کنترل را ترکیبی

نسخه اصلی مقاله در تاریخ ۱۳۸۳/۶/۲۱ واصل و پس از بازنگری‌های لازم، در تاریخ ۱۳۸۴/۲/۲۵ به تصویب نهایی رسیده است.

دکتر رسول نورالسناء، استاد دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران،
rassoul@iust.ac.ir
دکتر رضا برادران کاظم زاده، استادیار بخش مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس تهران، rkazem@modares.ac.ir

هنرمندانه از SPC و EPC دانست. کنترل‌کننده‌های R2R، نمونه‌ای از فعالیت‌های مرتبط با ایده ترکیب EPC و SPC می‌باشد. نزدیک شدن به مشخصه کیفی به مقدار ایده‌آل هم‌زمان با در نظر گرفتن عوامل اقتصادی در یک فرایند کنترلی که ترکیبی از R2R و نمودارهای کنترلی باقیمانده می‌باشد، از اهداف این مقاله است. برای اولین بار در دهه ۱۹۹۰ در ترکیب SPC و EPC به صورت یکپارچه، سعی به عمل آمد. معمولاً در EPC اگر بتوانیم مشخصه کیفی خروجی فرایند را در مرحله بعد پیش‌بینی کنیم، همچنین متغیرهای ورودی داشته باشیم که با تغییر دادن آن بتوان به‌گونه‌ای بر خروجی فرایند اثر گذاشت و بدانیم این مقدار تغییر چه اثری بر روی فرایند می‌گذارد تا از آن طریق میزان کنترل لازم اعمال گردد آن‌گاه می‌توان متغیر موردنظر را به‌گونه‌ای در زمان t تغییر داد و یا تنظیم نمود تا نتیجه حاصل در زمان $t+1$ به مقدار هدف نزدیک-تر گردد. به‌عبارت دیگر با استفاده از EPC تغییرپذیری در خروجی فرایند را می‌توان با انجام فعالیت‌های کنترلی در هر مرحله کاهش داد.

EPC سعی بر شناسایی انحرافات با دلیل که ممکن است بر فرایند اثر گذارند ندارد، ولی حذف انحرافات با دلیل می‌تواند بهبود قابل

¹ Statistical Process Control
² Engineering Process Control

شامل هزینه‌های نمونه‌گیری در حالت تحت کنترل، هزینه‌های تولید معیوب در حالت خارج از کنترل، همچنین هزینه‌های تشخیص علل تغییر در فرایند و زنگ خطرهای اشتباهی می‌باشد. در مرجع [16] گزارش شده که اقتصادی‌ترین حالت برای نمودارهای کنترل با داشتن فواصل نامساوی در نمونه‌گیری امکان‌پذیر است. مرجع [17] روش‌هایی را برای کاهش زنگ خطر اشتباهی پیشنهاد کرده است. مرجع [18] یک روش آماری برای طراحی اقتصادی نمودارهای EWMA ابداع کرده است و در سال ۲۰۰۰، مرجع [19] یک روش کاربردی را برای طراحی اقتصادی نمودارهای M^1EWMA بکار برده است.

۲. ساختار کنترل‌کننده‌های R2R

اصطلاح R2R به جایی بر می‌گردد که یک عملیات کنترلی بر روی دسته تولیدی سیلیکون انجام گرفت [5]. شکل زیر ساختار عمومی یک کنترل‌کننده R2R را نشان می‌دهد.

این نوع کنترل‌کننده برای فرایندهایی که هزینه دوری از هدف برای هر مرحله بالا و هزینه کنترل برای هر مرحله نسبتاً ارزان، بسیار مناسب است.

کنترل فرایند R2R شامل دو رویه یا قدم می‌باشد. ابتدا یک مدل خطی رگرسیونی بر اساس آزمایش‌های قبلی در نظر گرفته می‌شود. این مدل متغیرهای ورودی (X_t) را به متغیرهای خروجی (Y_t) ربط می‌دهد. اگر سیستم دارای چندین ورودی و یا خروجی باشد، X_t و Y_t بردارهایی هستند که لزوماً دارای اندازه یکسان نیستند.

دومین قدم در کنترل R2R، یک تخمین مداوم و کنترل فرایند می‌باشد. به عبارت دیگر مدل رگرسیونی که در مرحله ابتدایی ساخته شده به صورت مستمر و در هر مرحله تنظیم^۲ و به‌هنگام می‌گردد. در این مرحله، بر اساس داده‌های مربوط به وضعیت فرایند عملیات کنترلی لازم به کار می‌رود. این رویه به نوعی از تکنیک‌هایی که مهندسی برق در تخمین بازگشتی به کار می‌برند نزدیک‌تر است، تا به رویه سه مرحله‌ای که شامل برازش، شناسایی مدل و کنترل بوده و توسط باکس و جنکینز معرفی گردیده است [20].

در به‌هنگام‌سازی مدل به‌صورت مستمر، نیازی به تعداد مرحله‌های زیاد بر خلاف آنچه که در سری‌های زمانی مورد نیاز است، نمی‌باشد. ساختار اساسی کنترل‌کننده R2R در شکل ۲ نشان داده شده است.

۳. قدم اول، مدل کردن فرایند

اولین قدم در توسعه سیستم کنترل R2R، توسعه یک مدل رگرسیونی است که به‌صورت واقعی رابطه بین متغیرهای قابل کنترل و مشخصه‌های کیفی مورد علاقه را بیان می‌کند. ما در این

ملاحظه‌ای برای فرایند به‌همراه داشته باشند. بنابراین استفاده هم-زمان از روش‌های آماری در کنار EPC، می‌تواند مقاطعی از زمان را که دارای خطاهای کنترل بزرگ هستند و یا اینکه در آن مراحل تغییرات بزرگی بر روی متغیر قابل کنترل ایجاد گردیده است، شناسایی کند. این مقاطع زمانی احتمالاً مکان‌های خوبی برای شناسایی انحرافات با دلیل است.

به همین خاطر در این مقاله ایده استفاده همزمان از نمودارهای کنترلی و رویه کنترلی R2R مطرح گردیده است. مطرح شدن این ایده با هدف کاهش هزینه تنظیم‌های غیرضروری در فرایند R2R و در نتیجه ناب‌تر کردن فرایند کنترل تولید و افزایش درآمد خالص آن صورت می‌گیرد. عده‌ای از محققین در زمینه کیفیت، توجه خود را منحصر در زمینه طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل معطوف داشته‌اند. در سال ۱۹۵۲، گیرتینگ و روبین یکی از اساسی‌ترین مدل‌های اقتصادی را در سیستم‌های کنترل کیفیت مطرح کردند [1]. آن‌ها از مدل مارکوفی برای بیان حالت‌های مختلف فرایند استفاده نمودند. بعضی از محققان سعی کرده‌اند تا یک مدل کلی برای مدل ارائه شده در مرجع [1] ارائه نمایند که از میان آنها می‌توان به مؤلفان مراجع [2-5] اشاره نمود. البته نتایج ارائه شده توسط این محققان به مانند مرجع [1] به علت عدم وجود قوانین ساده برای به‌کارگیری آن‌ها در عمل، بیشتر از ارزش تئوری برخوردار هستند.

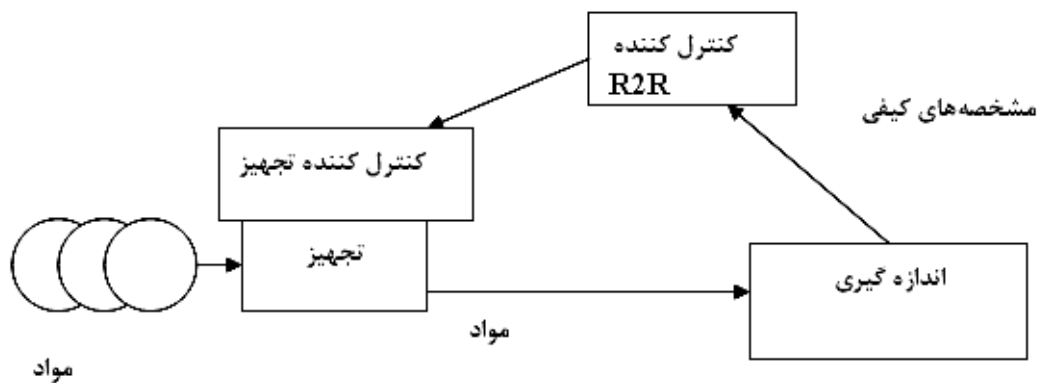
نمودارهای کنترل شوهارت نیز توسط چندین محقق از نظر اقتصادی بررسی گردیده است. اغلب تحقیقات آن‌ها را می‌توان به-عنوان روش‌های طراحی نیمه اقتصادی گروه‌بندی کرد. در مرجع [6] پیشنهاد شده که اندازه نمونه بهینه برای کنترل میانگین زمانی حاصل می‌گردد که تعداد کل بازرسی‌های مورد نیاز جهت پی بردن به وجود یک تغییر خاص کمینه شود و یا به عبارت دیگر کمینه نمودن بازرسی کل به معنی کمینه شدن هزینه‌های کل است. روش‌های مشابهی برای مطالعه اقتصادی دیگر نمودارهای کنترل در مراجع [7-9] استفاده گردیده است.

مراجع [10,11] تجزیه و تحلیل‌های نیمه‌اقتصادی دیگری را معرفی می‌کنند. مرجع [11] از شبیه‌سازی مونت کارلو جهت بررسی چند طراحی مختلف از نمودار کنترلی \bar{X} که شامل تعدادی استراتژی-های تنظیم فرایند می‌گردد، استفاده می‌کند.

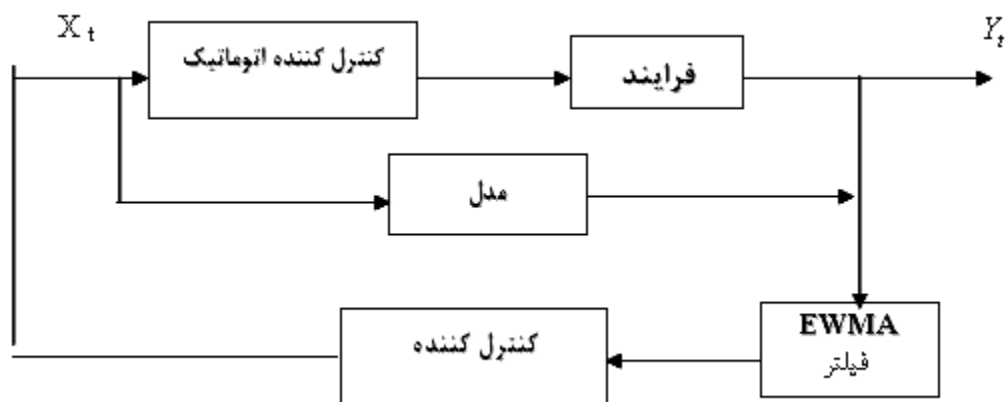
نتایج ارائه شده در مرجع [12] حاکی از این است که روش‌های کنترل که بر اساس یک نمونه در فواصل زمانی ثابت عمل می‌کنند، بهینه نیستند. این مرجع پیشنهاد می‌کند که اندازه نمونه و فاصله نمونه‌گیری باید در هر مقطع زمانی بر اساس احتمال پسین اینکه فرایند در حالت خارج از کنترل بسر می‌برد تعیین گردد. روش‌هایی از قبیل برنامه‌ریزی پویا به مقدار نسبتاً زیادی در تعیین راه حل بهینه استفاده شده است. همچنین در مراجع [13-15] یک طراحی عمومی اقتصادی ارائه شده است. مدل مطرح شده در آن مراجع،

¹ Exponentially Weighted Moving Average

² Tuning



شکل ۱. ساختار عمومی کنترل کننده R2R



شکل ۲. ساختار عمومی فرایند R2R

روش‌ها به‌صورت کاملاً کلاسیک بحث شده‌اند، ما روی قدم دوم R2R یعنی کنترل و میزان کردن پیوسته می‌پردازیم. به‌عبارت دیگر، صرف نظر از رویه‌هایی که برای ایجاد یک مدل رگرسیونی بهینه برای اولین بار به کار می‌روند، در قدم دوم سعی می‌گردد فرایند تا حد امکان در حالت بهینه که همان مقدار ایده آل مشخصه کیفی است نگهداری شود.

۴. قدم دوم، کنترل فرایند و تنظیم مستمر آن

در این قدم، بر اساس اندازه‌گیری خروجی فرایند و مقایسه با پیش‌بینی، بر اساس مدل رگرسیونی و استفاده از رویه EWMA برای اختلاف حاصل از پیش‌بینی مدل و واقعیت، عرض از مبدا مدل رگرسیونی (α) به‌هنگام می‌شود و از طرف دیگر میزان ورودی در مرحله بعد بر اساس مقدار جدید α_t مشخص می‌گردد [21]. از آنجائی که فرایند دینامیک نیست، فعالیت کنترل بهینه بر اساس حداقل واریانس حول هدف T برای مدل (۱) عبارت است از:

$$X_t = \frac{T - \alpha}{\beta} \quad (2)$$

مقاله فرض می‌کنیم که یک متغیر قابل کنترل و یک مشخصه کیفی داریم (SISO)^۱. فرض اساسی در این حالت این است که فرایند حالت دینامیک ندارد. این به آن معنی است که مشخصه کیفی در مرحله t (Y_t) فقط به متغیر ورودی X_{t-1} در ابتدای مرحله t (انتهای مرحله $t-1$) بستگی دارد.

اگر ورودی‌های قبل X_{t-j} یا خروجی‌های قبلی Y_{t-j} ($j > 1$) روی Y_t اثر داشته باشد. فرایند را دینامیک می‌گوییم. در حالت SISO که در این مقاله بحث شده یک مدل ساده خطی به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$Y_t = \alpha + \beta X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1)$$

که α و β پارامترهای مدل بوده و ε_t اغتشاشات سفید^۲ می‌باشد. همچنین در مدل (۱) این فرض وجود دارد که هیچ تأخیری بین فعالیت کنترلی و اثر آن روی Y_t وجود ندارد. البته در مسائل تولید گسسته قطعات این یک فرض منطقی است. در این مرحله α و β بر اساس روش‌های مختلفی قابل تخمین هستند. از آنجا که این

^۱ Single Input Single Output

^۲ White noise

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \lambda\xi & \lambda\delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$w_t = \begin{bmatrix} \lambda(\alpha + \varepsilon_t) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

از طرف دیگر برای حل این معادله داریم:

$$z_t = A^t z_0 + \sum_{j=1}^{t-1} A^{t-j-1} w_j \quad (13)$$

ماتریس A^t با استفاده از رابطه $A^t = p\Gamma^t p^{-1}$ محاسبه می‌شود که در آن:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 - \lambda\xi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

بر اساس تئوری فضای حالت می‌توان نتیجه‌گیری کرد که موقعی مشخصه کیفی، حالت پایدار دارد که $|1 - \lambda\xi| \leq 1$ بوده و اگر $z_0 = (0, 0)$ باشد در آن صورت با فرض پایدار بودن فرایند داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{t-1} (1 - \lambda\xi)^{t-j-1} = 1 / \lambda\xi \quad (15)$$

$$y_t = \frac{\delta}{\lambda\xi} - \xi \sum_{j=0}^{t-1} (1 - \lambda\xi)^{t-j-1} \varepsilon_j + \varepsilon_t \quad (16)$$

از روابط اخیر داریم [21]:

$$AMSE(y_t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [y_t^2] = \sigma_\varepsilon^2 + \frac{\lambda^2 \xi \sigma_\varepsilon^2}{2 - \lambda\xi} + \left(\frac{\delta}{\lambda\xi}\right)^2 \quad (17)$$

در اینجا یک معاوضه با انتخاب مقادیر مختلف λ مشاهده می‌گردد. در صورتی که $\lambda = 0$ باشد (یعنی کنترلی وجود ندارد) میزان AMSE حداقل می‌گردد. ولی اریب افزایش می‌یابد و از طرف دیگر اگر $\lambda = 1$ باشد، اریب کاهش می‌یابد ولی در عوض واریانس زیاد می‌شود.

۶. نمودارهای کنترل باقیمانده

در نمودار EWMA آماره را می‌توان به عنوان پیش‌بینی یک مرحله جلوتر برای میانگین فرایند در نظر گرفت. در این صورت می‌توان از خطای پیش‌بینی یک مرحله جلوتر یا:

$$e_1(t) = x_t - z_{t-1} \quad (18)$$

جهت تعیین حدود کنترل نمودار EWMA استفاده کرد. اگر EWMA بتواند پیش‌بینی خوبی برای یک مرحله جلوتر باشد، آنگاه مجموعه خطاهای پیش‌بینی یک مرحله جلوتر فاقد همبستگی خواهند بود. از دو روش می‌توان برای تعیین میزان انحراف معیار خطاهای پیش‌بینی یک مرحله جلوتر استفاده نمود. روش اول از قدر مطلق خطاهای پیش‌بینی حاصل از یک EWMA به صورت زیر استفاده می‌کند [22]:

$$\Delta(t) = \lambda |e_1(t)| + (1 - \lambda)\Delta(t-1) \quad (19)$$

چون برای توزیع نرمال $\sigma \approx 1.25\Delta(t)$ است می‌توان از $\pm 3[1.25\Delta(t)]$ به عنوان حدود کنترل بالا و پایین نمودار EWMA

عملیات کنترلی (۲) بر روی سیستم، قبل از شروع مرحله $t+1$ اعمال می‌گردد. کنترل‌کننده R2R فرض می‌کند که ضریب زاویه β ثابت و عرض از مبدا α نسبت به زمان متغیر است [8]. در این حالت فعالیت کنترلی (تعیین مقدار ورودی در مرحله جدید) از پیش‌بینی مقدار پاسخ (\hat{Y}_t) محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t &= a_{t-1} + bX_{t-1} = T \\ X_t &= \frac{T - a_t}{b} \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن $b = \hat{\beta}$, $a_t = \hat{\alpha}_{t+1/t}$ تخمین ضریب زاویه β به صورت یک‌باره صورت می‌گیرد، در حالی که تخمین عرض از مبدا به صورت مداوم و بازگشتی با استفاده از رویه EWMA به صورت زیر انجام می‌گیرد.

$$a_t = \lambda(Y_t - bX_{t-1}) + (1 - \lambda)a_{t-1} \quad (4)$$

شکل ۳ روند این تنظیم کردن را نشان می‌دهد.

۵. میانگین مربع خطا در بلندمدت در کنترل‌کننده‌های

EWMA

فرض کنید که انحرافات از هدف (y_t) در فرایند از مدل زیر تبعیت کند.

$$y_t = \alpha + \beta X_{t-1} + \delta + \varepsilon_t \quad (5)$$

که در آن δ میانگین اغتشاش در هر مرحله می‌باشد. میانگین مربع خطای مجانبی^۱ این فرایند برابر است با:

$$AMSE(y_t) = \lim_{t \rightarrow \infty} E(y_t^2) \quad (6)$$

اصطلاح مجانبی از این حقیقت ناشی می‌شود که این نوع کنترل-کننده‌ها به خاطر شرایط اولیه در معادلات EWMA دارای تغییرات کوتاه‌مدت بوده که باید از شرایط پایداری آن جدا شود. با توجه به معادله‌های بالا، معادله حلقه بسته به صورت زیر می‌شود [21]:

$$y_t = \alpha - \xi a_{t-1} + \delta + \varepsilon_t \quad (7)$$

$$\xi = \beta / b$$

با جای‌گذاری رابطه اخیر در رابطه ۴ داریم:

$$a_t = \lambda(\alpha + \delta + \varepsilon_t) + (1 - \lambda\xi)a_{t-1} \quad (8)$$

برای حل مجموعه معادلات دیفرانسیل در این کنترل‌کننده از روش فضای حالت^۲ باید استفاده کرد. بردار حالت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$z'_t = (a_{t-1}, t) \quad (9)$$

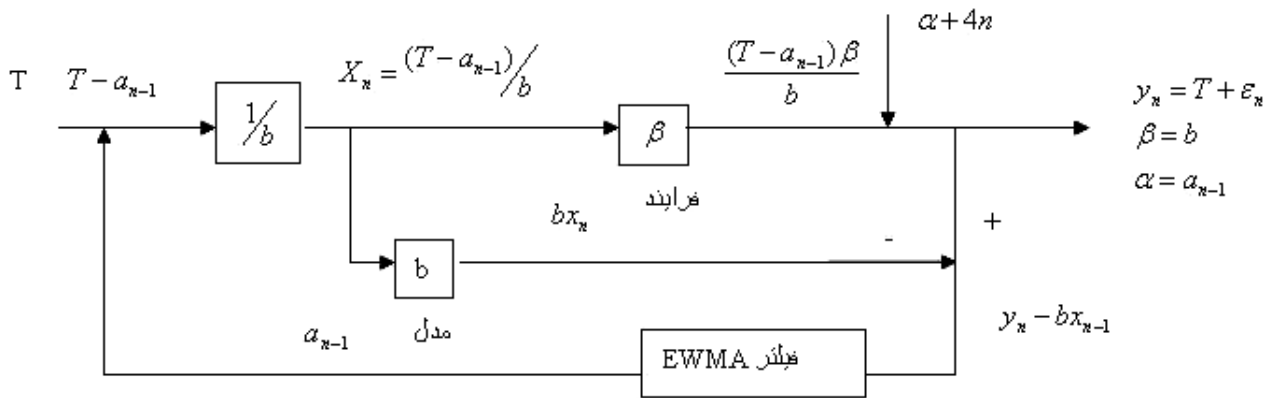
با این تعریف می‌توان معادلات فوق را در فضای حالت به صورت زیر نشان داد:

$$z_{t+1} = Az_t + w_t \quad (10)$$

که در آن

¹ Asymptotic Mean Square Error (AMSE)

² State-space



شکل ۳. فرایند به‌هنگام کردن a_n و نگاه‌داری فرایند در نزدیکی حالت ایده‌آل

EWMA یک آماره خیلی انعطاف‌پذیر برای کاربردهای کنترل فرایند آماری است. در صورت عدم وجود همبستگی در داده‌ها، EWMA می‌تواند انتخاب خوبی به جای نمودار کنترل جمع‌تجمعی باشد. اگر داده‌های فرایند از خود همبستگی برخوردار باشند آنگاه می‌توان بر اساس EWMA یک نمودار کنترل باقیمانده تهیه کرد تا مشکل زنگ خطرهای اشتباهی بیش از حد که برای نمودارهای کنترل مرسوم وجود دارد را از بین برد. اگر مشاهدات فرایند از همبستگی مثبت برخوردار باشند آنگاه می‌توان EWMA را معمولاً به‌عنوان یک پیش‌بینی‌کننده مناسب در نظر گرفت و نمودار کنترل بحث شده در این بخش را به‌عنوان مینا و اساس کنترل فرایند استفاده کرد. البته در بخش بعد از روش دوم (رابطه ۲۲) در محاسبه حدود کنترلی برای نمودار کنترل باقیمانده استفاده شده است.

۷. ترکیب فرایند کنترلی R2R با نمودار کنترلی باقیمانده

باقیمانده

در دنیای واقعی تنظیم‌های پی‌درپی با استفاده از فرایند کنترلی R2R هزینه‌های متعددی از جمله تغییر در موجودی و دیگر سیاست‌های تولیدی را ایجاد می‌کند.

در این مقاله استفاده از نمودارهای کنترلی باقیمانده بر اساس مشخصات مطرح شده در بخش ۶، به‌منظور تشخیص حالت خارج از کنترل فرایند و سپس استفاده از مکانیزم‌های تنظیم، پیشنهاد گردیده است.

این نوع ترکیب نقش موثری در کاهش هزینه تنظیم‌های پی‌درپی فرایند دارد. طراحی این دو مکانیزم با مشخص کردن پارامتر λ بر این اساس که هزینه انتظاری فرایند کمینه گردد، البته در نمودار کنترلی از یک واریانس هموار شده خطای پیش‌بینی (روش دوم) استفاده شده است. ایده ترکیب نمودارهای کنترل باقیمانده و کنترل R2R در این مقاله در شکل ۴ نشان داده شده است.

استفاده کرد. تخمین به دست آمده برای واریانس، از این روش قابل اطمینان‌تر از روش دامنه متحرک است و بدین علت حدود کنترل آن از روش دامنه متحرک بهتر است و همین امر باعث می‌شود تا عملکرد این نمودار بهبود یابد.

روش دوم از یک واریانس هموار شده خطای پیش‌بینی استفاده می‌کند:

$$\hat{\sigma}_p(t) = \lambda[e_1(t)]^2 + (1 - \lambda)\hat{\sigma}_p^2(t-1) \quad (20)$$

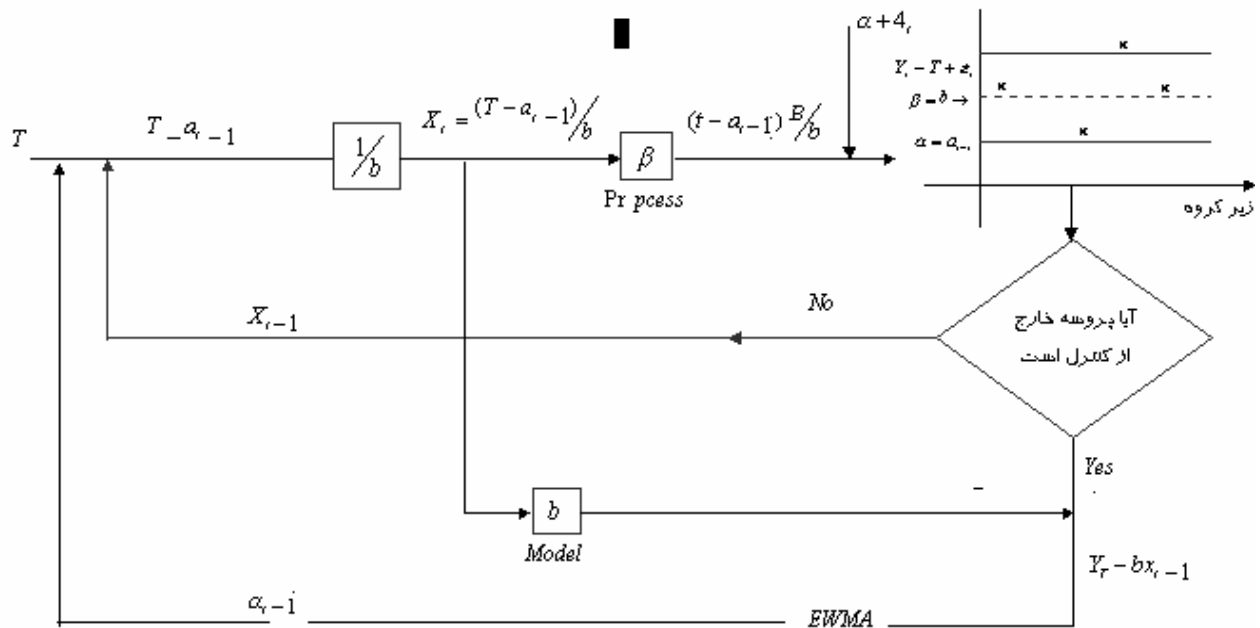
مانند حالت قبل، حدود کنترل بر اساس انحراف معیار خطای پیش‌بینی شده محاسبه می‌گردد. یا به عبارت دیگر، حدود کنترل مساوی $\pm 3\hat{\sigma}_p(t)$ است. در رابطه‌های فوق $0 \leq \lambda \leq 1$ در نظر گرفته می‌شود [22].

اگر میانگین فرایند تغییر نکند، می‌توان میانگین فرایند μ را به‌عنوان خط مرکز نمودار EWMA استفاده کرد. ولی اگر میانگین فرایند متغیر باشد، آنگاه باید از آماره z_t نمودار EWMA به‌عنوان خط مرکزی نمودار کنترل استفاده کرد. باید توجه داشت که z_t پیش‌بینی میانگین در زمان $t+1$ است. در این صورت نمودار EWMA در زمان $t+1$ دارای پارامترهای زیر خواهد بود [22]:

$$\begin{aligned} UCL_{t+1} &= z_t + 3\hat{\sigma}_p(t) \\ CL_{t+1} &= z_t \\ LCL_{t+1} &= z_t - 3\hat{\sigma}_p(t) \end{aligned} \quad (21)$$

در رابطه فوق از جذر واریانس خطای پیش‌بینی هموار شده جهت تعیین حدود کنترل استفاده شده است. در بعضی مواقع این نمودار کنترل را نمودار کنترل EWMA خط مرکز متحرک می‌نامند. اگر بخواهیم از روش خطای پیش‌بینی مطلق هموار شده استفاده کنیم آنگاه نمودار کنترل در زمان $t+1$ دارای پارامترهای زیر خواهد بود [22]:

$$\begin{aligned} UCL_{t+1} &= z_t + 4.75\Delta(t) \\ CL_{t+1} &= z_t \\ LCL_{t+1} &= z_t - 4.75\Delta(t) \end{aligned} \quad (22)$$



شکل ۴. ترکیب نمودارهای کنترل باقیمانده و کنترل R2R

$$1 - \beta = \int_{-\infty}^{-K-\Delta} \phi(z) dz + \int_{K-\delta}^{\infty} \phi(z) dz \quad (23)$$

در این رابطه $\phi(z) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-z^2/2)$ تابع چگالی توزیع نرمال استاندارد را نشان می‌دهد. کمیت $1 - \beta$ قدرت آزمون و β احتمال خطای نوع دوم است. احتمال زنگ خطرهای اشتباهی را نیز می‌توان از رابطه زیر تعیین کرد.

$$\alpha = 2 \int_K^{\infty} \phi(z) dz \quad (24)$$

اما برای محاسبه P باید توجه داشت که در فرایند R2R، خروجی به صورت پیوسته اندازه‌گیری می‌شود (y_t). حال اگر مشخصه کیفی خروجی دارای توزیع مشخصی باشد، می‌توان متوسط درصد قطعات معیوب تولیدی را در فرایند R2R با کنترل‌کننده EWMA محاسبه کرد. به طور کلی درصد معیوب در این حالت برابر است با:

$$P = P(y_t \geq USL) + P(y_t \leq LSL) \quad (25)$$

که در آن USL^1 و LSL^2 به ترتیب حدود فنی بالا و پائین هستند.

بر اساس توزیع نرمال، P به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$P = P(Z_{y_t} \geq \frac{USL - \mu_{y_t}}{\sigma_{y_t}}) + P(Z_{y_t} \leq \frac{LSL - \mu_{y_t}}{\sigma_{y_t}}) \quad (26)$$

که در آن μ_{y_t} و σ_{y_t} میانگین و انحراف معیار y_t بوده که در بخش ۶ به آن اشاره شد.

در این مقاله، از معیاری که هزینه خالص انتظاری در واحد زمان را برای فرایند کمینه می‌کند، استفاده شده است. در این حالت با توجه به شرایط نمودار کنترل باقیمانده فرض می‌شود که فرایند در حالت کنترل با میانگین Z_t توصیف می‌شود و یک انحراف با دلیل به اندازه α که به صورت تصادفی رخ می‌دهد، باعث می‌گردد تا میانگین از Z_t به α تغییر کند فرایند به وسیله یک نمودار کنترل باقیمانده و حدود کنترل بالا و پایین با $Z_t \pm K\sigma_p(t)$ کنترل می‌گردد و کافیست در هر مرحله یک نمونه از دسته تولیدی انتخاب گردد. وقتی که یک نقطه خارج از حدود کنترل رسم شود فرایند تنظیم ورودی آغاز می‌گردد. در طول زمانی که این تنظیم انجام می‌شود اجازه داده نمی‌شود که فرایند، مرحله بعدی خود را آغاز کند. هزینه این تنظیم به هزینه سیستم اضافه می‌گردد و البته اگر توسط نمودار متوجه حالت خارج از کنترل نشویم ممکن است چندین مرحله محصول معیوب تولید گردد، که هزینه‌ای برای فرایند خواهد داشت. از طرف دیگر، باید هزینه زنگ خطرهای اشتباهی نیز در نظر گرفته شود. فرض می‌شود احتمال ایجاد یک انحراف در یک مرحله برابر P باشد. به عبارت دیگر، با فرض اینکه فرایند در حالت تحت کنترل شروع به کار می‌کند، تعداد مرحله‌هایی که فرایند در حالت تحت کنترل باقی می‌ماند، یک متغیر تصادفی هندسی با میانگین $\frac{1}{1-P}$ می‌باشد.

وقتی که انحراف با دلیل ظاهر گردد، احتمال پی بردن به وجود آن در مرحله بعدی به صورت زیر است:

¹ Upper Specification Limit

² Lower Specification Limit

و خواهیم داشت:

$$c(\lambda, n, k) = \frac{c_0}{p} + \frac{c_1}{1-\beta} + c_1 + y.s.\alpha + (a+bn) \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{1-\beta} \right] + \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{1-\beta} \right] \quad (28)$$

که در آن پارامترهای طراحی عبارتند از:

n : اندازه نمونه مورد استفاده در نمودارهای کنترل باقیمانده.

k : ضریب تعیین‌کننده حدود کنترلی نمودار کنترل باقیمانده.

λ : ضریب هموارکننده در رویه EWMA و نمودار کنترل باقیمانده.

و پارامترهای هزینه‌ای عبارتند از:

w : هزینه تنظیم فرایند، زمانی که فرایند خارج از کنترل است.

Y : هزینه تنظیم فرایند، زمانی که زنگ خطر اشتباهی زده شده است.

S : متوسط تعداد مراحل که فرایند در حالت کنترل به سر می‌برد.

$$s = \frac{1}{p}$$

c_0 : هزینه تولید قطعات معیوب، در حالتی که فرایند تحت کنترل است.

c_1 : هزینه تولید قطعات معیوب، در حالتی که فرایند تحت کنترل نیست.

a : هزینه ثابت نمونه‌گیری.

b : هزینه متغیر نمونه‌گیری.

۹. طراحی بهینه رویه ترکیبی

برای محاسبه مقدار بهینه پارامترهای طراحی، یک مدل ریاضی بر پایه تابع هدف و محدودیت‌ها طراحی می‌کنیم. پارامترهای طراحی در این مدل همان متغیرهای تصمیم می‌باشند، و شرط پایداری فرایند R2R نیز، به‌عنوان یکی از محدودیت‌های مدل قرار می‌گیرد.

$$n \geq 0$$

$$k \geq 0$$

$$MINC(\lambda, n, k) \quad (29)$$

$$0 < \lambda \leq 1$$

$$|1 - \lambda\xi| \leq 1$$

حال برای بررسی بیشتر مدل، پارامترهای طراحی را برای مقادیر مختلف Δ از صفر تا سه با داده‌های فرضی زیر محاسبه می‌کنیم [18]:

$$\xi = 1, C_0 = 10, C_1 = 100, \sigma^2_\epsilon = 1, y = 50; w = 25, a = 0.5, b = 0.1, USL = 10, LSL = 5$$

وقتی که مقادیر Δ تغییر می‌کند مقادیر متفاوتی برای مقدار هزینه و پارامترهای طراحی به دست می‌آید که در جدول ۱ آمده‌اند. همان‌طور که در جدول ۱ مشاهده می‌شود، با زیاد شدن مقادیر Δ ، پارامتر λ افزایش می‌یابد.

۸. رویه ترکیبی R2R و نمودار کنترل باقیمانده بر اساس

مدل اقتصادی لورنزن - ونس

لورنزن و ونس در سال ۱۹۸۶ یک مدل اقتصادی برای طراحی نمودارهای کنترل توسعه داده‌اند.

ما در این بخش بر اساس مدل آنها، یک مدل اقتصادی جدید برای رویه ترکیبی R2R و نمودار کنترل باقیمانده توسعه داده‌ایم.

در مدل اقتصادی لورنزن - ونس مکانیزم شکست فرایند^۱ از شروع یک سیکل کاری تا بروز یک مشکل قابل تشخیص را در بر می‌گیرد.

در این مدل فرض می‌شود که فرایند در ابتدای سیکل کاری در حالت کنترل آماری به سر می‌برد و یک مشکل قابل تشخیص باعث

یک تغییر در فرایند می‌گردد. در مدل لورنزن و ونس فرض می‌شود که زمان ما بین بروز مشکل در فرایند دارای توزیع نمایی با پارامتر

λ باشد. بنابراین $\frac{1}{\lambda}$ متوسط زمانی است که فرایند در حالت

کنترل قرار دارد. در این مدل پارامترهای طراحی، اندازه نمونه و

فاصله بین نمونه‌گیری بوده همچنین فرض می‌گردد در صورت خارج افتادن یک نقطه خارج از حدود کنترل، مدت زمانی صرف

جستجوی علت و رفع آن می‌گردد. هزینه زنگ خطرهای اشتباهی نیز در مدل در نظر گرفته شده و در نهایت متوسط هزینه‌های فوق

در هر سیکل کمینه شده است. هر سیکل از شروع فرایند در حالت کنترل شروع شده و تا بروز یک مشکل قابل تشخیص ادامه پیدا می‌کند.

در مدل ترکیبی R2R و نمودار کنترلی باقیمانده، فرایند نمونه‌گیری در پایان هر مرحله انجام می‌گیرد و بعد از افتادن یک نقطه خارج از

حدود کنترل، فرایند تنظیم ورودی با استفاده از رویه EWMA انجام می‌گیرد و موقعی که ورودی تنظیم شد، مرحله بعدی تولید

شروع می‌شود. احتمال نیاز به تنظیم مجدد ورودی با احتمال خارج افتادن خروجی فرایند Y_t از حدود استاندارد تعیین شده برابر است.

مقدار این احتمال بر اساس اطلاعات بخش ۶ قابل محاسبه هستند. بر این اساس متوسط تعداد مراحل که فرایند در حالت کنترل به سر

می‌برد برابر $\frac{1}{p}$ می‌باشد.

بر اساس فرض‌های مطرح شده بالا، هزینه مورد انتظار در هر سیکل عبارت است از:

$$C(\lambda, n, k) = \frac{\text{E (هزینه تولید)}}{\text{E (تعداد مراحل تولید)}} + \frac{\text{E (زنگ خطرهای اشتباهی و تنظیم فرایند) E (تعداد مراحل تولید)}}{\text{E (هزینه نمونه گیری) E (تعداد مراحل تولید)}} + \frac{\text{E (تعداد مراحل تولید)}}{\text{E (تعداد مراحل تولید)}} \quad (27)$$

^۲ از نرم افزار lingo 8.0 برای اجرای مدل استفاده شده است.

^۱ Process failure mechanism (PMF)

جدول ۱. نتایج حاصل از مدل (۲۹)

Δ	n	k	λ	هزینه	α	β
۰	۱۲	۱/۸۴۵	۰/۶۱۹	۱۹/۶۰	۰/۰۶	۰/۱۲
۰/۲	۱۱	۱/۸۹۸	۰/۶۵۴	۱۹/۵۳	۰/۰۵۹	۰/۱۱۷
۰/۴	۱۱	۱/۹۹۱	۰/۶۸۰	۱۹/۴۱	۰/۰۵۸	۰/۱۱۶
۰/۶	۱۰	۲/۰۱۰	۰/۷۴۳	۱۹/۳۲	۰/۰۵۸	۰/۱۱۲
۰/۸	۱۰	۲/۲۶۷	۰/۸۲۱	۱۹/۱۸	۰/۰۵۷	۰/۱۱۱
۱	۱۰	۲/۳۵۱	۰/۸۴۵	۱۹/۰۵	۰/۰۵۷	۰/۱۰۸
۱/۲	۹	۲/۴۴۳	۰/۸۵۹	۱۸/۹۴	۰/۰۵۴	۰/۱۰۸
۱/۴	۹	۲/۵۶۱	۰/۸۶۳	۱۸/۵	۰/۰۵۲	۰/۱۰۶
۱/۶	۸	۲/۶۸۹	۰/۸۷۴	۱۸/۴۳	۰/۰۵۲	۰/۱۰۶
۱/۸	۸	۲/۸۹۱	۰/۸۸۸	۱۸/۲۵	۰/۰۵۱	۰/۱۰۲
۲	۷	۲/۹۴۵	۰/۸۹۵	۱۸/۰۲	۰/۰۵۱	۰/۱۰۰
۲/۲	۷	۲/۹۶۱	۰/۸۹۵	۱۷/۹۸	۰/۰۵۱	۰/۰۹۸
۲/۴	۷	۲/۹۸۹	۰/۹۰	۱۷/۹۴	۰/۰۵۱	۰/۰۹۸۸
۴/۶	۶	۲/۹۹	۰/۹۰۴	۱۷/۵۰	۰/۰۵۰۷	۰/۰۹۸۰۵
۲/۸	۵	۳/۰۱۰	۰/۹۱۰	۱۷/۳۰	۰/۰۵۰۱	۰/۰۹۸۲
۳	۵	۳/۰۱۱	۰/۹۱۰	۱۷	۰/۰۵۰۱	۰/۰۹۸۱

را با در نظر گرفتن داده‌های فرضی قبلی و مقادیر 0.05 و 0.1 به-
ترتیب برای u_1 و u_2 نشان می‌دهد.

$$MINC(\lambda, n, k) \quad (30)$$

$$n \geq 0$$

$$k \geq 0$$

$$0 < \lambda \leq 1$$

$$|1 - \lambda \xi| \leq 1$$

$$\alpha \leq u_1$$

$$\beta \leq u_2$$

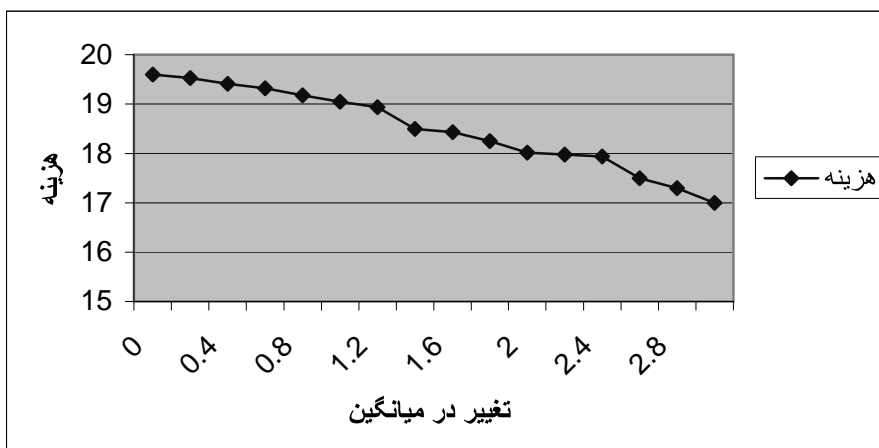
عدد صحیح: n, k

و

در این حالت افزایش میزان تغییر در میانگین فرایند باعث
افزایش λ شده و این مساله در فرایند کنترلی R2R به نحوی باعث
تنظیم فرایند می‌گردد، به این صورت که اریب در میانگین خروجی
فرایند کاهش یافته و در نتیجه کیفیت خروجی افزایش می‌یابد [23].

همان‌طور که در مرجع [21] اشاره شده، اعمال این امر در کنترل-
کننده R2R باعث کاهش اریب در خروجی فرایند می‌گردد، و در
نتیجه باعث بهبود کیفیت از دست رفته می‌شود. از طرف دیگر
حدود کنترل با افزایش Δ ، بزرگ‌تر شده‌اند که این امر باعث کاهش
خطای نوع اول و دوم در نمودار کنترل باقیمانده می‌گردد. این
کاهش خود به خود موجب کاهش اندازه زیر گروه و هزینه متغیر
مربوط به نمونه‌گیری خواهد شد. نمودار زیر اثر Δ را بر هزینه
فرایند نمایش می‌دهد.

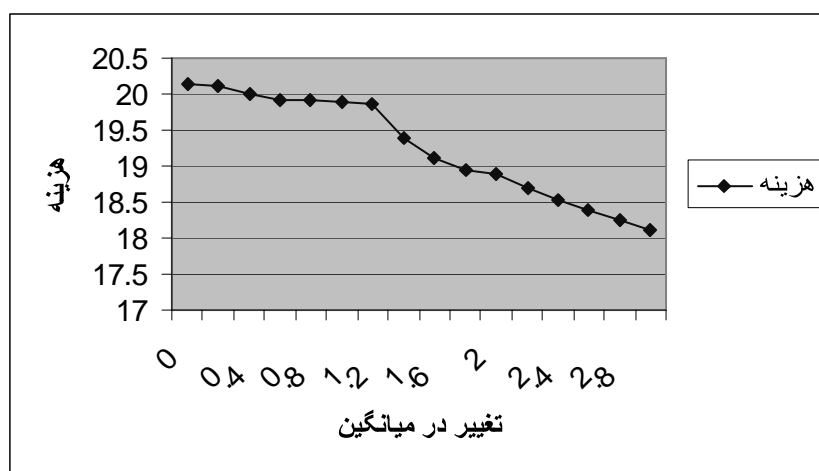
همچنین مدل، این قابلیت را دارد که مقدار خطاهای نوع اول و دوم
نمودار کنترل را نیز بر اساس نظر افراد خبره و تصمیم‌گیرنده، تحت
کنترل قرار دهد. این امر با در نظر گرفتن دو محدودیت برای α و
 β تحقق پیدا می‌کند (مدل ۳۰). جدول ۲ مقادیر پارامترهای طراحی



شکل ۵. اثر Δ بر هزینه فرایند

جدول ۲. نتایج حاصل از مدل (۳۰)

Δ	n	k	λ	هزینه	α	β
۰	۱۵	۱/۹۰	۰/۷۸	۲۰/۱۵	۰/۰۵	۰/۰۹۹۴
۰/۲	۱۵	۱/۹۵	۰/۷۹	۲۰/۱	۰/۰۴۹۹	۰/۰۹۸۱
۰/۴	۱۴	۲/۰۱	۰/۸	۲۰/۰۱	۰/۰۴۹۹	۰/۰۹۸۸
۰/۶	۱۳	۲/۱۸	۰/۸۱۰	۱۹/۹۲	۰/۰۴۷۳	۰/۰۹۸۵
۰/۸	۱۳	۲/۲۰	۰/۸۱۴	۱۹/۹۱	۰/۰۴۶۱	۰/۰۹۸۲
۱	۱۳	۲/۲۰۳	۰/۸۱۵	۱۹/۹۰	۰/۰۴۵۷	۰/۰۹۸۱
۱/۲	۱۲	۲/۲۵۰	۰/۸۲۰	۱۹/۸۵	۰/۰۴۵۰	۰/۰۹۵۱
۱/۴	۱۱	۲/۳۲۰	۰/۸۴۳	۱۹/۴	۰/۰۴۴۸	۰/۰۹۴۲
۱/۶	۱۱	۲/۳۸۰	۰/۸۵۲	۱۹/۱	۰/۰۴۴۵	۰/۰۹۳۰
۱/۸	۱۰	۲/۴۱۰	۰/۸۷۱	۱۸/۹۵	۰/۰۴۴۲	۰/۰۹۲۱
۲	۹	۲/۴۵۹	۰/۸۸۲	۱۸/۸۹	۰/۰۴۴۱	۰/۰۹۱۱
۲/۲	۹	۲/۴۸۰	۰/۸۸۵	۱۸/۷۰	۰/۰۴۳۵	۰/۰۹۰۵
۲/۴	۸	۲/۵۰۱	۰/۸۸۷	۱۸/۵۴	۰/۰۴۳۰	۰/۰۹۰
۲/۶	۸	۲/۵۵۰	۰/۸۸۹	۱۸/۳۹	۰/۰۴۲۸	۰/۰۸۹۱
۲/۸	۷	۲/۵۶۰	۰/۸۹۰	۱۸/۲۵	۰/۰۴۲۵	۰/۰۸۸۸
۳	۷	۲/۵۶۸	۰/۸۹۰	۱۸/۱۱	۰/۰۴۲	۰/۰۸۸۵



شکل ۶. اثر Δ بر هزینه فرایند

[3] Ross S.M., "Quality Control under Markovian Deterioration", Management Science, 1971, Vol.17, No.4, pp.390-412.

[4] Saniga I.R., "Surveillance Problems", Naval Research Logistics Quarterly, 1962, Vol. 9, NO. 1, pp. 56-68.

[5] White C.C., "A Markov Quality Control Process Subject to Partial Observation", Management Science, 1974, Vol.19, No.1, pp. 12-23.

[6] Weiler h., "On Most Economical Sample Size for Controlling the Mean of a Population", Annals of Mathematical Statistics, 1952, Vol.23, No.3, pp.198-222.

[7] Aroian L. and Levine H., "The Effectiveness of Quality Control Charts", Journal of American statistical Association, 1950, Vol.44, No.4, pp.350-364.

[8] Weiler H., "The use of Runs to Control the Mean in Quality Control", Journal of American statistical Association, 1953, Vol.48, No.2, pp.141-159.

[9] Weiler H., "A New Type of Control Limit for Means, Ranges, and Sequential Runs", Journal of American statistical Association, 1954, Vol.49, No.2, pp.130-143.

[10] Crowder S.V., "A Simple Method for Studying Run-Length Distributions of Exponentially Weighted Moving Average Chart", Technometrics, 1987, Vol.29, No.3, pp.358-371.

[11] Barish N.N. and Hauser E., "Economic Design for control decisions", Journal of Industrial Engineering, 1963, Vol.14, No.1, pp.65-79.

[12] Taylor H.M., "Markovian Sequential Replacement Process", Annals of Mathematical Statistics, 1965, Vol.36, No.1, pp.22-34.

[13] Montgomery D.C., "The Economic Design of Control Charts: A review and literature survey", Journal of Quality Technology, 1980, Vol.12, No.1, pp.75-87.

در این صورت کاهش تعداد تولیدات معیوب، کاهش خطاهای نوع اول و دوم، همچنین کاهش تعداد نمونه، باعث کاهش کل هزینه می‌گردد. همچنین در این حالت شیب افزایش n بیشتر از نتایج حاصل از مدل ۲۹ می‌باشد. علاوه بر این متوسط اندازه نمونه لازم در نمودار کنترلی در حالت دوم بیشتر است، که این امر به خاطر قرار دادن محدودیت برای خطای نوع اول و دوم است. شکل ۶ اثر Δ را بر هزینه فرایند نمایش می‌دهد.

از طرف دیگر پارامترهای هزینه‌ای به صورت ترکیب خطی از پارامترهای طراحی در مدل‌ها قرار گرفته‌اند. این امر باعث می‌گردد که آن‌ها به صورت ضرائب وزنی عمل کنند، بنابراین با افزایش هر کدام از این ضرائب، پارامترهای مربوطه تغییر خواهند کرد.

۱۰. نتیجه گیری و پیشنهادات

در این مقاله از نمودار کنترل باقیمانده به عنوان مکمل روش R2R در بهبود کیفیت و کاهش هزینه‌های کیفیت استفاده گردید. این بهبود از طریق تهیه یک مدل ریاضی که پارامترهای طراحی نمودارهای کنترل باقیمانده و کنترل کننده R2R را به صورت بهینه به دست می‌آورد، صورت گرفت و در نتیجه از یک طرف هزینه‌های کنترل و از طرف دیگر اثربخشی در کیفیت محصول برآورده شده است. پیشنهاد می‌شود استفاده از نمودارهای جمع تجمعی (CUSUM) با توجه به خواص مشابه به جای نمودار کنترلی باقیمانده بررسی گردند. همچنین می‌توان استفاده از معیارهایی چون توانایی فرایند را در بررسی و تنظیم مجدد فرایند بررسی کرد.

مراجع

[1] Girshick M.A. and Rubin A., "Bayes Approach to Quality Model", Annals of Mathematical statistics, 1952, Vol. 23, No.3, pp.234-249.

[2] Bather J.A., "Control Chart and Minimization of Cost", Journal of the Royal Statistical Society (B), 1963, Vol.25, No.1, pp.36-52.

the EWMA Control Chart", Journal of Quality Technology, 1995, Vol.27, No.2, pp.250-256.

[19] Linderman K. and Love T.E., "*Economic and Economic Statistical Design for MEWMA Control Charts*", Journal of Quality Technology, 2000, Vol.33, No.4, pp. 410-417.

[20] Box G.E. and Reinsel G.C., *Time Series Analysis, Forecasting, and Control*, 3rd edition, prentice-Hall, Englewood Clifts, NJ, 1994.

[21] Castillo D.E., *Statistical Process Adjustment for Quality Control*, John Wily & Sons, New York, NY, 2002.

[22] Montgomery D.C., *Introduction to Statistical Process Control*, John Wily& Sons, New York, NY, 2001.

[23] Park C., "*Economic Design of variable Sampling Rate EWMA Chart*", IIE Transactions, 2004, Vol.37, No.2, pp.231-246.

[14] Ho C. and Case, K.E., "*Economic design of control charts: A literature review for 1981-1991*", Journal of Quality Technology, 1994, Vol.26, N0.1, pp.39-52.

[15] Lorenzen T.j. and Vance L.C., "*The Economic Design of Control Charts: A Unified Approach*", Technometrics, 1986, Vol.28, No.1, pp.3-10.

[16] Keats J.B., Del Castillo E., Von Collani E. and Saniga E.m., "*Economic Modeling for Statistical Process Control*", Journal of Quality Technology, 1997, Vol.29, No.2, pp.144-157.

[17] Woodal W.H., "*Weaknesses of the Economic Design of Control Charts*", Technometrics, 1986, Vol.28, No.4, pp.408-409.

[18] Montgomery D.C., Trong J.C.-c., Cochran J.K. and Lawrence f.P., "*Statistically Constrained Economic Design of*

Archive of SID